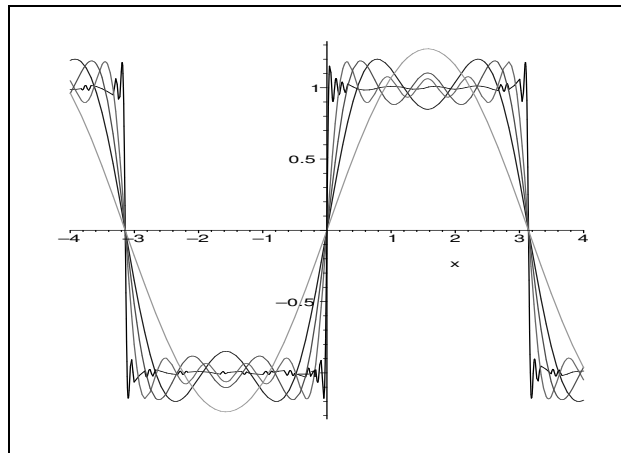


UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI FIRENZE

Versione 0.5

Francesco Mugelli

METODI MATEMATICI PER L'INGEGNERIA DELL'INFORMAZIONE



FIRENZE - 22 APRILE 2003

Capitolo 1

Analisi complessa

1.1 Introduzione

Il primo gradino nello studio dei numeri è l'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali in cui è sempre definita la somma di due numeri ma non sempre è possibile definire l'operazione inversa della somma ovvero la sottrazione.

L'insieme dei $\mathbb{Z}$ dei numeri interi, positivi e negativi, è un ampliamento di $\mathbb{N}$ in cui somma e sottrazione di due elementi sono sempre possibili. È sempre definito anche il prodotto fra due elementi di $\mathbb{Z}$ ma non sempre siamo in grado di invertire la moltiplicazione.

Sono stati introdotti quindi altri ampliamenti dell'insieme dei numeri come ad esempio i razionali $\mathbb{Q}$ (in cui se il divisore è diverso da zero è sempre possibile calcolare il rapporto tra due numeri ma non sempre si può invertire l'elevamento a potenza, ovvero espressioni come $\sqrt{2}$ o $\log_2 7$ non hanno significato in $\mathbb{Q}$).

È probabile che il più grande ampliamento dell'insieme dei numeri a voi noto sia l'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali. Anch'esso ha comunque dei limiti dal punto di vista computazionale, ad esempio non hanno senso $\sqrt{-2}$ o $\log_2(-7)$.

Perché siano sempre definite le inverse degli elevamenti a potenza (cioè radici e logaritmi) è necessario ampliare ulteriormente l'insieme dei numeri. L'ampliamento di $\mathbb{R}$ che fa al caso nostro è l'insieme dei *numeri complessi*.

1.2 Soluzione algebrica delle equazioni di terzo grado

La necessità di ampliare ulteriormente l'insieme dei numeri era sicuramente sentita da Niccolò Tartaglia che nel 1535 riuscì a risolvere per via algebrica le equazioni di terzo grado.

La generica equazione di terzo grado è del tipo $ay^3 + by^2 + cy + d = 0$ ($a \neq 0$) ma mediante il cambio di incognita $y = x - b/(3a)$ può sempre essere scritta nella forma

$$x^3 + px + q = 0, \tag{1.1}$$

dove p e q sono espressioni dei coefficienti a, b, c, d .

L'idea di Tartaglia è di introdurre due variabili ausiliarie u e v tali che $x = u + v$. In questo modo, $x^3 = (u + v)^3 = u^3 + v^3 + 3uv(u + v) = (u^3 + v^3) + 3uvx$, ovvero

$$x^3 - (3uv)x - (u^3 + v^3) = 0.$$

Se confrontiamo quest'ultima con la (1.1) si vede subito che una possibile scelta per u e v è:

$$\begin{cases} -3uv = p \\ -(u^3 + v^3) = q \end{cases} \quad (1.2)$$

In altri termini, per determinare u e v (e quindi $x = u + v$) dobbiamo risolvere il sistema simmetrico (1.2) (cfr. un qualsiasi testo per il secondo anno della scuola superiore). Le soluzioni sono $(u_1^3, v_1^3) = (t_1, t_2)$ e $(u_2^3, v_2^3) = (t_2, t_1)$, dove

$$t_{1,2} = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

sono le radici della risolvente $t^2 + qt - p^3/27 = 0$ del sistema. Da entrambe le soluzioni del sistema si ottiene lo stesso valore di $x = u + v$, cioè:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \quad (1.3)$$

Abbiamo risolto l'equazione ma la formula (1.3) fornisce al più una soluzione e non tutte.

ESEMPIO 1.1 Consideriamo l'equazione $y^3 - 6y^2 + 11y - 6 = 0$; si verifica facilmente che può essere scritta $(y-1)(y-2)(y-3) = 0$, ovvero che ha 3 soluzioni reali $y = 1, 2, 3$.

Facendo i calcoli per utilizzare la (1.3) ci si accorge però che

$$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0.$$

La formula (1.3) non fornisce quindi nessuna soluzione mentre invece sappiamo che l'equazione ne ammette tre reali.

Tartaglia non riuscì a superare questo problema. Ebbe successo invece Gerolamo Cardano qualche tempo dopo introducendo delle nuove quantità che oggi chiameremo numeri complessi e attribuendo un significato a ciascuna delle 2 radici nella (1.3) anche nel caso in cui il radicando è negativo. Si hanno 3 valori distinti per ciascuna delle 2 radici; t_1 e t_2 possono essere combinati in 9 modi ottenendo 3 valori distinti per la somma $u + v$ e quindi 3 soluzioni per l'equazione di partenza.

A Cardano si deve anche la notazione usata a tutt'oggi per i numeri complessi.

1.3 Aritmetica complessa

Definiamo **unità immaginaria** quella quantità i tale che $i^2 = -1$, ovvero quella quantità che soddisfa l'equazione $x^2 + 1 = 0$. In altre parole si potrebbe dire che $i = \sqrt{-1}$.

Possiamo utilizzare la definizione appena data per calcolare le radici quadrate dei numeri negativi, ad esempio, $\sqrt{-4} = \sqrt{(-1) \cdot 4} = i(\pm 2) = \pm 2i$

Definiamo poi **numeri complessi** tutte le espressioni del tipo $a + ib$ con $a, b \in \mathbb{R}$ e indichiamo con $\mathbb{C}$ l'insieme di tutti i numeri complessi. Se $z = a + ib \in \mathbb{C}$ i *numeri reali* a e b si chiamano rispettivamente **parte reale** e **parte immaginaria** di z e si indicano con $\operatorname{Re}(z)$ e $\operatorname{Im}(z)$.

Volendo essere rigorosi, dovremo definire il significato del simbolo “+” nella notazione “ $a + ib$ ” dato che non sta a indicare la somma a cui siamo abituati. Non definiremo formalmente il suo significato ma, per fissare le idee lo si può pensare come una somma tra due

vettori ortogonali di lunghezze $|a|$ e $|b|$ rispettivamente. Dal punto di vista computazionale possiamo comunque trattarlo come una somma usuale.

Siano $z_1 = a_1 + ib_1$ e $z_2 = a_2 + ib_2$ due numeri complessi, definiamo alcune operazioni tra complessi:

- *Somma di due numeri complessi*

Se $z = z_1 + z_2$, definiamo $z = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$.

Per la somma di numeri complessi valgono le proprietà associative e commutativa.

- *Prodotto di due numeri complessi*

Se $z = z_1 z_2$, definiamo $z = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + a_2 b_1)$. In pratica trattiamo z_1 e z_2 come binomi e ne facciamo il prodotto tenendo conto però che $i^2 = -1$.

Per il prodotto di numeri complessi valgono le proprietà associative e commutativa.

- *Coniugato di un numero complesso*

Se $z = a + ib$, si dice **coniugato** di z e si indica con $\bar{z}$ la quantità $a - ib$. In alcuni testi tecnici il coniugato di z è indicato con z^* .

Si osservi che $\operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}(\bar{z})$ e $\operatorname{Im}(z) = -\operatorname{Im}(\bar{z})$, quindi $\operatorname{Re}(z) = (z + \bar{z})/2$ e $\operatorname{Im}(z) = (z - \bar{z})/2i$. Infine, $\overline{\bar{z}} = z$.

- *Modulo di un numero complesso*

Se $z = a + ib$, si dice **modulo** di z la quantità $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Il parallelismo con la norma del vettore (a, b) è evidente. Inoltre $|z|^2 = z\bar{z}$.

- *Quoziente di numeri complessi*

Per prima cosa calcoliamo il reciproco di un numero complesso. Siano $z_1 \neq 0$. Allora

$$\frac{1}{z_1} = \frac{\bar{z}_1}{z_1 \bar{z}_1} = \frac{\bar{z}_1}{|z_1|^2} = \frac{a_1 - ib_1}{a_1^2 + b_1^2}$$

Più in generale,

$$\frac{z_2}{z_1} = z_2 \frac{\bar{z}_1}{|z_1|^2} = \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + i(a_1 b_2 - b_1 a_2)}{a_1^2 + b_1^2}$$

Somma e prodotto godono delle stesse proprietà delle corrispondenti operazioni nel campo reale (prop. commutativa, associativa, distributiva). Inoltre si verifica facilmente che:

$$\text{i) } \overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2, \quad \overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$$

$$\text{ii) } |z| \geq 0 \text{ per ogni } z \in \mathbb{C} \text{ e } |z| = 0 \text{ se e solo se } z = 0.$$

$$\text{iii) } |z| = |\bar{z}|, \quad |z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|, \quad |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \quad (\text{disug. triangolare})$$

$$\text{iv) } |\operatorname{Re}(z)| \leq |z| \leq |\operatorname{Re}(z)| + |\operatorname{Im}(z)|, \quad |\operatorname{Im}(z)| \leq |z| \leq |\operatorname{Re}(z)| + |\operatorname{Im}(z)|$$

1.4 Rappresentazioni cartesiana e polare

Abbiamo già avuto modo di osservare che ad un numero complesso $z = a + ib \in \mathbb{C}$ è possibile associare il punto del piano cartesiano di coordinate (a, b) o, equivalentemente, il vettore che congiunge il punto (a, b) all'origine. Questo modo di scrivere e visualizzare i numeri complessi prende il nome di **rappresentazione cartesiana**, dato che usa un sistema di coordinate cartesiane per il piano.

