

n. 1 cognome

nome

matricola

--	--	--	--	--	--	--	--

Risposte	2	3	2	1	2	1	2							
Domande	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14

ATTENZIONE: il compito è composto da 10 domande da scegliere tra le 14 proposte nella maniera seguente:

Programma 2001-2002: ignorare le domande 4,5,10,11

Programma 2002-2003: ignorare le domande 2,6,8,9.

Scrivere il numero della risposta che si ritiene corretta sopra al numero della corrispondente domanda.

Domande a risposta multipla: esatta = +3, errata = -1, in bianco = 0.

Domande con svolgimento: 5 punti se svolte giustificando in maniera esauriente (e in italiano comprensibile!) tutti i passaggi necessari. **Il punteggio si riduce** anche in caso di svolgimento corretto ma non adeguatamente giustificato.

Valore totale del compito: 40 punti. **Sufficienza:** 18 punti.

Tempo a disposizione: 2 ore.

Domanda 1) Quale delle affermazioni seguenti è vera?

- 1) Una funzione $f(z)$ è olomorfa se e solo se $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{i} \frac{\partial f}{\partial x}$
- 2) Una funzione $f(z)$ è olomorfa se e solo se $\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{1}{i} \frac{\partial f}{\partial x}$
- 3) L'uguaglianza $i \sinh(iz) = \sin(z)$ è vera per ogni $z \in \mathbb{C}$.
- 4) L'equazione $az^2 + bz + c = 0$, con $a, b, c \in \mathbb{C}$ ha sempre due soluzioni $z \in \mathbb{C}$ distinte.

Domanda 2) La soluzione generale di soltanto una delle equazioni differenziali seguenti non è uno spazio vettoriale. Quale?

- 1) $y''' + 2y'' = 0$
- 2) $(y' - 6y)^2 = 0$
- 3) $y'^2 - y^2 = 0$
- 4) $y'' - 3y' + 2y = 0$

Domanda 3) Sia H uno spazio di Hilbert reale e siano f_1 ed f_2 due elementi di H ortonormali. Quale delle affermazioni seguenti è corretta?

- 1) Ogni elemento di H si può sempre scrivere come combinazione lineare di f_1 ed f_2 .
- 2) Se $f = af_1 + bf_2$, $a, b \in \mathbb{R}$ allora $\|f\|^2 = a^2 + b^2$.
- 3) Se $f = af_1 + bf_2$, $a, b \in \mathbb{R}$ allora $\|f\| = a^2 + b^2$.
- 4) $f_1 + f_2$ ed $f_1 - f_2$ sono ortonormali.

Domanda 4) Il raggio di convergenza della serie di potenze

$$\sum_{n=4}^{\infty} \left(1 - \frac{n^3 - 4n^2 + 2n - 1}{2n^5 - 6n + 2} \right)^{n^2} z^n$$

è:

- 1) 1
- 2) e
- 3) $\frac{1}{\sqrt{e}}$
- 4) \sqrt{e}

Domanda 5) La migliore approssimazione nel senso dei minimi quadrati di $f(x) = x$ nell'intervallo $[-\pi, \pi]$ mediante funzioni del tipo $a \cos(x) + b \sin(x)$ è:

- 1) Una funzione pari.
- 2) $2 \sin(x)$
- 3) $-\frac{2}{\pi} \cos(x) + 2 \sin(x)$
- 4) $\sin(x)$

Domanda 6) Sia D il triangolo di vertici -2 , 2 e $-2i$. Calcolare

$$I = \int_{\partial D} \frac{z(z^2 - 4)^3}{(z^3 - i)(z - i)} dz$$

- 1) $I = \frac{125}{3} \pi i$
- 2) $I = -\frac{125}{3} \pi i$
- 3) $I = \frac{125}{6}$
- 4) $I = 0$

Domanda 7) Quali tra le funzioni seguenti non può essere la trasformata di Fourier di una funzione derivabile?

- 1) $\frac{\sin \xi}{(\xi + \xi^2)^2}$
- 2) $\frac{1}{\xi + 1}$
- 3) $\frac{\cosh \xi}{\sinh 2\xi}$
- 4) $\frac{1}{\xi^4}$

Domanda 8) Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = 2xy + x^3 e^{-x^2} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

1) DOMANDA CON SVOLGIMENTO

Domanda 9) Calcolare la trasformata di Fourier $\hat{f}(\xi)$ della funzione

$$f(x) = \begin{cases} (3 - 6|x|) \cos(x) & x \in [-1/2, 1/2] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

1) DOMANDA CON SVOLGIMENTO

Domanda 10) Determinare insieme di convergenza e somma della serie di potenze reale

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{n-1} x^n$$

1) DOMANDA CON SVOLGIMENTO

Domanda 11) Sia $u: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione di classe C^1 che risolve il problema di Cauchy

$$\begin{cases} e^{5t} + \int_0^t u'(x)e^{5(t-x)} dx = 1 \\ u(0) = 2 \end{cases}$$

per $t > 0$. Determinare la funzione u .

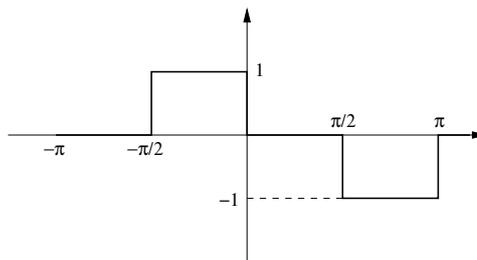
1) DOMANDA CON SVOLGIMENTO

Domanda 12) Determinare tutte le soluzioni $z \in \mathbb{C}$ dell'equazione

$$z - z^2 + z|z|e^{\frac{\pi}{3}i} = |z|e^{\frac{\pi}{3}i}$$

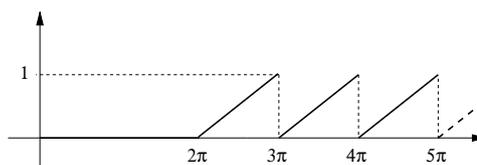
1) DOMANDA CON SVOLGIMENTO

Domanda 13) Sviluppare in serie di Fourier nell'intervallo $[-\pi, \pi]$ la funzione il cui grafico è riportato in figura.



1) DOMANDA CON SVOLGIMENTO

Domanda 14) Calcolare la trasformata di Laplace della funzione



1) DOMANDA CON SVOLGIMENTO