

Esercizi - Foglio 3

3 Equazioni differenziali e problemi di Cauchy

Esercizio 3.1 Risolvere i problemi di Cauchy:

$$\text{a) } \begin{cases} y' = x(y^2 + 1) \\ y(0) = 1 \end{cases} ; \quad \text{c) } \begin{cases} yy' = 1 \\ y(2) = 2 \end{cases} ; \quad \text{e) } \begin{cases} y' = 2xe^{x^2}y \\ y(0) = 3e \end{cases} ;$$

$$\text{b) } \begin{cases} y' + y \sin x = \sin 2x \\ y(\pi/2) = 1 \end{cases} ; \quad \text{d) } \begin{cases} y' = -e^x y \\ y(1) = 1 \end{cases} ;$$

Esercizio 3.2 Risolvere i problemi di Cauchy:

$$\text{a) } \begin{cases} y'' + 2y' + 3y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 2 \end{cases} ; \quad \text{b) } \begin{cases} y''' + 2y'' + y' = 0 \\ y(0) = y'(0) = y''(0) = 1 \end{cases} ; \quad \text{c) } \begin{cases} y' + \frac{y}{x} = x^3 \\ y(0) = \frac{1}{5} \end{cases} ;$$

Esercizio 3.3 Determinare la soluzione generale delle equazioni:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } y' - y = e^t; & \text{d) } y'' - 2y' + y = e^t; & \text{g) } y^{(4)} + 4y''' + 4y'' = 1; \\ \text{b) } y' + 2ty = t + t^3; & \text{e) } y' - y = \sin 2t + e^{-t} + t; & \text{h) } y' = y \tan x; \\ \text{c) } y' = \frac{y+1}{\sqrt{x}}; & \text{f) } y' + \frac{y}{t+t^2} = t-2; & \text{i) } y'' + y - x = e^x \sin x; \end{array}$$

Esercizio 3.4 Determinare la soluzione generale delle equazioni:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } y^{(5)} - 4y''' = 0; & \text{c) } y^{(6)} - y'' = 0; & \text{e) } y^{(6)} - y^{(4)} = x; \\ \text{b) } y'y'' = x; & \text{d) } y^3 y'' = 1; & \text{f) } y' \sin y = \sin x \end{array}$$

Esercizio 3.5 (difficile)

Risolvere l'equazione di Bernoulli: $y' + a(t)y = b(t)y^n$.

*Suggerimento: nonostante l'equazione non sia lineare, risolvere l'equazione omogenea e cercare la soluzione **generale** dell'equazione di Bernoulli con la variazione della costante.*