Utilizzando la rappresentazione cartesiana, si possono rappresentare facilmente le operazioni di coniugio e di somma di due numeri complessi (vedi figura 1.1). La prima corrisponde ad una simmetria rispetto all'asse reale, la seconda alla somma di due vettori fatta con la regola del parallelogramma. La parte reale e la parte immaginaria di z non sono altro che le componenti del vettore (a, b) in questo sistema di riferimento.

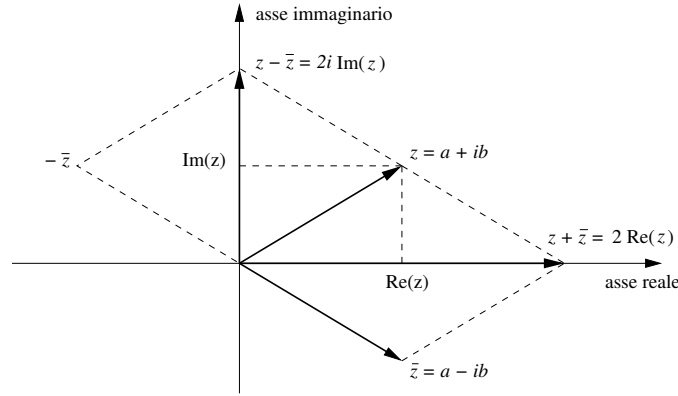


Figura 1.1 Rappresentazione cartesiana di coniugato, parte reale e parte immaginaria di un numero complesso.

Le coordinate cartesiane però non sono l'unico sistema di coordinate possibile per il piano complesso. La **rappresentazione polare** è il modo di rappresentare i numeri complessi a partire dalle coordinate polari. In coordinate polari il punto P che rappresenta il numero complesso z , è individuato dalle coordinate ρ e ϑ : $P = (a, b) = (\rho \cos \vartheta, \rho \sin \vartheta)$ ovvero $z = \rho(\cos \vartheta + i \sin \vartheta)$. L'angolo ϑ si chiama **argomento** di z (in alcuni testi tecnici viene chiamato anche *fase*).

Per passare dalla notazione cartesiana alla polare o viceversa valgono le uguaglianze seguenti:

$$\begin{cases} a = \rho \cos \vartheta \\ b = \rho \sin \vartheta \end{cases}$$

$$\begin{cases} \rho = |P - O| = \sqrt{a^2 + b^2} = |z| \\ \cos(\arg z) = \frac{a}{|z|} \\ \sin(\arg z) = \frac{b}{|z|} \end{cases}$$

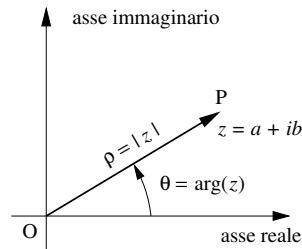


Figura 1.2 Rappresentazione polare di un numero complesso

Più semplicemente, se $a > 0$, $\arg(z) = \arctan(b/a)$. Graficamente (fig 1.2), $\arg(z)$ è l'angolo formato dal segmento $P-O$ con il semiasse reale positivo. Essendo un angolo, $\arg(z)$ è definito a meno di multipli di 2π :

$$z = \rho(\cos \vartheta + i \sin \vartheta) = \rho(\cos(\vartheta + 2k\pi) + i \sin(\vartheta + 2k\pi));$$

Come intervallo di definizione di $\vartheta = \arg(z)$ possiamo prendere un qualunque intervallo di ampiezza 2π . Salvo diverso avviso, nel seguito considereremo $\vartheta = \arg(z) \in [-\pi, \pi)$.

In notazione polare il coniugio corrisponde al cambio di segno dell'argomento. La polare è una notazione poco adatta per calcolare le somme ma bene si presta per moltiplicazioni, divisioni e potenze. Siano $z_1 = \rho_1(\cos \vartheta_1 + i \sin \vartheta_1)$ e $z_2 = \rho_2(\cos \vartheta_2 + i \sin \vartheta_2)$,

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= \rho_1 \rho_2 (\cos \vartheta_1 + i \sin \vartheta_1)(\cos \vartheta_2 + i \sin \vartheta_2) = \\ &= \rho_1 \rho_2 ((\cos \vartheta_1 \cos \vartheta_2 - \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2) + i(\cos \vartheta_1 \sin \vartheta_2 + \cos \vartheta_2 \sin \vartheta_1)) = \\ &= \rho_1 \rho_2 (\cos(\vartheta_1 + \vartheta_2) + i \sin(\vartheta_1 + \vartheta_2)) \end{aligned}$$

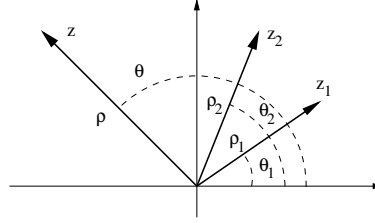


Figura 1.3 Prodotto di numeri complessi in rappresentazione polare.

$$z = z_1 \cdot z_2, \quad \rho = \rho_1 \rho_2, \quad \vartheta = \vartheta_1 + \vartheta_2.$$

Analogamente, se $z_2 \neq 0$,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} (\cos(\vartheta_1 - \vartheta_2) + i \sin(\vartheta_1 - \vartheta_2))$$

Dalle uguaglianze precedenti segue che

$$|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|, \quad \arg(z_1 z_2) \text{ "}" \arg(z_1) + \arg(z_2)$$

e

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) \text{ "}" \arg(z_1) - \arg(z_2)$$

dove con “=” si intende che al valore ottenuto andrà eventualmente sommato o sottratto 2π se vogliamo che l'argomento appartenga a $[-\pi, \pi]$ (formalmente avremo dovuto scrivere, ad esempio, $\arg(z_1 z_2) = [\arg(z_1) + \arg(z_2)] \bmod{2\pi - \pi}$).

Se $z_1 = z_2 = z$, in particolare otteniamo $z^2 = \rho^2(\cos(2\vartheta) + i \sin(2\vartheta))$; generalizzando ad un'esponente qualsiasi,

$$z^n = \rho^n (\cos(n\vartheta) + i \sin(n\vartheta)) \tag{1.4}$$

ci permette di calcolare le potenze (con esponente intero) di z .

1.5 Radici di un numero complesso

La formula (1.4) può essere utilizzata per definire le radici n -esime di un numero complesso: $w = \sqrt[n]{z}$ è definito come quel numero tale che $w^n = z$.

Siano $z = \rho_1(\cos \vartheta_1 + i \sin \vartheta_1)$, $w = \rho_2(\cos \vartheta_2 + i \sin \vartheta_2)$, allora, ricordando che ϑ è definito a meno di multipli interi di 2π ,

$$w^n = \rho_2^n (\cos(n\vartheta_2) + i \sin(n\vartheta_2)) = \rho_1 (\cos(\vartheta_1 + 2k\pi) + i \sin(\vartheta_1 + 2k\pi)).$$

Confrontando le espressioni si ricava:

$$\rho_2 = \rho_1^{1/n}, \quad \vartheta_2 = \frac{\vartheta_1 + 2k\pi}{n} = \frac{\vartheta_1}{n} + \frac{2k}{n}\pi.$$

Abbiamo n valori distinti per ϑ_2 corrispondenti a $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$. Per $k = n$ otteniamo lo stesso valore che per $k = 0$:

$$w_k = \rho^{1/n} \left(\cos \left(\frac{\vartheta_i + 2k\pi}{n} \right) + i \sin \left(\frac{\vartheta_i + 2k\pi}{n} \right) \right), \quad k = 0, 1, \dots, n-1. \quad (1.5)$$

La radice n -esima di un numero complesso ha sempre esattamente n valori distinti che hanno tutti lo stesso modulo ed argomenti equidistanti. Se disegniamo gli n valori sul piano complesso e li congiungiamo fra loro con dei segmenti otteniamo un poligono regolare di n lati centrato nell'origine.

ESEMPIO 1.2 Calcoliamo i valori di $\sqrt[6]{i-1}$ e rappresentiamole nel piano complesso. Scriviamo $i-1$ in forma trigonometrica o in forma esponenziale:

$$i-1 = \sqrt{2} \left(\cos \left(\frac{3}{4}\pi \right) + i \sin \left(\frac{3}{4}\pi \right) \right) = \sqrt{2} e^{\frac{3}{4}\pi i}$$

Dalla (1.5) si ha:

$$w_k = \sqrt[12]{2} e^{\frac{\pi}{8}i} (e^{\frac{\pi}{3}i})^k, \quad k = 0, 1, \dots, 5.$$

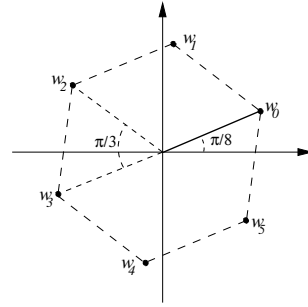


Figura 1.4 Radici seste di $i-1$.

Interpretando i numeri complessi come vettori del piano, la moltiplicazione per $e^{i\vartheta}$ corrisponde ad una rotazione del vettore di un angolo ϑ .

Per disegnare i valori ottenuti sarà sufficiente disegnarne uno ed ottenere gli altri per rotazioni successive di $\pi/3$ di questo. Si ottiene il diagramma in figura 1.4.

1.6 Funzioni trascendenti di un numero complesso

1.6.1 Esponenziale e logaritmo in $\mathbb{C}$

Ricordiamo lo sviluppo in serie di Taylor delle funzioni trigonometriche e dell'esponenziale reale:

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}. \quad (1.6)$$

Le tre serie convergono per ogni $x \in \mathbb{R}$ ed hanno una struttura molto simile. Sostituendo $-1 = i^2$ nelle serie di seno e coseno possiamo scrivere:

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} i^{2n} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{1}{i} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} i^{2n} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^{2n}}{(2n)!}.$$

Sommando,

$$\cos x + i \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!} \quad (1.7)$$

La serie (1.7) ha forti somiglianze con lo sviluppo di e^x tanto da suggerire di chiamare e^{ix} la sua somma.

