

21 aprile 2005 - prova scritta settimo appello

Risolvere gli esercizi proposti giustificando il ragionamento seguito. Accanto ad ogni esercizio è riportato il punteggio massimo ottenibile. In caso di soluzione corretta ma non adeguatamente giustificata il punteggio può essere inferiore al massimo.

Esercizio 1:

- a) (4 punti) Determinare la migliore approssimazione nel senso dei minimi quadrati, per $x \in [-\pi, \pi]$, della funzione $f(x) = \sin(x)$ mediante funzioni del tipo $g(x) = a\chi_{[-\pi,0]}(x) + b\chi_{[0,\pi]}(x)$, $a, b \in \mathbb{R}$.
- b) (2 punti) Determinare l'errore commesso con l'approssimazione.

Esercizio 2:

- a) (6 punti) Facendo uso delle trasformate di Laplace, risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - y' = e^{x-1} \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \end{cases} .$$

Esercizio 3: (3 + 3 punti) Sia $z = x + iy$. Determinare, se esistono due funzioni $f_1(z)$ ed $f_2(z)$, olomorfe, tali che:

$$\text{a) } \operatorname{Re}(f) = \cos x \cdot \sin y \qquad \text{b) } \operatorname{Im}(f) = \cosh x \cdot \sinh y.$$

Esercizio 4: (3 + 3 punti) Disegnare gli insiemi degli $z \in \mathbb{C}$ definiti dalle seguenti relazioni:

$$\text{a) } |z| = \operatorname{Re}(z) + 1 \qquad \text{b) } \operatorname{Re}(az + b) > 0, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Esercizio 5:

- a) (4 punti) Determinare raggio di convergenza e somma della serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n+1)(z-1)^{2n}.$$

- b) (3 punti) Indicata con $f(z)$ la somma della serie al punto a), calcolare

$$\frac{d^6 f}{dz^6}(1).$$