Esercizi - Foglio 4

4 Spazi di Hilbert e serie di Fourier

Esercizio 4.1 Sia V lo spazio vettoriale dei polinomi di grado minore o uguale a 2, considerati come funzioni definite in $(-1, 1)$. V è uno spazio di Hilbert rispetto al prodotto scalare

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\, dx. \tag{1}$$

Determinare una base ortonormale di V rispetto al prodotto scalare (1).

Esercizio 4.2 Sia W lo spazio vettoriale dei polinomi di grado minore o uguale a 2, considerati come funzioni definite in $(0, 1)$. Determinare una base ortonormale di W rispetto al prodotto scalare

$$\langle f, g\rangle = \int_{0}^{1} f(x)g(x)\, dx.$$

Esercizio 4.3 Dopo aver risolto l'esercizio 4.1, determinare l'elemento di V che meglio approssima in norma $L^2(-1, 1)$ le funzioni seguenti:

a) x^3; b) x^4; c) $\sin(x)$; d) $\cos(x)$;
e) e^x; f) $|x|$;

Esercizio 4.4 Calcolare lo sviluppo in serie di Fourier in $(-\pi, \pi)$ delle funzioni

a) $f(x) = x$; b) $f(x) = |x|$; c) $f(x) = \operatorname{sign}(x)$; d) $f(x) = 1$;
e) $f(x) = x|x|$; f) $f(x) = x^4$; g) $f(x) = xe^x$; h) $f(x) = e^{ax}$;

Esercizio 4.5 Risolvere i problemi di Cauchy:

a) $$\begin{cases} u_{xx} - 2u_t = 0 & (x, t) \in [0, \pi] \times \mathbb{R}^+ \\ u(0, t) = 0 & t > 0 \\ u(\pi, t) = 0 & t > 0 \\ u(x, 0) = \sin(x) & x \in [0, \pi] \end{cases}$$

b) $$\begin{cases} u_{xx} - u_t = 0 & (x, t) \in [0, 2\pi] \times \mathbb{R}^+ \\ u(0, t) = 0 & t > 0 \\ u(2\pi, t) = 0 & t > 0 \\ u(x, 0) = \pi - |\pi - x| & x \in [0, 2\pi] \end{cases}$$