Definiamo allora

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (1.8)$$

Resta da dare un significato a e^z nel caso in cui z sia un generico numero complesso e non immaginario puro. Estendiamo la definizione 1.8 in modo che continuino a valere le proprietà delle potenze: sia $z = a + ib$, definiamo

$$e^z = e^{a+ib} = e^a \cdot e^{ib} = e^a (\cos b + i \sin b). \quad (1.9)$$

Si osservi che se $b = 0$ (cioè se $z \in \mathbb{R}$) la definizione coincide con quella dell'esponenziale reale, ovvero abbiamo esteso il significato dell'esponenziale già nota. Inoltre,

$$|e^{ib}| = |\cos b + i \sin b| = 1 \quad \text{e} \quad |e^z| = e^{\operatorname{Re} z}$$

Fin'ora ci siamo occupati delle somiglianze tra esponenziale reale e complessa. Esaminiamo ora due importanti differenze tra i 2 casi:

- Nel caso complesso non è più vero che $e^z > 0$ e neppure che $\operatorname{Re}(e^z) > 0$; ad esempio $e^{\pi i} = -1$.
- L'esponenziale complessa è una funzione periodica di periodo $2\pi i$. Infatti

$$\begin{aligned} e^{z+2\pi i} &= e^{\operatorname{Re} z} (\cos(\operatorname{Im} z + 2\pi) + i \sin(\operatorname{Im} z + 2\pi)) = \\ &= e^{\operatorname{Re} z} (\cos \operatorname{Im} z + i \sin \operatorname{Im} z) = e^z, \quad \forall z \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Prima di passare a definire i logaritmi, osserviamo che possiamo rappresentare i numeri complessi anche utilizzando l'esponenziale. Se $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ è sempre possibile trovare uno $z \in \mathbb{C}$ tale che $w = e^z$. Se $w = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ è l'espressione di w in forma polare, è sempre definito $a = \log \rho$ e quindi $w = e^a(\cos \varphi + i \sin \varphi) = e^{a+i\varphi}$. Questo modo di scrivere i numeri complessi si chiama **rappresentazione esponenziale** e può risultare comoda per fare calcoli o risolvere equazioni.

A questo punto siamo pronti per definire il **logaritmo** di w come quel numero (o quei numeri) z tale che $e^z = w$. Il valore $a + i\varphi$ scritto sopra è un logaritmo di w ma non è l'unica soluzione di $e^z = w$. Se teniamo conto della periodicità di e^z , ci accorgiamo che tutti i numeri della forma $a + i\varphi + 2k\pi i$, per $k \in \mathbb{Z}$ sono logaritmi di w .

In definitiva, se $z = a + ib$

$$\begin{aligned} e^z &= e^a (\cos b + i \sin b) \\ \log(z) &= \log(|z|) + i \arg(z) + 2k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z} \end{aligned} \quad (1.10)$$

Il logaritmo di un numero complesso ha allora infiniti valori distinti. Il logaritmo non è una funzione nel senso classico del termine. È una funzione multivalore. Se fissiamo un valore di k una volta per tutte (cioè scegliamo quella che si chiama una **determinazione** del logaritmo), $\log(z)$ diventa una funzione vera e propria. Salvo diverso avviso sottintenderemo la scelta $k = 0$.

1.6.2 Funzioni trigonometriche e iperboliche in $\mathbb{C}$

Nel campo complesso ci sono delle relazioni che legano tra loro esponenziali, funzioni trigonometriche e iperboliche: da $e^{ib} = \cos b + i \sin b$ e $e^{-ib} = \cos b - i \sin b$ possiamo ricavare $\sin b$ e $\cos b$ sommando e sottraendo membro a membro:

$$\cos b = \frac{e^{ib} + e^{-ib}}{2}, \quad \sin b = \frac{e^{ib} - e^{-ib}}{2i} \quad (1.11)$$

Si nota una forte somiglianza con le funzioni iperboliche:

$$\cosh b = \frac{e^b + e^{-b}}{2}, \quad \sinh b = \frac{e^b - e^{-b}}{2}. \quad (1.12)$$

Nelle (1.11), b è la parte immaginaria di un numero complesso ovvero è un numero reale. Le (1.12) invece sono le definizioni delle funzioni iperboliche reali.

A partire da queste 4 uguaglianze, possiamo definire le funzioni trigonometriche e iperboliche di un numero complesso: se $z \in \mathbb{C}$, poniamo

$$\begin{aligned} \cos z &= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, & \sin z &= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \\ \cosh z &= \frac{e^z + e^{-z}}{2}, & \sinh z &= \frac{e^z - e^{-z}}{2}. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Le definizioni (1.13) si possono anche giustificare a partire dagli sviluppi in serie (1.24) e da

$$\sinh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \cosh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

con considerazioni analoghe a quanto fatto per giustificare la definizione di e^z . Inoltre si osservi che se $z \in \mathbb{R}$, le (1.13) coincidono con le definizioni date per i reali. Continuano a valere tutte le formule trigonometriche e iperboliche dimostrate per i numeri reali. Osserviamo infine il legame tra funzioni trigonometriche e iperboliche:

$$\cosh(iz) = \cos z \quad \text{e} \quad \sinh(iz) = i \sin z.$$

1.7 Funzioni olomorfe

Sia $A \subset \mathbb{C}$ e sia $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione a valori complessi. Se $z = x + iy$, esistono due funzioni $u(x + iy) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ e $v(x + iy) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tali che $f(z) = f(x + iy) = u(x + iy) + iv(x + iy)$; in altre parole, $u(z) = \operatorname{Re} f(z)$, $v(z) = \operatorname{Im} f(z)$. Per alcuni aspetti, una funzione $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ può essere interpretata come una funzione da $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^2$.

Le definizioni di limite e di continuità di f sono ereditate da quelle di $\mathbb{R}^2$, quindi:

DEFINIZIONE 1.1 Sia $f : A \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ e sia $z_0 \in A$. Diciamo che $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w$, $w \in \mathbb{C}$, se $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ t.c. $|z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - w| < \varepsilon$

DEFINIZIONE 1.2 Sia $f : A \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. Diciamo che f è **continua** in $z_0 \in A$ se esiste il $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ e si ha $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$.

Sostituendo a z la coppia (x, y) , la definizione di limite appena data coincide esattamente con quella per $\mathbb{R}^2$. La stessa considerazione vale anche per la definizione di continuità.

Si noti che $f : A \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ è continua se e solo se sono continue le funzioni da $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}$ $u(z) = \operatorname{Re} f(z)$ e $v(z) = \operatorname{Im} f(z)$.

Continuano a valere i teoremi sui limiti già visti per $\mathbb{R}$ e per $\mathbb{R}^2$. Ad esempio il limite della somma è sempre la somma dei limiti ecc. ecc.

Le analogie col caso reale cessano quando si parla di derivabilità:

DEFINIZIONE 1.3 Sia $f : A \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. Diciamo che f è **derivabile** in senso complesso (o anche che f è **olomorfa**) in $z_0 \in A$ se esiste finito il limite

$$\ell = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

In tal caso ℓ si dice derivata di f in z_0 e si indica con $f'(z_0)$.

Equivalentemente, possiamo scrivere anche $f'(z_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$. Bisogna ricordarsi però che $h \in \mathbb{C}$ e che non possiamo limitarci ad incrementi h reali. Se cerchiamo un parallelismo col caso reale, è più appropriato il confronto con la differenziabilità che con la derivabilità. Anche nel caso complesso la derivabilità implica la continuità.

Teorema 1.1 Condizioni di Cauchy-Riemann Sia $f(z) = u(z) + iv(z)$ una funzione da $\mathbb{C}$ in $\mathbb{C}$, e sia $z = x + iy$. La funzione f è differenziabile in z (derivabile in senso complesso) se e solo se le funzioni u e v sono differenziabili in senso reale nel punto (x, y) e soddisfano le condizioni

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \quad (1.14)$$

OSSERVAZIONE 1.1 Le condizioni (1.14) si dicono *condizioni di Cauchy-Riemann*; a volte si trovano scritte nella forma

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{i} \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Verificare per esercizio che le due notazioni sono equivalenti.

Dimostrazione del teorema 1.1. Scegliamo un incremento h reale, $h = t + 0i$, e calcoliamo il rapporto incrementale di f :

$$f'(z) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(z+t) - f(z)}{t} = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}$$

D'altra parte, se scegliamo un incremento immaginario puro $h = 0 + it$,

$$f'(z) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(z+it) - f(z)}{it} = \frac{1}{i} \frac{\partial f}{\partial y} = -i \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Dall'ipotesi di derivabilità di f in senso complesso le due espressioni ottenute per $f'(z)$ devono essere uguali e quindi:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = -i \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Separando parte reale e parte immaginaria nell'uguaglianza precedente si trovano le (1.14).

La differenziabilità di f segue facilmente dalla derivabilità di f in senso complesso e da $df = du + i dv$.

Viceversa, supponiamo che valgano le (1.14) e che u e v siano differenziabili in senso reale. Allora:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + A, \quad dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy + B.$$

con $A = \alpha_1 dx + \alpha_2 dy$ e $B = \beta_1 dx + \beta_2 dy$ e $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \rightarrow 0$ quando $dx, dy \rightarrow 0$ (dalla definizione di differenziale per le funzioni reali).

