Soluzioni esercizi del Foglio 4

Esercizio 4.1 Siano $p_1(x) = a_1x^2 + b_1x + c_1$, $p_2(x) = a_2x^2 + b_2x + c_2$, $p_3(x) = a_3x^2 + b_3x + c_3$ elementi di V. Per imporre che formino una base ortonormale per V dobbiamo imporre 6 condizioni sui loro coefficienti:

$$\begin{array}{ccc} \|p_1\|_V = 1, & \|p_2\|_V = 1, & \|p_3\|_V = 1, \\ \langle p_1, p_2\rangle_V = 0, & \langle p_1, p_3\rangle_V = 0, & \langle p_2, p_3\rangle_V = 0. \end{array}$$

Poiché i coefficienti in totale sono 9, possiamo ”scegliere” 3 coefficienti. Una scelta pratica è chiedere che p_1 abbia grado zero (2 condizioni: $a_1 = 0$ e $b_1 = 0$) e che p_2 abbia grado uno (1 condizione: $a_2 = 0$).

Il vantaggio di questa scelta è nel fatto che i primi k polinomi della base che determineremo sono a loro volta una base ortonormale per i polinomi di grado al più $k-1$ definiti sullo stesso intervallo.

Imponendo le 6 condizioni rimanenti si ricavano:

$$p_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad p_2(x) = \sqrt{\frac{2}{3}}x, \qquad p_3(x) = \sqrt{\frac{5}{8}}(-3x^2+1).$$

Esercizio 4.2 Siano $p_1(x) = a_1x^2 + b_1x + c_1$, $p_2(x) = a_2x^2 + b_2x + c_2$, $p_3(x) = a_3x^2 + b_3x + c_3$ elementi di W. Con considerazioni analoghe a quelle fatte per l'esercizio 4.1, cerchiamo una base ortonormale $q_1(x)$, $q_2(x)$, $q_3(x)$ con q_1 di grado zero e q_2 di grado 1. Imponendo le 3 condizioni di ortogonalità e le 3 condizioni sulla norma dei 3 elementi della base troviamo:

$$q_1(x) = 1 \qquad q_2(x) = \sqrt{6}(2x-1), \qquad q_3(x) = \sqrt{\frac{7}{60}}\left(x^2 - x - \frac{1}{6}\right).$$

Esercizio 4.3 Da sistemare.

Esercizio 4.4

a) $$f(x) = -2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}\sin(kx);$$

b) $$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\cos[(2k+1)x];$$

c) $\quad f(x) = \dfrac{4}{\pi} \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{1}{(2k+1)} \sin[(2k+1)x];$

d) $\quad f(x) = 1;$

e) $\quad f(x) = -\dfrac{2}{\pi} \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{1}{(2k+1)^3} \sin[(2k+1)x];$

f) $\quad f(x) = \dfrac{\pi^4}{5} - 48 \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^k}{k^4} \cos(kx);$

h) $\quad f(x) = \dfrac{2}{\pi} \left\{ -\dfrac{1}{a} + \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \dfrac{1}{a^2+k^2} \left(a\cos(kx) + k\sin(kx) \right) \right\};$

Esercizio 4.5

a) $u(x,t) = e^{-t/2} \sin x.$

b) $u(x,t) = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{4}{\pi} \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{e^{-\frac{(2k+1)^2}{4} t}}{(2k+1)^2} \cos[(2k+1)x];$