Esercizi - Foglio 1 bis

1bis Serie di Potenze

Esercizio 1.1 Determinare il raggio di convergenza delle serie

$$\text{a)}\ \sum_{k=0}^{\infty} z^k \qquad \text{b)}\ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k+1} \qquad \text{c)}\ \sum_{k=0}^{\infty} (k-1)z^k \qquad \text{d)}\ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{z^{2k+1}}$$

e calcolarne la somma.

Indicato con ρ il raggio di convergenza delle serie, verificare per ciascuna, se esistono $z \in \mathbb{C}$ con $|z| = \rho$ per cui le serie convergono. La serie b) è convergente per $z = i$?

Esercizio 1.2 Determinare per quali valori di $z \in \mathbb{C}$ convergono la serie

$$\text{a)}\ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k^2} \qquad \text{b)}\ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{3^k+1} \qquad \text{c)}\ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{k^2}}{2^k k}$$

Esercizio 1.3 Far vedere che la funzione $f(z) = e^{-\frac{1}{z^2}}$ è derivabile infinite volte ma la serie di Taylor di f non converge ad f.

Soluzioni

Esercizio 1.1

a) La serie converge per $|z| < 1$. La somma della serie è $f(z) = \dfrac{1}{1-z}$.

b) $\rho = 1$. La serie converge per $z = -1$ e per $z = i$; diverge per $z = 1$.

c) $\rho = 1$. La serie non converge per nessuno z di modulo 1. La somma della serie è $f(z) = \dfrac{2z-1}{(1-z)^2}$.

d) La serie converge per $|z| > 1$. Non converge per nessuno z di modulo 1. La somma della serie è $f(z) = \dfrac{2}{\sinh(\ln z)}$.

Esercizio 1.2

a) La serie converge per tutti gli $z \in \mathbb{C}$ tali che $|z| \leq 1$.

b) La serie converge per tutti gli $z \in \mathbb{C}$ tali che $|z| \leq \sqrt{3}$.

c) La serie converge per tutti gli $z \in \mathbb{C}$ tali che $|z| \leq 1$.