Per le condizioni di Cauchy-Riemann si ha:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx - \frac{\partial v}{\partial x} dy + A, \quad dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy + B.$$

cioè

$$df = du + i dv = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right) dz + \varepsilon dz,$$

dove $\varepsilon = (\alpha_1 + i\beta_1) \frac{dx}{dz} + (\alpha_2 + i\beta_2) \frac{dy}{dz}$. Ma $|\varepsilon| \leq |\alpha_1| + |\alpha_2| + |\beta_1| + |\beta_2| \rightarrow 0$ quando $dz \rightarrow 0$. Quindi il limite

$$f'(z) = \lim_{dz \rightarrow 0} \frac{f(z+dz) - f(z)}{dz} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} + \lim_{dz \rightarrow 0} \varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}$$

esiste ed è finito. Questo significa che f è derivabile in senso complesso. $\square$

OSSERVAZIONE 1.2 La derivabilità in senso complesso è un requisito molto più forte della differenziabilità in $\mathbb{R}^2$. Sia $z = x + iy$, se $f = u + iv$ è differenziabile in senso complesso, per le (1.14) la matrice jacobiana di f è ortogonale (cioè le righe - o le colonne - sono ortogonali fra loro).

OSSERVAZIONE 1.3 Una funzione olomorfa è determinata a meno di una costante additiva se ne conosciamo soltanto la sua parte reale o soltanto la sua parte immaginaria.

ESEMPIO 1.3 Determinare le funzioni olomorfe tali che $\operatorname{Re}(f) = x$.

Sappiamo che $u(x, y) = x$ e che valgono le condizioni di Cauchy-Riemann. Allora

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 1 \\ \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v(x, y) = y + c(x) \\ \frac{\partial v}{\partial x} = c'(x) = 0 \Rightarrow c(x) = c \text{ (costante reale)} \end{cases}$$

Quindi $v(x, y) = y + c$ e $f(z) = x + iy + ic = z + ic$ con $c \in \mathbb{R}$.

OSSERVAZIONE 1.4 Derivando le condizioni di Cauchy-Riemann in ∂x e ∂y rispettivamente, si ha:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y},$$

Quindi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \quad (1.15)$$

Il primo membro della (1.15) si chiama **laplaciano** di u e si indica con Δu . Le funzioni tali che $\Delta u = 0$ si dicono **funzioni armoniche**. Se $f = u + iv$ è olomorfa, u è armonica. Verificare per esercizio che anche v è armonica, ovvero che anche $\Delta v = 0$.

Due funzioni u e v legate tra loro dalle condizioni di Cauchy-Riemann si dicono **coniugate**. Abbiamo visto che la matrice jacobiana J della f è ortogonale. Le righe di J sono i gradienti delle funzioni u e v . Questo significa che in ogni punto (x, y) del dominio di f , $\langle \nabla u, \nabla v \rangle = 0$. In particolare, poichè il gradiente di una funzione è sempre ortogonale alle sue linee di livello abbiamo che le linee di livello di u e v passanti per il punto (x, y) si intersecano fra loro ortogonalmente.

1.8 Serie di potenze

DEFINIZIONE 1.4 Chiamiamo **serie di potenze** di centro z_0 la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad (1.16)$$

con $z \in \mathbb{C}$ e $a_n \in \mathbb{C} \forall n \in \mathbb{N}$.

DEFINIZIONE 1.5 Diciamo che la serie di potenze (1.16) **converge semplicemente** in $z = \hat{z}$ se converge la serie numerica $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (\hat{z} - z_0)^n$.

Diciamo che la serie di potenze (1.16) **converge assolutamente** in $z = \hat{z}$ se converge la serie numerica $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| |\hat{z} - z_0|^n$.

Diciamo che la serie di potenze (1.16) **converge uniformemente** in un insieme K chiuso e limitato se converge la serie numerica $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ dove $b_n = \sup_{z \in K} |a_n (z - z_0)^n|$.

Si vede facilmente che la convergenza assoluta e la convergenza uniforme implicano la convergenza semplice.

Un importante risultato sulla convergenza delle serie di potenze è il

Lemma 1.1 (di Abel)

Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ una serie di potenze su $\mathbb{C}$ e sia $\hat{z} \in \mathbb{C}$ tale che la serie converga semplicemente in $\hat{z}$. Allora, $\forall r \in \mathbb{R}^+$ tale che $0 < r < |\hat{z} - z_0|$ la serie converge uniformemente in $\overline{B}(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r\}$.

Dimostrazione. Per semplicità supponiamo $z_0 = 0$. Se $\hat{z} = 0$ non c'è niente da dimostrare. Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \hat{z}^n$ converge, allora deve essere $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \hat{z}^n = 0$. La successione $|a_n \hat{z}^n|$ è limitata e quindi esiste un M tale che $|a_n \hat{z}^n| < M$. Sia ora $z \in \overline{B}(0, r)$,

$$|a_n z^n| = \left| a_n \cdot \hat{z}^n \frac{z^n}{\hat{z}^n} \right| = |a_n \hat{z}^n| \cdot \left| \frac{z^n}{\hat{z}^n} \right| \leq M \cdot \left| \frac{r}{\hat{z}} \right|^n.$$

Se $k = |r/\hat{z}|$, $0 < k < 1$ e quindi $|a_n z^n| < M k^n$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \cdot |z^n| \leq M \sum_{n=0}^{\infty} k^n = \frac{M}{1-k}$$

ovvero la somma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge assolutamente per ogni $z \in \overline{B}(0, r)$. $\square$

DEFINIZIONE 1.6 Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ una serie di potenze. Indichiamo con $A = \{\hat{z} \in \mathbb{C} : \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n \text{ converge semplicemente in } \hat{z}\}$. L'insieme $D = \overset{\circ}{A}$ si dice **dominio di convergenza** della serie.

DEFINIZIONE 1.7 Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ una serie di potenze con dominio di convergenza D . Chiamiamo **raggio di convergenza** della serie il numero reale $\rho = \sup_{z \in D} |z - z_0|$.

OSSERVAZIONE 1.5 Indichiamo con ρ il raggio di convergenza della serie. Allora $D = B(z_0, \rho)$. Inoltre, $D \subseteq A \subseteq \overline{D}$. Come conseguenza di questo,

- se $\rho = 0$ la serie converge solo per $z = 0$;
- se $0 < \rho < \infty$, la serie converge assolutamente per $|z| < \rho$ e non converge per $|z| > \rho$;
- se $\rho = \infty$ la serie converge assolutamente per ogni $z \in \mathbb{C}$.

La proposizione seguente caratterizza il raggio di convergenza di una serie di potenze.

Lemma 1.2 Sia $x \in \mathbb{R}$, $b_n \in \mathbb{R}$. Sia

$$R = \begin{cases} 0 & \text{se } \ell = \infty \\ 1/\ell & \text{se } 0 < \ell < \infty \\ \infty & \text{se } \ell = 0 \end{cases}.$$

dove $\ell = \maxlim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|b_n|}$. La serie $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ converge per tutti gli x con $|x| < R$; diverge per tutti gli x con $|x| > R$.

Dimostrazione. Se $|x| < R$, per il criterio della radice,

$$\maxlim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|b_n x^n|} = |x| \maxlim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|b_n|} = \frac{|x|}{R} = k < 1.$$

Quindi $\left| \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \right| < \sum_{n=0}^{\infty} k^n = \frac{1}{1-k}$ e la serie è convergente in x .

Sia ora $|x| > R$; esiste $\varepsilon > 0$ tale che $|x| > (1 + \varepsilon)R > R$.

$$\maxlim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|b_n x^n|} > \maxlim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|b_n ((1 + \varepsilon)R)^n|} = (1 + \varepsilon)R \maxlim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|b_n|} = 1 + \varepsilon > 1.$$

Per le proprietà del massimo limite, per infiniti valori di n si ha $|b_n x^n| > (1 + \varepsilon)^n$; il generico termine della serie non tende a zero e quindi la serie non è convergente. $\square$

Proposizione 1.1 (formula di Hadamard)

Sia $z \in \mathbb{C}$, siano $a_n \in \mathbb{C}$ e sia $\ell = \maxlim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$; sia R il raggio di convergenza della serie reale $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| x^n$. Se ρ è il raggio di convergenza della serie complessa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ allora $\rho = R$, cioè

$$\rho = \begin{cases} 0 & \text{se } \ell = \infty \\ 1/\ell & \text{se } 0 < \ell < \infty \\ \infty & \text{se } \ell = 0 \end{cases}.$$

Dimostrazione. Senza perdere di generalità supponiamo $z_0 = 0$.

Sia $|z| < R$, per il criterio della radice,

$$\maxlim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n z^n|} = |z| \maxlim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{|z|}{R} = k < 1.$$

La serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ è assolutamente convergente per $|z| < R$ e quindi $\rho \geq R$.

Supponiamo per assurdo che $\rho > R$. Esiste $z \in \mathbb{C}$ tale che $R < |z| < \rho$. Sia $x = |z|$, poiché $x < \rho$, per il lemma di Abel la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge uniformemente in $\overline{B}(0, x)$; in particolare $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| x^n = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ è convergente. D'altra parte, $x > R$ dove R è il raggio di convergenza della serie reale. La serie $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| x^n$ è divergente. Siamo arrivati ad una contraddizione ovvero è assurdo supporre che $\rho > R$. Segue $\rho = R$. $\square$

OSSERVAZIONE 1.6 Se i coefficienti a_n della serie sono definitivamente diversi da zero ed esiste il limite $\rho' = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$ allora $\rho' = \rho$.

ESERCIZIO 1.1 Utilizzare la formula di Hadamard per verificare che

i) la serie $\sum_{n=0}^{\infty} n! z^n$ converge solo per $z = 0$;

ii) il raggio di convergenza di $\sum_{n=0}^{\infty} n z^n$ è 1;

iii) la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ converge per ogni $z \in \mathbb{C}$.

Occupiamoci ora della regolarità delle funzioni che sono somma di una serie di potenze.

Proposizione 1.2 Se la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ ha dominio di convergenza $D \neq \emptyset$, la somma $f(z)$ della serie è una funzione continua.

Dimostrazione. Indichiamo con $f_n(z)$ la somma parziale n -esima della serie (1.16). Le funzioni $f_n(z) = \sum_{k=0}^n a_k (z - z_0)^k$ sono polinomi di grado n e quindi sono continue.

