METODI MATEMATICI - IDI - A.A. 2004-2005

20 dicembre 2005 - prova scritta quarto appello

Risolvere gli esercizi proposti giustificando il ragionamento seguito. Accanto ad ogni esercizio è riportato il punteggio massimo ottenibile. In caso di soluzione corretta ma non adeguatamente giustificata il punteggio può essere inferiore al massimo.

Esercizio 1:

(6 punti) Facendo uso delle trasformate di Laplace, si determini una funzione $u(x)$ tale che

$$\int_0^t e^{x-t}\sin(x)\,u(x-t)\,dx = t^2, \qquad t > 0.$$

Esercizio 2:

a) (7 punti) Siano $f(z)$ e $g(z)$ rispettivamente la somma delle serie di potenze

$$\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{2^{n-1}}\,z^{n-1}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-5)^n}{6^n}.$$

Si determini per quali valori di $z \in \mathbb{C}$ è verificata l'uguaglianza $f(z) = g(z)$.

Esercizio 3:

a) (4 punti) Sia $z = x + iy$; determinare tutte le funzioni olomorfe $f(z)$ tali che $\mathrm{Im}(f(z)) = -e^x\cos(y)$.

b) (3 punti) Se $g(z)$ è tale che $\mathrm{Im}(g(z)) = -e^x\cos(y)$ e $g(0) = 1 + i$, determinare gli zeri di $g(z)$.

Esercizio 4:

a) (4 punti) Determinare lo sviluppo in serie di Fourier, per $x \in [-\pi, \pi]$, della funzione $f(x) = \pi - |x|$ e si stabilisca per quali valori di $x \in \mathbb{R}$ la somma $h(x)$ della serie di Fourier di f coincide con $f(x)$.

b) (4 punti) Sia $g(x)$ l'estensione periodica a tutto $\mathbb{R}$ di $f\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$. Per quali valori di $x \in [-\pi, \pi]$ vale l'uguaglianza $g(x) = h\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$?

Esercizio 5:

a) (5 punti) Sia $z \in \mathbb{C}$. Risolvere l'equazione

$$\overline{z}|z| = iz\tan(\arg z).$$

ESERCIZI RISERVATI AGLI STUDENTI 2001-2002
IN SOSTITUZIONE DEGLI ESERCIZI 1 E 2

Esercizio 1bis:

(6 punti) Facendo uso della trasformata di Laplace si risolva, per $x \geq 0$, il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' + 2y' + 2y = e^{-x} \\ y(0) = 2, \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

Esercizio 2 bis:

(7 punti) Sia $f(z) = \dfrac{1}{z(z+i)}$ e si γ un laccio in $\mathbb{R}^2$.

Quanti e quali valori può assumere l'integrale $\displaystyle\int_\gamma f(z)\, dz$ al variare di γ?