

Fac-simile prima prova intercorso

Note: Le domande lasciate in bianco valgono 0 punti, le risposte sbagliate -1 , quelle corrette il valore specificato accanto alla domanda. Se non specificato, il valore è 3 punti.

La domanda indicata con **PRE** (prerequisiti) vale -1 , -2 , 3 punti rispettivamente.

Il compito sarà composto da 12 domande per un valore totale di 38 punti. Per la sufficienza sono richiesti 18 punti.

Domanda 1. PRE: In quale caso può non valere l'uguaglianza $\sum(a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$?

1. Quando $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergono entrambe.
2. Quando $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ è divergente e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge.
3. Quando entrambe le serie sono a termini positivi.
4. Quando le serie sono entrambe a termini negativi.

Domanda 2. Quanto vale $\cosh(-i)$?

1. 1
2. $\sin(\pi/2 - 1)$
3. πi
4. $\cos(i)$

Domanda 3. L'equazione sui complessi $4|z|^3 = z^2$,

1. Non ammette soluzioni reali.
2. Ha esattamente 2 soluzioni opposte.
3. Ha 3 soluzioni la cui somma fa zero.
4. Le uniche soluzioni sono immaginarie pure.

Domanda 4. Se $z = x + iy$ ed $f(z) = ax^2 + bxy + ic(y^2 - x^2)$, sotto quali condizioni su $a, b \in \mathbb{R}$ f è olomorfa?

1. $a = b = 0, \quad c = 1$
2. $c = 2b, \quad a = 0$
3. $b = 2c, \quad a = 0$
4. $a = c, \quad b = 0$

Domanda 5. Se S è la somma dei residui di $f(z) = \frac{z^2 + 1}{z^2(z - i)}$ nei suoi poli,

1. f ha due poli ed $S = 0$.
2. f ha un polo di ordine 1 ed $S = 2\pi i$
3. f ha un polo di ordine 2 ed $S = 1$
4. f ha un polo di ordine 2, uno di ordine 1 ed $S = 1$

Domanda 6. Calcolare $I = \int_{|z|=1} \frac{dz}{z^3(z + i)}$.

1. $I = i$
2. f ha una singolarità e l'integrale non converge.
3. $I = -2\pi$
4. $I = 2\pi$

Domanda 7. Sapendo che f_1 ed f_2 sono soluzioni dell'equazione $y'' + y = e^x$ allora,

1. $f_1 + f_2$ è soluzione di $y'' + y = e^x$
2. $f_1 + f_2$ è soluzione di $y'' + y = e^{2x}$
3. $f_1 + f_2$ è soluzione di $y'' + y = 2e^x$
4. $f_1 + f_2 = 0$

Domanda 8. (4 punti) Data l'equazione differenziale $y' + xy - x = 0$. Allora:

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ per ogni $f(x)$ soluzione dell'equazione.
2. Non ammette soluzioni costanti.
3. Non esistono soluzioni tali che $y(0) = 0$.
4. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 1$ per ogni $f(x)$ soluzione dell'equazione.

Domanda 9. Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - y = 0 \\ y(0) = x_0 \\ y'(0) = x_1 \end{cases} ,$$

come vanno scelti x_0 ed x_1 perché la soluzione tenda a zero per $x \rightarrow \infty$?

1. $x_0 = x_1$
2. $x_0 = -x_1$
3. $x_0 + x_1 = 1$

4. $x_0 = 0$

Domanda 10. Quale delle equazioni seguenti ammette soluzioni costanti?

1. $y'' + y = e^t$
2. $y'/y = (y^2 - 7)e^y$
3. $yy'' = 1$
4. $(y^2 + 1) \cos x + ((y')^2 + 1) \sin x = 0$

Domanda 11. (4 punti) Data l'equazione $y' + t^2y = e^t(1 + t^2)$, quale delle affermazioni seguenti è vera?

1. Per tutte le soluzioni y si ha $\lim_{x \rightarrow -\infty} |y(x)| = \infty$
2. Esistono soluzioni $y(x)$ tali che $\lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) = 0$
3. Esistono soluzioni $y(x)$ tali che $\lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) = 1$
4. Esistono soluzioni $y(x)$ tali che $\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = 0$