Siano $z_1, z_2 \in D$. Per la continuità di f_n , esiste un $\delta > 0$ tale che $|f_n(z_1) - f_n(z_2)| < \varepsilon/3$ quando $|z_1 - z_2| < \delta$. Inoltre,

$$|f(z) - f_n(z)| < \sum_{k=n+1}^{\infty} b_k, \quad \text{dove} \quad b_k = \sup_{z \in K} |a_k (z - z_0)^k|.$$

Per il lemma di Abel, la serie converge uniformemente in D esiste un n_0 tale che $\forall n > n_0$, $\sum_{k=n+1}^{\infty} b_k < \varepsilon/3$. Riassumendo, $\varepsilon > 0$ posso sempre trovare un $\delta > 0$ ed un $n_0 \in \mathbb{N}$ tali che per $z_1, z_2 \in D$ e $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} |f(z_1) - f(z_2)| &\leq |f(z_1) - f_n(z_1)| + |f_n(z_1) - f_n(z_2)| + |f_n(z_2) - f(z_2)| \leq \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

In altre parole la funzione $f(z)$, somma della serie, è continua in ogni $z_1 \in D$. $\square$

Proposizione 1.3 Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ una serie di potenze con raggio di convergenza $\rho > 0$; indichiamo con $f(z)$, per $|z| < \rho$, la somma della serie.

La serie delle derivate $\sum_{k=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ ha ancora raggio di convergenza ρ e si ha

$$f'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}. \quad (1.17)$$

Più in generale, la serie $\sum_{n=h+1}^{\infty} n(n-1) \cdots (n-h) a_n z^{n-h}$ ha ancora raggio di convergenza ρ e si ha

$$f^{(h)}(z) = \sum_{n=h+1}^{\infty} n(n-1) \cdots (n-h) a_n z^{n-h}. \quad (1.18)$$

Dimostrazione. Riscalando l'indice della serie di una unità, la serie delle derivate si può scrivere come $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} z^n$. Per calcolarne il raggio di convergenza con la formula di Hadamard dobbiamo calcolare

$$\ell = \maxlim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{(n+1) a_{n+1}}.$$

La successione $\sqrt[n]{n+1}$ ha limite $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n+1} = 1$ e quindi,

$$\ell = \maxlim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{(n+1) a_{n+1}} = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n+1} \right) \cdot \maxlim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_{n+1}} = 1 \cdot R = R.$$

Con calcoli del tutto analoghi possiamo dimostrare che la serie delle derivate n -esime e quella delle derivate $n+1$ -esime hanno lo stesso raggio di convergenza. Per il principio di induzione sull'ordine di derivazione, la serie $\sum_{n=h+1}^{\infty} n(n-1) \cdots (n-h) a_n z^{n-h}$ ha lo stesso raggio di convergenza ρ della serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.

Sia ora $g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ e sia h piccolo a sufficienza perché esista un $r < \rho$ tale che sia $|z|$ che $|z+h|$ siano più piccoli di r ; dimostreremo che $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} - g(z) = 0$.

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} - g(z) = \frac{1}{h} \sum_{n=1}^{\infty} a_n [(z+h)^n - z^n] - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}.$$

La serie a secondo membro ha raggio di convergenza ρ , inoltre

$$(z+h)^n - z^n = (z+h-z)((z+h)^{n-1} + (z+h)^{n-2}z + \dots + z^{n-1}) = h \sum_{k=0}^{n-1} (z+h)^{n-1-k} z^k.$$

Sostituendo,

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} - g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left[\sum_{k=0}^{n-1} (z+h)^{n-1-k} z^k - n z^{n-1} \right] = \sum_{n=0}^{\infty} b_n$$

Quest'ultima serie è maggiorata da $\sum_{n=1}^{\infty} 2n |a_n| r^n$ (abbiamo utilizzato la disuguaglianza triangolare) e quindi è convergente dato che $r < \rho$. Fissato un $\varepsilon > 0$ esiste un n_0 tale che

$$\left| \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n [(z+h)^{n-1} + (z+h)^{n-2}z + \dots + z^{n-1} - n z^{n-1}] \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ricordiamo che

$$(z+h)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} h^k z^{n-k} = z^n + nhz^{n-1} + n(n-1)h^2z^{n-2} + o(h^2).$$

Di conseguenza $b_n = (z+h)^{n-1} + (z+h)^{n-2}z + \dots + z^{n-1} - nz^{n-1}$ è un polinomio privo del termine noto (che quindi si annulla per $h=0$). Esiste allora un δ tale che se $|h| < \delta$,

$$\left| \sum_{n=0}^{n_0-1} a_n [(z+h)^{n-1} + (z+h)^{n-2}z + \dots + z^{n-1} - nz^{n-1}] \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Facendo tendere ε a zero segue la (1.17). La (1.18) si dimostra facilmente mediante il principio di induzione. $\square$

1.9 Funzioni analitiche complesse

DEFINIZIONE 1.8 Una funzione $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ si dice **analitica complessa** su $\Omega \subset \mathbb{C}$ se per ogni $z_0 \in \Omega$ esistono degli $z_n \in \mathbb{C}$ ed un intorno U di z_0 tali che $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ per ogni $z \in U$.

OSSERVAZIONE 1.7 In base alla proposizione (1.3) una funzione analitica complessa è derivabile in senso complesso ovvero è olomorfa. Nel paragrafo 1.12 vedremo che è vero anche il viceversa cioè che una funzione olomorfa è analitica in senso complesso.

La classe delle funzioni analitiche complesse e la classe delle funzioni olomorfe coincidono.

Lemma 1.3 Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ convergente in $\Omega \in \mathbb{C}$ e sia $h(z)$ la sua somma. Se esiste una successione $z_n \rightarrow z_0$ a valori in Ω , $z_n \neq z_0$ per ogni n e tale che $h(z_n) = 0$ per ogni n .

Allora la serie è identicamente nulla.

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che esista un k tale che $a_k \neq 0$. Sia k_0 il più piccolo valore di k per cui $a_k \neq 0$, allora

$$h(z) = (z-z_0)^{k_0} \sum_{n=0}^{\infty} a_{k_0+n}(z-z_0)^n.$$

La serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_{k_0+n}(z-z_0)^n$ ha lo stesso raggio di convergenza della serie di partenza.

La funzione $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{k_0+n}(z-z_0)^n$ è continua, definita in tutto Ω e $g(z_0) \neq 0$. Per la continuità esiste un intorno U di z_0 in cui $g(z) \neq 0$. Poiché $(z-z_0)^n \neq 0$ per ogni $z \neq z_0$, in $U \setminus \{z_0\}$ si ha $h(z) = (z-z_0)^{k_0}g(z) \neq 0$. Ma $z_n \rightarrow z_0$ quindi esiste un n_0 tale che $z_n \in U$ per ogni $n > n_0$, cioè $h(z_n) \neq 0$ per $n > n_0$ ma questo è assurdo. Quindi $a_k = 0$ per ogni k e la serie è identicamente nulla.

Corollario 1.1 Se $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ non è la funzione identicamente nulla ed $f(z_0) = 0$ allora z_0 è uno zero isolato.

Per semplicità di trattazione ometteremo la dimostrazione del teorema seguente. Si tratta comunque del risultato più importante riguardo le funzioni analitiche complesse anche per le sue molte conseguenze.

Teorema 1.2 (principio di identità delle funzioni analitiche)

Sia $\Omega \in \mathbb{C}$ aperto connesso e siano f, g analitiche complesse su Ω . Sia $N = \{z \in \Omega \text{ tali che } f(z) = g(z)\}$. Ci sono due possibilità:

- i) $N = \Omega$, cioè $f(z) = g(z)$ su tutto Ω ;
- ii) N non ha punti di accumulazione in Ω cioè è formato da punti isolati.

Corollario 1.2 Se $f(z)$ è analitica complessa e non identicamente nulla allora i suoi zeri sono isolati.

Corollario 1.3 Se f, g sono analitiche complesse e coincidono su $\mathbb{R}$ allora coincidono su tutto $\mathbb{C}$.

Quindi se $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è analitica esiste una sola estensione analitica $f': \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ tale che f' coincide con f su $\mathbb{R}$.

Il corollario precedente fornisce una motivazione rigorosa per le definizioni (1.9), (1.13) date nel paragrafo 1.6 per l'esponenziale complessa e per le funzioni trigonometriche e iperboliche. Le funzioni definite dalle (1.9), (1.13) sono analitiche complesse e, se valutate per z reale, coincidono con le omologhe reali. In base al corollario precedente le definizioni date sono le uniche possibili se si vuole mantenere l'analiticità delle funzioni.

Concludiamo il paragrafo con una importante osservazione. Sia $\Omega \in \mathbb{C}$ un insieme aperto e sia $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ analitica complessa in $z_0 \in \Omega$. Allora $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ in un opportuno intorno U di z_0 . Derivando successivamente termine a termine la serie si ha:

$$f(z_0) = a_0, \quad f'(z_0) = a_1, \quad f''(z_0) = 2a_2, \quad \dots, \quad f^n(z_0) = n! a_n.$$

Cioè $a_n = \frac{f^n(z_0)}{n!}$. Se f è analitica complessa il suo sviluppo in serie di potenze coincide con la sua serie di Taylor.

1.10 Integrazione nel campo complesso

DEFINIZIONE 1.9 Diciamo che γ è una **curva regolare** (o un **cammino regolare**) in $\mathbb{C}$ se $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ è una funzione di classe C^1 intesa come $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. L'insieme descritto da $\gamma(t)$ al variare di $t \in [a, b]$ si dice **traccia** (o **sostegno**) di γ . Una curva si dice **chiusa** se $\gamma(a) = \gamma(b)$, si dice **semplice** se sono iniettive le restrizioni di γ agli insiemi $[a, b]$ e $(a, b]$.

DEFINIZIONE 1.10 Sia $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione continua e sia $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ una curva regolare a tratti la cui traccia sia contenuta in A . Chiamiamo **integrale di f sulla curva γ** la quantità:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f &= \int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt = \\ &= \int_a^b (u(x, y) dx - v(x, y) dy) + i \int_a^b (v(x, y) dx + u(x, y) dy). \end{aligned}$$

ESEMPIO 1.4 $\gamma : t \rightarrow z_0 + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi)$ è un cammino regolare, chiuso, semplice la cui traccia è la circonferenza di centro z_0 e raggio r .

$$\int_{\gamma} z dz = \int_0^{2\pi} (z_0 + re^{it})re^{it} dt = \int_0^{2\pi} irz_0e^{it} + ir^2e^{2it} dt = 0$$

dato che e^{it} è una funzione periodica di periodo 2π .

