ESERCIZI SU OPERAZIONI TRA NUMERI COMPLESSI, POTENZE, RADICI

Esercizio 1: Eseguire le operazioni indicate esprimendo il risultato nella forma $a+ib$, $a,b\in\mathbb{R}$

a) $\dfrac{1-i}{1+i}$ d) $\dfrac{(1+2i)^3-(1-i)^3}{(3+2i)^3-(2+i)^2}$ g) $\dfrac{1+i\,tg\,\vartheta}{1-i\,tg\,\vartheta}$

b) $\dfrac{2}{1-3i}$ e) $\dfrac{(1-i)^5-1}{(1+i)^5+1}$ h) $\dfrac{(3+2i)(4-i)}{(2-i)^2}$

c) $(1+i\sqrt{3})^7$ f) $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{30}$ i) $\dfrac{(-1+i\sqrt{3})^{15}}{(1-i)^{20}}+\dfrac{(-1-i\sqrt{3})^{15}}{(1+i)^{20}}$

Esercizio 2: Esprimere i seguenti numeri complessi in forma trigonometrica

a) 5 d) $-(1+i)$ g) $\dfrac{i^{31}}{1-i}$

b) $\sqrt{3}-i$ e) $-\sqrt{3}+3i$ h) $\dfrac{1+i}{1+i\sqrt{3}}$

c) -12 f) $\dfrac{1-i}{2+2i\sqrt{3}}$ i) $\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1+i}$

Esercizio 3: Scrivere in forma cartesiana i numeri seguenti:

a) $5e^{0i}$ d) $\sqrt{2}\,e^{\frac{3}{4}\pi i}$ g) $\frac{1}{\sqrt{2}}\,e^{-\frac{3}{4}\pi i}$

b) $2\sqrt{3}\,e^{\frac{2}{3}\pi i}$ e) $\frac{1}{2}\,e^{\frac{\pi}{12}i}$ h) $e^{-\frac{\pi}{12}i}$

c) $12e^{\pi i}$ f) $\sqrt{2}\,e^{\frac{\pi}{6}i}$ i) $8e^{\frac{5}{12}\pi i}$

Esercizio 4: Determinare tutti e soli i numeri complessi tali che:

a) risultano essere coniugati al proprio quadrato

b) risultano essere coniugati al proprio cubo

Esercizio 5: Che condizione devono soddisfare tre numeri complessi z_1, z_2, z_3 per rappresentare tre punti allineati del piano complesso?

Esercizio 6: Calcolare le espressioni seguenti esprimendo il risultato in forma cartesiana.

a) $\sqrt[8]{-1}$ d) $\sqrt{3+4i}$ h) $\sqrt[3]{-2-2i}$

b) $\sqrt[6]{1}$ e) $\sqrt{12i-5}$ i) $\sqrt[6]{-8}$

c) $\sqrt[3]{i}$ f) $\sqrt{1-4\sqrt{3}i}$ j) $\sqrt[4]{24i-7}$

d) $\sqrt[4]{i}$ g) $\sqrt[5]{e^{\frac{5}{3}\pi i}}$ k) $\sqrt{3-i}$

[Suggerimento: possono essere utili le uguaglianze: $(\cos\theta)^2 = \frac{1+\cos\vartheta}{2}$, $(\sin\theta)^2 = \frac{1-\cos\vartheta}{2}$]

Esercizio 7: Risolvere le equazioni seguenti:

a) $z^2+5iz+6=0$ d) $z^2+z-1+3i=0$

b) $z^2+2(i-1)z+8-2i=0$ e) $z^2+5i|z|^2+6\bar{z}^2=0$

c) $4z^2-4iz+2i-1=0$ f) $z\bar{z}^3-2\bar{z}^2+8=0$

Esercizio 8: Determinare i vertici di un esagono regolare con centro nell'origine sapendo che uno dei vertici si trova in $1+i$

Esercizio 9: Tre numeri complessi z_1, z_2, z_3 soddisfano le condizioni:

$$z_1+z_2+z_3=0 \quad e \quad |z_1|=|z_2|=|z_3|=1.$$

Dimostrare che z_1, z_2, z_3 si trovano nei vertici di un triangolo equilatero inscritto nella circonferenza $|z|=1$.