

Calcolare: $\lim_{n \rightarrow \infty} (3\sqrt[n]{2} - 2\sqrt[n]{3})^n$.

Abbiamo a che fare con una forma indeterminata del tipo " 1^∞ ".

Cerchiamo di scrivere il generico termine della successione in maniera più conveniente:

$$\begin{aligned} (3\sqrt[n]{2} - 2\sqrt[n]{3})^n &= (\sqrt[n]{2} + 2(\sqrt[n]{2} - \sqrt[n]{3}))^n = 2 \left[1 - 2 \frac{\sqrt[n]{3} - \sqrt[n]{2}}{\sqrt[n]{2}} \right]^n = \\ &= 2 \left[1 - 2 \left(\sqrt[n]{\frac{3}{2}} - 1 \right) \right]^n. \end{aligned}$$

Determiniamo le parti principali dell'infinitesimo $\sqrt[n]{\frac{3}{2}} - 1$:

$$\sqrt[n]{\frac{3}{2}} - 1 = e^{\frac{1}{n} \ln \frac{3}{2}} - 1 = \left\{ \frac{e^{\frac{1}{n} \ln \frac{3}{2}} - 1}{\frac{1}{n} \ln \frac{3}{2}} \right\} \frac{1}{n} \ln \frac{3}{2} = \frac{1}{n} \ln \frac{3}{2} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Quindi:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (3\sqrt[n]{2} - 2\sqrt[n]{3})^n &= \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \left[1 - 2 \left(\frac{1}{n} \ln \frac{3}{2} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right) \right]^n = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \left\{ \left[1 - \frac{1}{\frac{n}{2 \ln \frac{3}{2}}} \right] \left(-\frac{n}{2 \ln \frac{3}{2}} \right) \left(-2 \ln \frac{3}{2} \right) \right\} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} 2 e^{-2 \ln \frac{3}{2}} = 2 \cdot \frac{4}{9} = \frac{8}{9}. \end{aligned}$$

Nota: come sempre... il Giusti ha ragione! :D

Si osserva che si sarebbe anche potuto scrivere:

$$(3\sqrt[n]{2} - 2\sqrt[n]{3})^n = 3^n \cdot 2 \left(1 - \frac{2}{3}\sqrt[n]{\frac{3}{2}}\right)^n \quad \text{ed osservare che}$$

$$1 - \frac{2}{3}\sqrt[n]{\frac{3}{2}} \quad \text{tende a } \frac{1}{3}.$$

La conclusione $(3\sqrt[n]{2} - 2\sqrt[n]{3})^n \simeq 3^n \cdot 2 \cdot \frac{1}{3^n} = 2$ è però errata!

Si è infatti lasciato di riportare in che modo $1 - \frac{2}{3}\sqrt[n]{\frac{3}{2}}$ tende a $\frac{1}{3}$ (da sopra? da sotto? con che velocità?).

Essendo in presenza di una forma indeterminata del tipo " $0 \cdot \infty$ " $\left(3^n \cdot \frac{1}{(\rightarrow 3)^n}\right)$ l'espressione omessa è essenziale per il corretto calcolo del limite.

Scrivendo correttamente:

$$1 - \frac{2}{3}\sqrt[n]{\frac{3}{2}} = 1 - \frac{2}{3} e^{\frac{1}{2n} \ln \frac{3}{2}} = 1 - \frac{2}{3} \left(1 + \frac{\ln \frac{3}{2}}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

si arriva comunque alla conclusione corretta.