DEFINIZIONE 1.11 Se $\gamma : t \in [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ è una curva regolare, indicheremo con $\gamma^- : t \rightarrow \mathbb{C}$ la curva regolare con la stessa traccia di γ ma percorsa in senso opposto. Ad esempio, un modo di scrivere γ^- è $\gamma^-(t) = \gamma((a+b)-t)$.

Cambi di parametro ammissibili Sia $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ una curva regolare e sia $t = \varphi(\tau)$ una funzione C^1 definita su un intervallo $[\alpha, \beta]$ e tale che, $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$, $\varphi'(\tau) > 0$ $\forall \tau$. La curva $\gamma_1 = \gamma \circ \varphi$, $\gamma_1 : \tau \rightarrow \gamma(\varphi(\tau))$, $\tau \in [\alpha, \beta]$ si dice dedotta da γ mediante un cambio di parametro (che conserva l'orientamento dato che $\varphi'(\tau) > 0$).

Si osservi che anche φ^{-1} è un cambio di parametro ammissibile. Si può dimostrare che la relazione tra due curve deducibili tramite un cambio di parametro ammissibile è di equivalenza.

Proprietà dell'integrale complesso esteso ad una curva

i) Linearità:

$$\int_{\gamma} c_1 f_1 + c_2 f_2 = c_1 \int_{\gamma} f_1 + c_2 \int_{\gamma} f_2, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{C}$$

ii) Cambio di orientamento:

$$\int_{\gamma^-} f = - \int_{\gamma} f \quad (1.19)$$

iii) Invarianza per equivalenza:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f &= \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t) dt = \int_a^b f(\gamma(\varphi(\tau)))\gamma'(\tau)\varphi'(\tau) dt = \\ &= \int_a^b f((\gamma \circ \varphi)(\tau))(\gamma \circ \varphi)'(\tau) d\tau = \int_{\gamma \circ \varphi} f \end{aligned}$$

iv) Additività rispetto al cammino di integrazione. Indichiamo con $\gamma = \gamma_1 \gamma_2$ la curva ottenuta concatenando i cammini γ_1 e γ_2 . Allora

$$\int_{\gamma} f = \int_{\gamma_1} f + \int_{\gamma_2} f$$

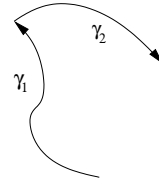


Figura 1.5 Concatenazione di due cammini: $\gamma = \gamma_1 \circ \gamma_2$

- v) Stima “ML”. Se $M = \max\{|f(\gamma(t))|, t \in [a, b]\}$ e se L è la lunghezza della curva γ , allora

$$\left| \int_{\gamma} f \right| \leq M \cdot L.$$

Dimostrazione.

$$\left| \int_{\gamma} f \right| = \left| \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(\gamma(t))| \cdot |\gamma'(t)| dt \leq M \int_a^b |\gamma'(t)| dt = M \cdot L$$

- vi) Siano $f_n : A \rightarrow \mathbb{C}$ funzioni continue e sia γ un cammino regolare a tratti con traccia contenuta in A . Se la successione f_n converge uniformemente ad una funzione $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ sui punti della traccia di γ , allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\gamma} f_n(z) dz = \int_{\gamma} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z) dz = \int_{\gamma} f(z) dz$$

1.11 Primitive

DEFINIZIONE 1.12 Sia $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ continua in $A \subseteq \mathbb{C}$. Diciamo che $F : A \rightarrow \mathbb{C}$ è una **primitiva** di f se F è derivabile in senso complesso in A e $\forall z \in A$ vale $F'(z) = f(z)$.

Proposizione 1.4 Sia $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ continua in $A \subseteq \mathbb{C}$. Sia F una primitiva di f . Sia poi $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ un cammino regolare con traccia contenuta in A .

Allora:

$$\int_{\gamma} f = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f &= \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt = \int_a^b F'(\gamma(t)) \gamma'(t) dt = \\ &= \int_a^b d(F \circ \gamma)(t) dt = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)). \end{aligned}$$

□

OSSERVAZIONE 1.8 Se γ è una curva chiusa allora $\gamma(a) = \gamma(b)$. Se f ammette primitiva su $\mathbb{C}$ allora $\int_{\gamma} f = 0$.

ESEMPIO 1.5 Sia $\gamma : t \rightarrow re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ e sia $f(z) = 1/z$. Calcoliamo

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{re^{it}} ire^{it} dt = \int_0^{2\pi} i dt = 2\pi i.$$

La curva γ (fig. 1.6) è chiusa; se $f(z)$ ammettesse una primitiva in un qualunque insieme Ω contenente la traccia di γ , l'integrale dovrebbe essere nullo. Questo significa che $1/z$ non ammette primitiva in un tale Ω .

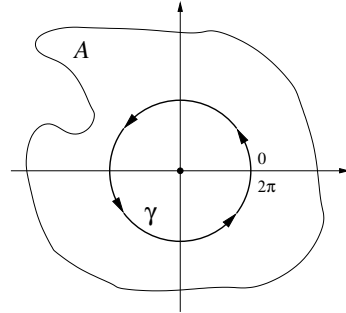


Figura 1.6

ESEMPIO 1.6 $f(z) = 1/z$ ammette primitiva in $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{\operatorname{Re} z < 0, \operatorname{Im} z = 0\}$.

Una primitiva può essere calcolata come integrale tra un punto fissato del piano e z , indipendentemente dal cammino in Ω che li unisce.

Fissiamo ad esempio $z_0 = 1$ come punto di riferimento. Siano $A = |z|$, $B = z/|z|$ (vedi fig. 1.7); allora

$$\begin{aligned} \int_1^z \frac{1}{w} dw &= \int_1^A \frac{1}{w} dw + \int_A^z \frac{1}{w} dw = \\ &= \log(A) - \log(1) + \int_0^{\arg(z)} (Ae^{i\vartheta})^{-1} i A e^{i\vartheta} d\vartheta = \log |z| + i \arg(z) \end{aligned}$$

Si può verificare che calcolando l'integrale su un percorso diverso otteniamo lo stesso risultato. Ad esempio,

$$\int_1^z \frac{1}{w} dw = \int_1^B \frac{1}{w} dw + \int_B^z \frac{1}{w} dw = \log |z| + i \arg(z)$$

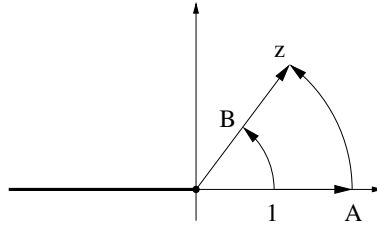


Figura 1.7 Indipendenza dal cammino per il calcolo della primitiva di $1/z$ in $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{\operatorname{Re} z < 0, \operatorname{Im} z = 0\}$

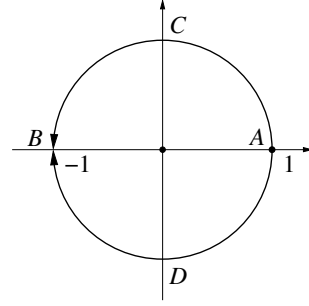


Figura 1.8 Non è possibile definire la primitiva di $1/z$ in tutto $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$

Posso definire $F(z) = \log |z| + i \arg(z)$ per tutti gli $z \in \mathbb{C}$ tranne per quelli del semiasse negativo. Se cercassi di definire la primitiva su tutto il piano, allora (fig. 1.8)

$$F(-1) = \int_{A \widehat{C} B} \frac{1}{w} dw = \pi i, \quad \text{ma anche} \quad F(-1) = \int_{A \widehat{D} B} \frac{1}{w} dw = -\pi i,$$

arrivando ad una contraddizione.

La proposizione seguente caratterizza le situazioni in cui è possibile definire la primitiva di una funzione f .

Proposizione 1.5 Sia $f : A \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, con A aperto connesso. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

- i) f ammette primitiva in A ;
- ii) l'integrale di f su ogni cammino γ regolare a tratti, con traccia contenuta in A , dipende solo dagli estremi di integrazione;
- iii) l'integrale di f è nullo su ogni curva γ chiusa continua e regolare a tratti con traccia contenuta in A .

1.12 Teorema e di Cauchy e sue conseguenze

Quando scriviamo l'integrale di una funzione lungo un cammino γ è necessario specificare il verso di percorrenza della curva (cfr. proprietà (1.19)). Conviene stabilire una volta per tutte un orientamento privilegiato per i cammini e riferirsi a questo a meno che non sia diversamente specificato.

Teorema 1.3 (di Jordan) *Sia $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ una curva continua, semplice, chiusa. Il complementare della sua traccia ($\mathbb{C} \setminus \gamma([a, b])$) è l'unione di due aperti disgiunti e connessi di cui uno è limitato.*

Il teorema 1.3 suggerisce un modo di scegliere l'orientamento privilegiato:

DEFINIZIONE 1.13 *Se γ è un circuito, diremo che γ è percorso in **senso positivo** (o anche che è **orientato positivamente**) se, al crescere del parametro t , γ è percorso in senso antiorario, ovvero in modo che un osservatore che percorra γ nel senso delle t crescenti veda l'aperto limitato D , individuato da γ , alla sua sinistra.*

D'ora in poi considereremo i cammini orientati positivamente se non specificato diversamente.

