

Esercizi - Foglio 1 - Aritmetica complessa

Esercizio 1.1 Calcolare $(i + 1)^n$ per n intero sia positivo che negativo.

Esercizio 1.2 Scrivere in forma cartesiana, semplificando i calcoli finché possibile, i seguenti numeri complessi:

- | | | |
|------------------------|-----------------------|--------------------|
| a) i^i , | e) $\cos(i - 1)$, | i) $\sqrt[6]{1}$, |
| b) $(i + 1)^{(i+1)}$, | f) $\tan(i)$, | j) $\sqrt[3]{i}$ |
| c) $\log(i + 1)$, | g) $\cosh(\log(i))$, | |
| d) $\sin(i)$, | h) $\sqrt[4]{-1}$, | |

Esercizio 1.3 Risolvere le seguenti equazioni in \mathbb{C} :

- | | |
|-----------------------------------|--------------------------------|
| a) $z^2 + 2\bar{z} = z ^2$; | e) $z^2 + z\bar{z} = 1 + 2i$; |
| b) $z = z \bar{z}i$; | f) $z z - 2z - 1 = 0$; |
| c) $z^2 = z \bar{z}i$; | g) $z^2 z ^2 = i$; |
| d) $iz^3 = 1 - \frac{i^3}{1-i}$; | h) $i(z + 1)^3 = 1$; |

Esercizio 1.4 Disegnare nel piano complesso gli insiemi individuati dalle relazioni seguenti:

- $A = \left\{ z \in \mathbb{C} \text{ tali che } \frac{\bar{z}}{z} \in \mathbb{R} \right\}$
- $B = \left\{ z \in \mathbb{C} \text{ tali che } |z - (1 + i)| = \sqrt{2} \right\}$
- $C = \left\{ z \in \mathbb{C} \text{ tali che } |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z| = 1 \right\}$
- $D = \left\{ z \in \mathbb{C} \text{ tali che } z^2 = \bar{z}^2 \right\}$
- $E = \left\{ z \in \mathbb{C} \text{ tali che } z^2 = \bar{z}^{-2} \right\}$
- $F = \left\{ z \in \mathbb{C} \text{ tali che } i|z|^2 + 2z \in \mathbb{R} \right\}$
- $G = \left\{ z \in \mathbb{C} \text{ tali che } i|z| + 2z \in \mathbb{R} \right\}$

Esercizio 1.5 Determinare gli $z \in \mathbb{C}$ tali che $|z - i| = |z + 1|$.