16 gennaio 2007 - prova scritta quinto appello

Risolvere gli esercizi proposti giustificando il ragionamento seguito. Accanto ad ogni esercizio è riportato il punteggio massimo ottenibile. In caso di soluzione corretta ma non adeguatamente giustificata il punteggio può essere inferiore al massimo.

Esercizio 1: (7 punti) Determinare gli $z \in \mathbb{C}$ tali che
$$\begin{cases} 2\frac{z}{\bar{z}} = 1 + i\sqrt{3} \\ \frac{z^2}{2} = 2 + iz\text{Im } z \end{cases}.$$

Esprimere le soluzioni in forma cartesiana, in forma trigonometrica e in forma esponenziale.

Esercizio 2:

a) (3 punti) Sia $z = x + iy$. Si determini, se possibile, il valore di a in modo che la funzione $f(z)$ tale che,

$$\text{Re } f(z) = x^2(a + 2) + y + ay^2, \quad f(1 + i) = 1 + i$$

sia olomorfa.

b) (4 punti) Scrivere esplicitamente la funzione $f(z)$.

Esercizio 3: (6 punti) Un dispositivo elettronico agisce su un segnale in ingresso $f(x)$ trasformandolo nel segnale in uscita $g(x)$ secondo la regola seguente:

$$g(x) = \int_0^x f(x-t) \frac{e^t - 1}{e^{2t}} dt, \quad t > 0.$$

Che segnale si ha in uscita quando $f(x) = x\chi_{[0,1]}(x)$?

Esercizio 4: Sia

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{per } x \in [-\pi, \pi] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \quad \text{e sia} \quad g(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt.$$

a) (4 punti) Determinare la trasformata di Fourier di $f(x) + f''(x)$.

a) (4 punti) Determinare la trasformata di Fourier di $g(x) + g''(x)$.

Esercizio 5: (6 punti) Facendo uso delle trasformate di Laplace si risolva, per $x > 0$, il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' - 2y' + 8y = e^{4x} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = -3 \end{cases}$$