Teorema 1.4 (della divergenza) *Siano $X, Y : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ due funzioni di classe $C^1(A)$. Sia γ un circuito regolare a tratti contenuto in A insieme al suo interno D .*

Allora vale l'uguaglianza

$$\int_{\gamma} X dx + Y dy = \int_D \left(\frac{\partial X}{\partial x} - \frac{\partial Y}{\partial y} \right) dx dy \quad (1.20)$$

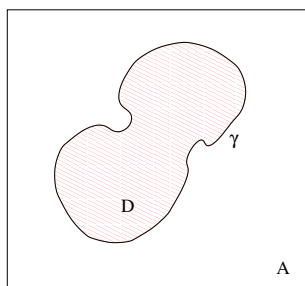


Figura 1.9

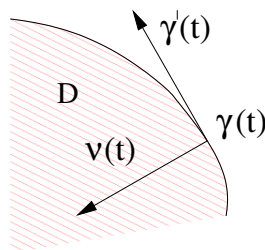


Figura 1.10 *Vettori tangente e normale a γ e orientamento positivo.*

Si osservi che il segno del primo membro della (1.20) dipende dall'orientamento di γ mentre il secondo membro ne è indipendente. Perché la formula sia corretta è necessario che al crescere del parametro t la frontiera di D sia percorsa in senso antiorario. Per essere più precisi, il **vettore tangente** al cammino $\gamma(t)$ è $\gamma'(t)$. Il vettore $\nu(t) = i\gamma'(t)$, ottenuto dal precedente mediante una rotazione di $\pi/2$ in senso antiorario (cioè nel senso positivo degli angoli) individua il **vettore normale** a γ nel punto $\gamma(t)$. In base alla definizione 1.13, diciamo che γ è orientata positivamente se $\nu(t)$ punta verso l'interno di D in ogni punto in cui è definito.

Teorema 1.5 (integrale di Cauchy) *Sia $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ olomorfa nell'aperto connesso A . Per ogni circuito regolare a tratti γ contenuto in A assieme al proprio interno D si ha:*

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

Dimostrazione. Se $f = u + iv$ è olomorfa allora le funzioni u e v sono differenziabili in senso reale. Possiamo applicare il teorema della divergenza.

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &= \int_{\gamma} u dx - v dy + i \int_{\gamma} v dx + u dy = \\ &= - \int_D \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy + i \int_D \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy \end{aligned}$$

Per le condizioni di Cauchy-Riemann i due integrandi sono identicamente nulli e quindi segue la tesi. $\square$

Le condizioni di Cauchy-Riemann equivalgono ad affermare che le forme differenziali associate ad f sono *chiuse* ovvero localmente esatte. Si potrebbe dimostrare che il teorema continua a valere per qualunque circuito γ regolare a tratti ma è più complicato e non lo facciamo.

Corollario 1.4 *Una funzione $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ olomorfa in A è dotata di primitiva in ogni sottoinsieme semplicemente connesso di A .*

ESEMPIO 1.7 Abbiamo visto negli esempi 1.5 e 1.6 che $f(z) = 1/z$ non ammette primitiva nè in $\mathbb{C}$, nè in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Ha invece primitiva in $\mathbb{C} \setminus \{\operatorname{Re} z < 0, \operatorname{Im} z = 0\}$ o, più in generale in insiemi del tipo “ $\mathbb{C}$ meno una semiretta uscente dall'origine” (che infatti sono semplicemente connessi).

Proposizione 1.6 *Sia $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ olomorfa nell'aperto connesso A . Siano γ_1 e γ_2 due circuiti regolari a tratti e contenuti in A , con γ_2 interno a γ_1 . Siano D_1 e D_2 gli aperti individuati dalle regioni interne a γ_1 e a γ_2 rispettivamente. Se $D_1 \setminus D_2 \subset A$, allora*

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_{\gamma_2} f(z) dz.$$

Dimostrazione. Mediante dei tagli opportuni è sempre possibile suddividere $D_1 \setminus D_2$ in due parti E_1 ed E_2 semplicemente connesse e tali che $E_1 \cup E_2 = D_1 \setminus D_2$. Dalle ipotesi fatte, $f(z)$ è olomorfa in E_1 e in E_2 , quindi

$$\int_{\partial E_1} f dz = 0, \quad \int_{\partial E_2} f dz = 0.$$

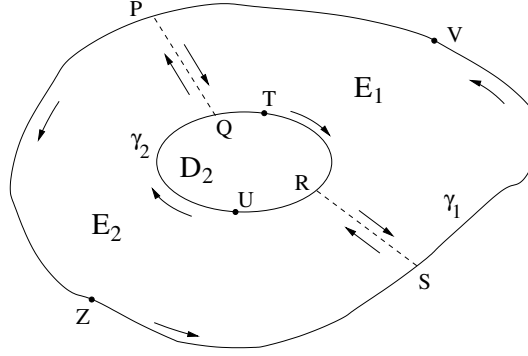


Figura 1.11 $D_1 = D_2 \cup E_1 \cup E_2$.

D'altra parte,

$$\begin{aligned} \int_{\partial E_1} f dz &= \int_{\widehat{SV}P} f dz + \int_{\widehat{PQ}} f dz + \int_{\widehat{QTR}} f dz + \int_{\widehat{RS}} f dz, \\ \int_{\partial E_2} f dz &= \int_{\widehat{RUQ}} f dz + \int_{\widehat{QP}} f dz + \int_{\widehat{PZS}} f dz + \int_{\widehat{SR}} f dz. \end{aligned}$$

Si osservi che gli integrali sui tagli RS e PQ compaiono in entrambe le espressioni ma con versi di percorrenza opposti. Quindi,

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\partial E_1} f dz + \int_{\partial E_2} f dz = \\ &= \int_{\widehat{SV}P} f dz + \int_{\widehat{PZS}} f dz + \int_{\widehat{QTR}} f dz + \int_{\widehat{PZS}} f dz = \\ &= \int_{\gamma_1} f dz - \int_{\gamma_2} f dz. \end{aligned}$$

□

Una volta stabilito il teorema integrale di Cauchy, siamo in grado di dimostrare alcune notevoli proprietà delle funzioni olomorfe.

Proposizione 1.7 (formula integrale di Cauchy) *Sia $f : A \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione olomorfa nell'aperto connesso A e sia γ un circuito contenuto in A assieme al proprio interno D .*

Per ogni $z_0 \in D$ si ha:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz \quad (1.21)$$

Dimostrazione. Sia γ_r la circonferenza di raggio r e centro in z_0 , con raggio abbastanza piccolo in modo che γ_r sia contenuta nell'interno di γ . La funzione $\frac{f(z)}{z - z_0}$ è olomorfa in $A \setminus \{z_0\}$; per il teorema di Cauchy applicato alla coppia γ, γ_r ,

$$\int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

Inoltre,

$$\int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{it})}{re^{it}} ire^{it} dt = i \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) dt.$$

Le uguaglianze scritte valgono per ogni valore di r (purché abbastanza piccolo); continuano a valere se si passa al limite per $r \rightarrow 0$:

$$\int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = i \int_0^{2\pi} f(z_0) dt = 2\pi i f(z_0)$$

ovvero la tesi. □

OSSERVAZIONE 1.9 Conoscendo il valore di f sul circuito γ è possibile determinare il valore di f in tutti i punti interni a γ stesso. Si osservi inoltre che $\int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$ è definito per tutti gli z_0 fuori dalla traccia di γ . Se z_0 è esterno a γ , l'integrale è nullo. In definitiva:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \begin{cases} f(z_0) & \text{se } z_0 \in D \\ 0 & \text{se } z_0 \notin A \setminus \overline{D} \end{cases}$$

OSSERVAZIONE 1.10 Se $f(z) \equiv 1$ allora

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{z - z_0} dz = \begin{cases} 1 & \text{se } z_0 \in D \\ 0 & \text{se } z_0 \notin A \setminus \overline{D} \end{cases}$$

Più in generale, se la curva γ non è semplice e z non sta sulla traccia di γ , si definisce **indice di avvolgimento** di γ rispetto a z il numero

$$\text{Ind}(\gamma, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{w - z} dw.$$

L'indice $\text{Ind}(\gamma, z)$ è sempre un numero intero e conta quante volte γ gira attorno al punto z contando come positivi i giri nel senso crescente degli angoli (cioè in senso antiorario) e negativi gli altri.

Dalle proprietà di derivazione per serie delle serie di potenze (proposizione 1.3) sappiamo che una funzione analitica è olomorfa. La proposizione seguente afferma che è vero anche il viceversa. In altre parole “olomorfa” è equivalente ad “analitica complessa”.

Proposizione 1.8 Sia $f : A \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione olomorfa in A aperto connesso. Allora f è analitica complessa, ovvero, per ogni $z_0 \in A$ esistono dei $c_n \in \mathbb{C}$ tali che se γ è un circuito contenuto in A ,

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} c_n (z - z_0)^n \quad e \quad c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w) dw}{(w - z_0)^{n+1}}.$$

Dimostrazione. Sia $z_0 \in A$ e sia r tale che la palla $B = B(z_0, r) = \{z_0 : |w - z_0| < r\}$ sia contenuta in A . Siano poi $z \in B$ e $w \in \partial B$; possiamo scrivere

$$\frac{1}{w - z} = \frac{1}{(w - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{w - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{w - z_0}}$$

Al variare di $w \in \partial B$, $\left| \frac{z - z_0}{w - z_0} \right|$ è costante e minore di 1. Possiamo sviluppare la frazione in serie di potenze:

$$\frac{1}{w - z} = \frac{1}{w - z_0} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{z - z_0}{w - z_0} \right]^n; \quad (1.22)$$

inoltre la serie converge totalmente al variare di $z \in \partial B$.

