

Prova Scritta di Matematica II

Secondo appello 08-07-2015

Svolgere almeno due dei seguenti esercizi giustificando il procedimento seguito.

Esercizio 1 Data l'equazione differenziale

$$y'' + (k + 2)y' + 2ky = 6x,$$

- a) Determinare, al variare di k la soluzione generale dell'equazione omogenea associata e dell'equazione completa
- b) Risolvere, per $k = 0$ il problema di Cauchy con dati iniziali $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.
- c) Per $k = 0$ determinare, se esistono, soluzioni tali che $y(0) = y'(0)$.

Esercizio 2 Data la funzione $f(x, y) = (x - 1)^{3/5}y^{4/3}$ stabilire per quali $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ la funzione è differenziabile e, se possibile, scrivere l'equazione del piano tangente ad f nel punto $(1, 0)$.

Esercizio 3 Determinare massimi e minimi relativi e, se esistono, assoluti della funzione

$$f(x, y) = x^2y + y^3 - 4xy$$

nel dominio $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 16, 108x^2 + 45y^2 < 972\}$

Esercizio 4 Un recipiente, dal peso trascurabile, ha la forma di un solido retto di base

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 1 \leq y \leq 1 - x, x \geq 0\}.$$

e altezza 1.

- a) Determinare le coordinate del baricentro del recipiente completamente riempito d'acqua ($\rho(x, y) = 1$)
- b) Supponiamo di riempire il recipiente con limatura metallica di densità $\rho(x, y) = 10$ fino ad una altezza h per poi riempirlo di acqua per la parte rimanente. Determinare h in modo che la distanza del baricentro dal piano xy sia la minima.