METODI MATEMATICI - IDI - A.A. 2005-2006

18 aprile 2007 - prova scritta settimo appello

Risolvere gli esercizi proposti giustificando il ragionamento seguito. Accanto ad ogni esercizio è riportato il punteggio massimo ottenibile. In caso di soluzione corretta ma non adeguatamente giustificata il punteggio può essere inferiore al massimo.

Esercizio 1:

a) (6 punti) Determinare **tutti** i valori di $n \in \mathbb{N}$ tali che

$$(\sqrt{3}+i)^n + (\sqrt{3}-i)^n = 2^{n+1}\cos\left(n\frac{\pi}{6}\right)$$

a) (3 punti) Indicati con n_1, n_2, n_3 i primi 3 valori di n maggiori di 120, calcolare

$$\cos\left((n_1+n_2+n_3)\frac{\pi}{6}\right)$$

Esercizio 2:

a) (4 punti) Determinare, se esiste, una funzione olomorfa $f(z)$ tale che, posto $z = x+iy$,

$$\mathrm{Re}(f) = e^{2x}\cos(2y) - 2\sin(x)\sinh(y) - 1, \qquad f(0) = i.$$

b) (3 punti) Scrivere tale funzione come funzione della sola z.

Esercizio 3: (6 punti) Sia

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x < 0 \\ \dfrac{1}{2^n} & \text{per } n < x < n+1, \quad n \geq 0 \end{cases}.$$

Determinare la trasformata di Fourier di $f(x)$.

Esercizio 4: Sia $f(x)$ una funzione derivabile su tutto $\mathbb{R}$. Sia poi

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)$$

la somma della sua serie di Fourier in $[-\pi,\pi]$.

a) (5 punti) Determinare lo sviluppo in serie di Fourier in $[-\pi,\pi]$ di

$$g(x) = F'\left(x+\frac{\pi}{2}\right).$$

b) (3 punti) Che condizioni è necessario imporre su $f(x)$ perchè sia $g(x) = f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$? (spiegare il procedimento utilizzato!)

Esercizio 5: (6 punti) Facendo uso delle trasformate di Laplace si determini, per $x > 0$, una soluzione del seguente problema:

$$\int_0^x (y(x-t) + y''(x-t))\sinh(t)\,dt = x,$$

con $y(0) = y'(0) = 0$.