Dalla formula integrale di Cauchy si ha:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B} \frac{f(w)}{w - z} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B} \frac{f(w)}{w - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{z - z_0}{w - z_0} \right]^n dw.$$

Per la convergenza totale possiamo scambiare somma e integrale

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw \right].$$

abbiamo scritto $f(z)$ come somma di una serie di potenze:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \quad \text{dove} \quad c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw.$$

inoltre il valore di c_n non dipende dalla scelta di r . Poiché z_0 è un qualsiasi punto di A abbiamo dimostrato che f è analitica complessa. $\square$

Come corollario della proposizione precedente possiamo dimostrare una generalizzazione della formula integrale di Cauchy alle derivate della f :

Corollario 1.5 (Formula di Cauchy per le derivate) *Sia $f : A \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione olomorfa in A aperto connesso e sia γ un circuito contenuto in A insieme al suo interno. Allora, per ogni $z_0 \in A$, per ogni $n > 0$ si ha:*

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^{n+1}} \quad (1.23)$$

Dimostrazione. f è olomorfa in A , quindi $\forall z_0 \in A$ vale la (1.21). Per la proposizione precedente esistono tutte le derivate di f in A esistono e valgono le condizioni per poter derivare la (1.21) sotto il segno di integrale quante volte si vuole. Derivando n volte si ricava la (1.23). $\square$

OSSERVAZIONE 1.11 Possiamo reinterpretare il risultato della proposizione 1.8 utilizzando la formula (1.23): se $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ è olomorfa in $A \subset \mathbb{C}$ allora per ogni $z_0 \in A$,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \quad \text{dove} \quad c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}. \quad (1.24)$$

Quindi ogni f olomorfa è sviluppabile in serie di potenze e tale serie coincide con lo sviluppo in serie di Taylor.

Chiudiamo il paragrafo con una ulteriore caratterizzazione delle funzioni analitiche complesse:

Teorema 1.6 (di Morera) Sia $f : A \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione continua nell'aperto connesso A . Se per ogni poligonale chiusa γ contenuta in A si ha $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$ allora f è analitica (e quindi olomorfa) in A .

Dimostrazione. (traccia) Poiché $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$ per tutte le poligonali chiuse γ con traccia contenuta in A , fissato uno $z_0 \in A$, è possibile definire una primitiva di f su tutto A e quindi f è olomorfa su A . $\square$

In un certo senso il teorema di Morera è l'inverso del teorema di Cauchy.

1.13 Singolarità e teorema dei residui

Proposizione 1.9 Sia $f : A \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione analitica in A aperto connesso. Le affermazioni seguenti sono equivalenti:

- i) $\exists z_0 \in A$, $n \in \mathbb{N}$ tale che $f^{(n)}(z_0) = 0$;
- ii) f è nulla in un intorno di z_0 ;
- iii) f è identicamente nulla in A .

Dimostrazione. È una conseguenza del principio di identità delle funzioni analitiche tenendo conto della (1.11). $\square$

Corollario 1.6 Sia $f : A \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ è analitica in A aperto connesso e non identicamente nulla. L'insieme degli zeri di f o è vuoto o è formato da punti isolati.

DEFINIZIONE 1.14 Siano f_1 ed f_2 due funzioni analitiche in A aperto, con f_2 non identicamente nulla e sia $g(z) = f_1(z)/f_2(z)$. Il rapporto g è una funzione analitica nell'insieme A da cui sono stati tolti i punti z_i tali che $f_2(z_i) = 0$. Gli z_i si dicono **punti singolari isolati** per g .

ESEMPIO 1.8

- $g_1(z) = \frac{1}{z^2 + 1}$ ha due punti singolari $z_1 = i$ e $z_2 = -i$, ovvero nei punti in cui $z^2 + 1 = 0$.
- $g_2(z) = \frac{\sin z}{z}$ ha un punto singolare nell'origine.

Si osservi che i punti singolari delle funzioni g_1 e g_2 dell'esempio precedente sono di natura diversa: nel primo caso $\lim_{|z-z_i| \rightarrow 0} g_1(z) = \infty$ mentre nel secondo il limite di $g_2(z)$ quando $z \rightarrow 0$ esiste ed è 1. Classificheremo i punti singolari di una funzione in base al comportamento di questa in prossimità della singolarità.

DEFINIZIONE 1.15 Un punto singolare isolato z_0 di una funzione analitica $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ si dice **eliminabile** se esiste un prolungamento analitico di f in un intorno di z_0 .

DEFINIZIONE 1.16 Sia $f : A \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione olomorfa e sia $z_0 \in A$ tale che $f(z_0) = 0$. Diciamo che z_0 è uno **zero di ordine n** per f se esiste $h(z)$ olomorfa tale che $f(z) = (z - z_0)^n h(z)$ e $h(z_0) \neq 0$.

Consideriamo ancora $g(z) = f_1(z)/f_2(z)$. Supponiamo che $f_2(z)$ abbia uno zero di molteplicità n in z_0 , ovvero $f_2(z) = (z - z_0)^n h(z)$ con $h(z_0) \neq 0$. Allora,

$$g(z) = \frac{f_1(z)}{f_2(z)} = \frac{f_1(z)}{h(z)}(z - z_0)^{-n}, \quad \text{ovvero} \quad \frac{f_1(z)}{h(z)} = g(z)(z - z_0)^n.$$

Se passiamo al limite per $z \rightarrow z_0$,

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^k g(z) = \begin{cases} \infty & \text{se } k > n \\ 0 & \text{se } k < n \\ \frac{f_1(z_0)}{h(z_0)} & \text{se } k = n \end{cases}.$$

DEFINIZIONE 1.17 Sia $f : A \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione analitica e sia z_0 un punto singolare isolato. Diciamo che z_0 è un **polo di ordine n** per f se esiste finito e non nullo il $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)(z - z_0)^n$.

ESEMPIO 1.9

- I poli di $g_1(z) = \frac{1}{1+z^2}$ sono $z_{1,2} = \pm i$ e sono entrambi del primo ordine.
- I poli di $g_2(z) = \frac{1}{(z^2+z+1)^2}$ sono $z_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$ e sono entrambi del secondo ordine.

DEFINIZIONE 1.18 Sia $f : A \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ analitica e sia z_0 un punto singolare isolato di f . Chiamiamo **residuo** di f nel punto z_0 il numero

$$\text{Res}(f, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) dz \quad (1.25)$$

dove γ è un circuito contenente z_0 e nessun altro eventuale punto singolare di f .

Proposizione 1.10 Sia $f : A \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione analitica e sia z_0 un polo di ordine n per f . Allora

$$\text{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} ((z - z_0)^n f(z)) \quad (1.26)$$

Dimostrazione. Se f ha un polo di ordine n in z_0 allora la funzione $g(z) = (z - z_0)^n f(z)$ ha in z_0 una discontinuità eliminabile. Sia γ una circonferenza centrata in z_0 di raggio abbastanza piccolo da non contenere altre singolarità di f al suo interno. Dalla formula di Cauchy per le derivate (1.23),

$$g^{(n-1)}(z_0) = \frac{(n-1)!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{g(z)}{(z - z_0)^n} dz = \frac{(n-1)!}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) dz.$$

Dalla definizione di residuo,

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) dz = \frac{g^{(n-1)}(z_0)}{(n-1)!} = \frac{1}{(n-1)!} \left[\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} ((z-z_0)^n f(z)) \right]_{z=z_0}.$$

□

Teorema 1.7 (dei residui) Sia $f: A \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ analitica nell'aperto $A \subset \mathbb{C}$ e sia γ un circuito contenuto in A . Sia D l'aperto individuato dall'interno di γ e siano $z_1, \dots, z_r$ i punti singolari di f interni ad A . Allora

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^r \operatorname{Res}(f, z_k). \quad (1.27)$$

Dimostrazione. Siano γ_k circonferenze abbastanza piccole da essere contenute in A e contenere al loro interno solo la singolarità z_k ; siano A_k i loro interni. L'enunciato segue subito applicando il teorema di Cauchy all'insieme $A \setminus \bigcup_{k=1}^r A_k$ (fig 1.12) ed utilizzando la definizione di residuo. □

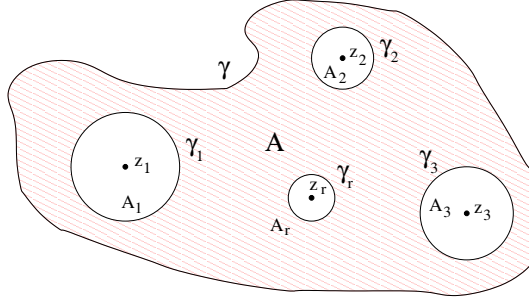


Figura 1.12 La frontiera di A è formata da γ e dalle γ_k . Si noti che queste ultime sono orientate positivamente se percorse in senso orario.

Concludiamo il capitolo con due lemmi utili per il calcolo di integrali definiti mediante il teorema dei residui.

Lemma 1.4 (del grande cerchio) Sia f una funzione continua nel settore circolare $\vartheta_1 < \arg(z) < \vartheta_2$, almeno per $|z|$ abbastanza grande.

Se $\lim_{R \rightarrow \infty} z f(z) = 0$ allora $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} f(z) dz = 0$ dove γ_R è l'intersezione della circonferenza di raggio R e centro l'origine con il settore circolare.

Dimostrazione. Basta applicare la stima “ML” e passare al limite per $R \rightarrow \infty$. □

Lemma 1.5 (del piccolo cerchio) Sia f una funzione continua nel settore circolare $\vartheta_1 < \arg(z) < \vartheta_2$, almeno per $|z|$ abbastanza piccolo.

Se $\lim_{r \rightarrow 0} z f(z) = 0$ allora $\lim_{r \rightarrow 0} \int_{\gamma_r} f(z) dz = 0$ dove γ_r è l'intersezione della circonferenza di raggio r e centro l'origine con il settore circolare.

Dimostrazione. Basta applicare la stima “ML” e passare al limite per $r \rightarrow 0$. □

Indice

1	Analisi complessa	1
1.1	Introduzione	1
1.2	Soluzione algebrica delle equazioni di terzo grado	1
1.3	Aritmetica complessa	2
1.4	Rappresentazioni cartesiana e polare	4
1.5	Radici di un numero complesso	6
1.6	Funzioni trascendenti di un numero complesso	6
1.6.1	Esponenziale e logaritmo in $\mathbb{C}$	6
1.6.2	Funzioni trigonometriche e iperboliche in $\mathbb{C}$	8
1.7	Funzioni olomorfe	8
1.8	Serie di potenze	11
1.9	Funzioni analitiche complesse	15
1.10	Integrazione nel campo complesso	16
1.11	Primitive	18
1.12	Teorema e di Cauchy e sue conseguenze	20
1.13	Singularità e teorema dei residui	25