METODI MATEMATICI - IDI - A.A. 2005-2006

12 luglio 2007 - prova scritta nono appello

Risolvere gli esercizi proposti giustificando il ragionamento seguito. Accanto ad ogni esercizio è riportato il punteggio massimo ottenibile. In caso di soluzione corretta ma non adeguatamente giustificata il punteggio può essere inferiore al massimo.

Esercizio 1:

a) (4 punti) Si determinino gli $z \in \mathbb{C}$ che soddisfano l'equazione

$$\frac{e^{3z} - e^{-3z}}{2} = e^{-3z} - 1.$$

b) (4 punti) Utilizzando il risultato precedente, si risolva l'equazione reale

$$\sin(5x) + 2\sin(2x) = 3\sin(-x).$$

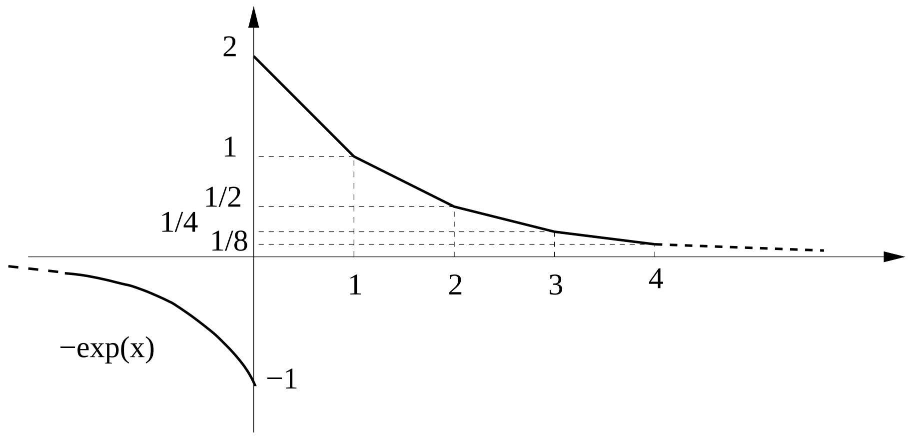
Esercizio 2:

a) (5 punti) Si determini raggio di convergenza e somma della serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)!} \left(\frac{x}{2} - 1\right)^{2n} \left((2n-1)! - 4^n\right)$$

b) (2 punti) Indicata con $f(x)$ la somma della serie al punto a), quanto vale $\frac{d^8 f}{dx^8}(2)$?

Esercizio 3: Sia $f(x)$ la funzione il cui grafico è riportato in figura.



a) (5 punti) Si determini la trasformata di Fourier di $f(x)$.

b) (3 punti) Si disegni il grafico di $g(x) = f(x) - f'(x)$ e si determini la trasformata di Fourier di $g(x)$.

Esercizio 4: **(6 punti)** Sia V uno spazio di Hilbert reale di dimensione 2 e siano $f, g \in V$. Che condizioni devono soddisfare f e g perchè $f + g$ e $f - g$ formino una base ortonormale di V?

Esercizio 5: (6 punti) Facendo uso della trasformata di Laplace si determini, per $x > 0$, la soluzione del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' - 3y' = xe^{3x} \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 3 \end{cases} .$$