

ESERCIZI SU CONVERGENZA DI SERIE NUMERICHE

Esercizio 1: Studiare la convergenza delle serie numeriche:

$$a) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2 + \sqrt{k+1}}$$

$$d) \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 - \cos\left(\frac{1}{k}\right)\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$b) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+3}$$

$$e) \sum_{k=1}^{\infty} \ln\left(1 - \cos\left(\frac{1}{k}\right)\right)$$

$$c) \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 + \sin\left(\frac{1}{k}\right)\right)^k$$

$$f) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k)!}{2^k \sqrt{k}}$$

Esercizio 2: Quali delle serie numeriche seguenti convergono semplicemente o assolutamente?

$$a) \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k \ln k}$$

$$c) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^3 \pi^k}{3^k + 4^k}$$

$$b) \sum_{k=9}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{\ln(\ln(\ln k))}$$

$$d) \sum_{k=1}^{\infty} \left(k^2 \log \frac{k^2+2}{k^2+1}\right)^k (-1)^k$$

Esercizio 3: Per quali valori di α le serie seguenti sono convergenti? Per quali α sono assolutamente convergenti?

$$a) \sum_{k=1}^{\infty} \left[\sin\left(\left(k + \frac{(-1)^k}{k^2}\right)\pi\right) \right]^\alpha$$

$$b) \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan k\right)^\alpha$$

Esercizio 4: Sia $\{a_k\}$ $k=1, 2, \dots$ una successione decrescente e non negativa. Dimostrare che la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge se e solo se converge $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$.