METODI MATEMATICI - IDI - A.A. 2003-2004

1 febbraio 2005 - prova scritta quinto appello

Risolvere gli esercizi proposti giustificando il ragionamento seguito. Accanto ad ogni esercizio è riportato il punteggio massimo ottenibile. In caso di solzione corretta ma non adeguatamente giustificata il punteggio può essere inferiore al massimo.

Esercizio 1:

(4 + 4 punti) Determinare la trasformata di Fourier delle funzioni seguenti:

$$\textbf{a)}\quad f(x) = \frac{\cos x}{1+x^2}, \qquad\qquad \textbf{b)}\quad g(x) = \frac{\sin x}{1+x^2}.$$

Esercizio 2:

a) (6 punti) Sia $z = x + iy$. Determinare per quali $z_0 \in \mathbb{C}$ esiste una funzione olomorfa f tale che

$$\begin{cases} \operatorname{Im} f(z) = 3x^2y - y^3 - 2y \\ f(0) = z_0 \end{cases} .$$

b) (2 punti) Determinare esplicitamente $f(z)$ nel caso in cui $f(0) = 2$.

Esercizio 3:

a) (6 punti) Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + 2y' + 5y = 0 \\ y(0) = 1 \qquad y'(0) = 0 \end{cases}$$

b) (2 punti) Determinare il semipiano di convergenza della trasformata di Laplace della soluzione.

Esercizio 4:

a) (4 punti) Determinare gli $z \in \mathbb{C}$ tali che $\quad i\log(z^2) + \log(|z^2|) = k,\ k \in \mathbb{R}$.

b) (4 punti) Determinare il valore di k in modo che due delle soluzioni determinate al punto precedente individuino un triangolo equilatero con il punto $z_0 = \dfrac{\sqrt{3}}{2} e^{\frac{4}{3}\pi i}$.