Soluzioni esercizi del Foglio 3

Esercizio 3.1

a) $y(x) = \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x^2}{2}\right)$

b) $y(x) = 3e^{\cos x} + 2e^{-\cos x}(\cos x - 1)$

c) $y(x) = \sqrt{2x},\ x \geq 0$

d) $y(x) = e^{\left(e^{-x}-1/e\right)}$

e) $y(x) = 3e^{(e^{x^2})}$

Esercizio 3.2

a) $y(x) = e^{-x}(\cos(\sqrt{2}x) + \frac{3}{\sqrt{2}}\sin(\sqrt{2}x))$

b) $y(x) = 1 - \frac{e^{-t}}{3}(2t+5)$

c) La soluzione generale dell'equazione è

$$y(x) = -\frac{1}{x} + \frac{x^5}{5} + c, \qquad \text{con } c = \text{costante},$$

ed è definita solo per $x > 0$ o solo per $x < 0$. Non è possibile imporre le condizioni iniziali e quindi il problema di Cauchy non ha quindi nessuna soluzione!

Esercizio 3.3

a) $y(t) = (t+c)e^t$

b) $y(t) = \frac{t^2-1}{2}e^{t^2} + ce^{-t^2}$

c) $y(t) = -1 + ce^{\frac{\sqrt{x}}{2}}$

d) $y(t) = \left(\frac{t^2}{4} + c_1 + c_2 t\right)e^t$

e) $y(t) = \frac{1}{5}(2\cos(2x) + \sin(2x)) - \frac{1}{2}e^{-t} - t + 1 + ce^t$

f) $y(t) = c\frac{t+1}{t} + \frac{t^2}{2} - 3t + 3\ln|t+1|$

g) $y(t) = \frac{1}{8}t^2 + c_1 + c_2 t + c_3 e^{-t} + c_4 t e^{-t}$

h) $y(t) = \frac{c}{|\cos(x)|}$

i) $y(t) = x + \frac{e^x}{5}(\sin x - 2\cos x) + ce^{-x}$

Esercizio 3.4

$$
\begin{aligned}
&\text{a)} \quad y(t) = c_1 + c_2 t + c_3 t^2 + c_4 e^t + c_5 e^{-t} \\
&\text{b)} \quad y(t) = \pm \frac{2}{3}(2x + c)^{2/3} \\
&\text{c)} \quad y(t) = c_1 + c_2 t + c_3 \cos t + c_4 \sin t + c_5 e^t + c_6 e^{-t} \\
&\text{d)} \quad y(t) = \pm \left[\frac{1}{3c_1} + \left(\frac{c_2}{\sqrt{3c_1}} + 6\sqrt{\frac{c_1}{2}}x \right)^2 \right]^{1/2} \\
&\text{e)} \quad y(t) = c_1 + c_2 t + c_3 t^2 + c_4 t^3 + \frac{t^5}{120} + c_5 e^t + c_6 e^{-t} \\
&\text{f)} \quad y(t) = \arccos(\cos x + c)
\end{aligned}
$$

Esercizio 3.5 Basta seguire il suggerimento dato con il testo dell'esercizio. Una volta trovata la soluzione $y_0(x) = ke^{-A(x)}$ ($A(x)$ è una primitiva di $a(x)$) dell'equazione omogenea, prendiamo spunto da questa per cercare (se ci sono) soluzioni dell'equazione di Bernoulli della forma $y_0(x) = k(x)e^{-A(x)}$. Facendo i calcoli si vede che effettivamente si trovano soluzioni dell'equazione di tale forma e che queste dipendono da un parametro (la costante di integrazione che compare quando si integra $k'(x)$ per determinare $k(x)$. Si verifica infine che tale famiglia costituisce la soluzione generale dell'equazione di Bernoulli. Per maggiori dettagli rimando a: Enrico Giusti - Analisi Matematica vol.2 - Boringhieri.