

Fac-simile seconda prova intercorso

Note: Le domande lasciate in bianco valgono 0 punti, le risposte sbagliate -1 , quelle corrette il valore specificato accanto alla domanda. Se non specificato, il valore è 3 punti.

La domanda indicata con **PRE** (prerequisiti) vale -1 , -2 , 3 punti rispettivamente.

Il compito sarà composto da 11 o 12 domande per un valore totale di $38 - 40$ punti. Per la sufficienza sono richiesti 18 punti.

Domanda 1. Quale delle funzioni seguenti non è ortogonale a $\frac{1}{1+x^4}$ in $L^2(-1, 1)$?

1. x^3
2. 1
3. x
4. $\sin x$

Domanda 2. Tra tutte le funzioni del tipo $ax + b$ determinare la funzione $f(x)$ che meglio approssima $1 - x^2$ nel senso dei minimi quadrati in $[0, 1]$?

1. $f(x) = 2/3$
2. $f(x) = 1 - x$
3. $f(x) = \frac{2}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4}x$
4. $f(x) = 1 - \frac{\sqrt{3}}{4}x$

Domanda 3. Calcolare il coefficiente di e^{-2ix} nello sviluppo in serie di Fourier della funzione $x + e^x$ sviluppata in $[-\pi, \pi]$.

1. $\frac{1}{2i} + \frac{2}{1+2i} \sinh(\pi)$
2. $\frac{2}{1+2i} \sinh(\pi)$
3. $-\frac{1}{2i} + \frac{2}{1-2i} \sinh(\pi)$
4. 0

Domanda 4. Sia $f(x) = 1 + x^3$. Quale delle affermazioni seguenti è esatta?

1. Non è possibile sviluppare $f(x)$ in serie di Fourier in $[-\pi, \pi]$.
2. $f(x) - 1$ può essere sviluppata in serie di soli seni in $[-\pi, \pi]$.

3. $f(x) - 1$ può essere sviluppata in serie di soli coseni in $[-\pi, \pi]$.

4. Il coefficiente di $\cos(59x)$ nello sviluppo in serie di Fourier di $f(x)$ in $[-\pi, \pi]$ vale $\frac{(-1)^{59}}{(1+59^2)^3}$.

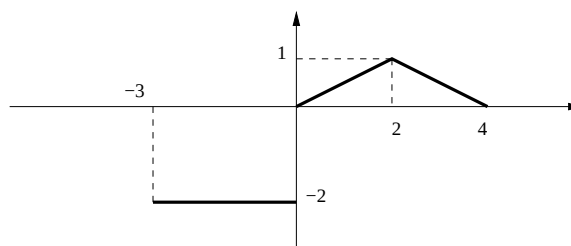
Domanda 5. Calcolare lo sviluppo in serie di Fourier in $[-\pi, \pi]$ della funzione $f(x) = \sin^2 x$

1. $f(x) = 2 \sin x \cos x$
2. $f(x) = \sin^2 x$
3. $f(x) = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$
4. $f(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$

Domanda 6. (5 punti) Calcolare la trasformata di Fourier di $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

1. $\hat{f}(\xi) = \pi e^{-\xi}$
2. $\hat{f}(\xi) = \pi e^{\xi}$
3. $\hat{f}(\xi) = \frac{1}{2i} e^{-|\xi|}$
4. $\hat{f}(\xi) = \pi e^{-|\xi|}$

Domanda 7. (4 punti) Calcolare la trasformata di Fourier della funzione in figura:



$$1. -\frac{4}{\xi} e^{\frac{3}{2}i\xi} \sin\left(\frac{3}{2}\xi\right) + \frac{2}{\xi} e^{i\xi} \sin \xi - \frac{2}{\xi} e^{3i\xi} \sin \xi$$

2. $-\frac{4}{\xi} e^{\frac{3}{2}i\xi} \sin\left(\frac{2}{3}\xi\right) - \frac{4}{\xi^2} e^{2i\xi} \sin^2 \xi$
3. $-\frac{4}{\xi} e^{\frac{3}{2}i\xi} \sin\left(\frac{3}{2}\xi\right) + \frac{2}{\xi^2} e^{-2i\xi} \sin^2 \xi$
4. $\frac{4}{\xi} e^{\frac{3}{2}i\xi} \sin\left(\frac{2}{3}\xi\right) + \frac{4}{\xi^2} e^{2i\xi} \sin^2 \xi$

Domanda 8. Se $\widehat{f}(\xi)$ è la trasformata di Fourier di $f(x)$, allora la trasformata di $e^{ix} f(x-2)$ è:

1. $e^{-2\xi+2} \widehat{f}(\xi-1)$
2. $e^{-i(\xi+1)} \widehat{f}(\xi-2)$
3. $e^{-2i(\xi-1)} \widehat{f}(\xi-1)$
4. $\widehat{f}(e^{-2i\xi}-1)$

Domanda 9. Quale tra le trasformate seguenti proviene da una funzione derivabile 3 volte?

1. $\frac{1}{1+\xi^2}$
2. $\frac{\xi^2}{(1+\xi^2)^2}$
3. $\frac{\sin(\xi)}{(1+\xi^2)^2}$
4. $\frac{e^{-3\xi i}}{1+\xi^3}$

Domanda 10. Quale delle funzioni seguenti non può essere la trasformata di Fourier di una funzione $L^1(\mathbb{R})$?

1. $\frac{2}{\xi} \sin(\xi)$
2. $\frac{\sin(\xi^2)}{2\xi}$
3. $\frac{\xi^2}{1+\xi^2}$
4. $\frac{e^{-|\xi|}}{1+\xi^{-2}}$

Domanda 11. Se $\widehat{y}(\xi)$ è la trasformata di Fourier di $y(x)$, quale tra le funzioni seguenti è la trasformata di Fourier di $((y'' + 2y' + y) * \chi_{[-1,1]})(x)$?

1. $\frac{2 \sin(\xi)}{\xi} \widehat{y}(\xi)$
2. $\frac{2 \sin(\xi)}{1+i\xi^2} \widehat{y}(\xi)$
3. $\frac{2 \sin(\xi)}{\xi} (1+\xi)^2 \widehat{y}(\xi)$
4. $\frac{2 \sin(\xi)}{\xi} (1+i\xi)^2 \widehat{y}(\xi)$