

Prova Scritta di Matematica II

17-01-2017

Svolgere almeno due dei seguenti esercizi giustificando il procedimento seguito.

Esercizio 1 È dato il campo vettoriale

$$\underline{F} = \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, -\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, z \right)$$

definito in $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$. Siano: $\gamma_1 = \left\{ \left(\cos \vartheta, \sin \vartheta, \frac{\vartheta}{\pi} \right), \vartheta \in [0, 2\pi] \right\}$ e sia

$\gamma_2 = \left\{ \left(\cos \vartheta, \sin \vartheta, \frac{\vartheta}{2\pi} \right), \vartheta \in [0, 2\pi] \right\}$ seguita dal segmento che unisce i punti $(1, 0, 1)$ e $(1, 0, 2)$

- Calcolare il lavoro di $\underline{F}$ lungo γ_1 e lungo γ_2 e confrontare i valori ottenuti.
- Le informazioni raccolte al punto a) permettono di affermare che il campo è conservativo? Giustificare il ragionamento seguito.
- Verificare se il campo $\underline{F}$ è conservativo.

Esercizio 2 Determinare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale

$$(\sin y)^2 = (x + 1) \cos y \cdot y'$$

Esercizio 3 Determinare massa e baricentro della lamina di vertici $(0, 1)$, $(0, 3)$, $(2, 3)$, $(4, 2)$, $(4, 0)$, $(2, 0)$ e densità $\rho(x, y) = x^2 + y^2$.

Esercizio 4 Stabilire per quali valori di $\alpha > 0$ la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} \left[\sin \left(\frac{1}{n^2} \right) - \sin^2 \left(\frac{1}{n} \right) - \frac{n^{\alpha}}{3} \right]$$

risulta assolutamente convergente.