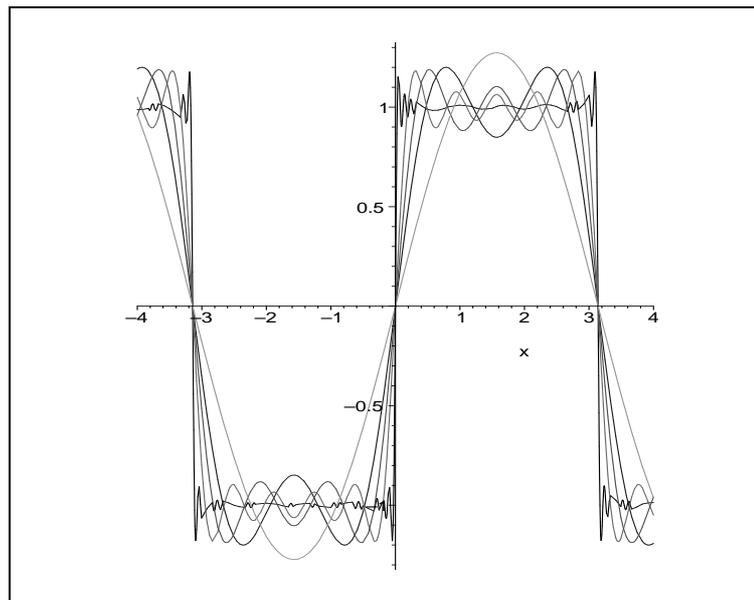


Metodi Matematici per l'Ingegneria dell'Informazione



1.1 Introduzione

Il primo gradino nello studio dei numeri è l'insieme \mathbb{N} dei numeri naturali in cui è sempre definita la somma di due numeri ma non sempre è possibile definire l'operazione inversa della somma ovvero la sottrazione.

L'insieme dei \mathbb{Z} dei numeri interi, positivi e negativi, è un ampliamento di \mathbb{N} in cui somma e sottrazione di due elementi sono sempre possibili. È sempre definito anche il prodotto fra due elementi di \mathbb{Z} ma non sempre siamo in grado di invertire la moltiplicazione.

Sono stati introdotti quindi altri ampliamenti dell'insieme dei numeri come ad esempio i razionali \mathbb{Q} (in cui se il divisore è diverso da zero è sempre possibile calcolare il rapporto tra due numeri ma non sempre si può invertire l'elevamento a potenza, ovvero espressioni come $\sqrt{2}$ o $\log_2 7$ non hanno significato in \mathbb{Q}).

È probabile che il più grande ampliamento dell'insieme dei numeri a voi noto sia l'insieme \mathbb{R} dei numeri reali. Anch'esso ha comunque dei limiti dal punto di vista computazionale, ad esempio non hanno senso $\sqrt{-2}$ o $\log_2(-7)$.

Perché siano sempre definite le inverse degli elevamenti a potenza (cioè radici e logaritmi) è necessario ampliare ulteriormente l'insieme dei numeri. L'ampliamento di \mathbb{R} che fa al caso nostro è l'insieme dei *numeri complessi*.

1.2 Soluzione delle equazioni algebriche di terzo grado

La necessità di ampliare ulteriormente l'insieme dei numeri era sicuramente sentita da Niccolò Tartaglia che nel 1535 riuscì a risolvere per via algebrica le equazioni di terzo grado.

La generica equazione di terzo grado è del tipo $ay^3 + by^2 + cy + d = 0$ ($a \neq 0$) ma mediante il cambio di incognita $y = x - b/(3a)$ può sempre essere scritta nella forma

$$x^3 + px + q = 0, \quad (1.1)$$

dove p e q sono espressioni dei coefficienti a, b, c, d .

L'idea di Tartaglia è di introdurre due variabili ausiliarie u e v tali che $x = u + v$. In questo modo, $x^3 = (u + v)^3 = u^3 + v^3 + 3uv(u + v) = (u^3 + v^3) + 3uvx$, ovvero

$$x^3 - (3uv)x - (u^3 + v^3) = 0.$$

Se confrontiamo quest'ultima con la (1.1) si vede subito che una possibile scelta per u e v è:

$$\begin{cases} -3uv = p \\ -(u^3 + v^3) = q \end{cases} \quad (1.2)$$

In altri termini, per determinare u e v (e quindi $x = u + v$) dobbiamo risolvere il sistema simmetrico (1.2) (cfr. un qualsiasi testo per il secondo anno della scuola superiore). Le soluzioni sono $(u_1^3, v_1^3) = (t_1, t_2)$ e $(u_2^3, v_2^3) = (t_2, t_1)$, dove

$$t_{1,2} = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

sono le radici della risolvente $t^2 + qt - p^3/27 = 0$ del sistema. Da entrambe le soluzioni del sistema si ottiene lo stesso valore di $x = u + v$, cioè:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \quad (1.3)$$

Abbiamo risolto l'equazione ma la formula (1.3) fornisce al più una soluzione e non tutte.

ESEMPIO 1.1 Consideriamo l'equazione $y^3 - 6y^2 + 11y - 6 = 0$; si verifica facilmente che può essere scritta $(y - 1)(y - 2)(y - 3) = 0$, ovvero che ha 3 soluzioni reali $y = 1, 2, 3$.

Facendo i calcoli per utilizzare la (1.3) ci si accorge però che

$$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0.$$

La formula (1.3) non fornisce quindi nessuna soluzione mentre invece sappiamo che l'equazione ne ammette tre reali.

Tartaglia non riuscì a superare questo problema. Ebbe successo invece Gerolamo Cardano qualche tempo dopo introducendo delle nuove quantità che oggi chiameremo numeri complessi e attribuendo un significato a ciascuna delle 2 radici nella (1.3) anche nel caso in cui il radicando è negativo. Si hanno 3 valori distinti per ciascuna delle 2 radici; t_1 e t_2 possono essere combinati in 9 modi ottenendo 3 valori distinti per la somma $u + v$ e quindi 3 soluzioni per l'equazione di partenza.

A Cardano si deve anche la notazione usata a tutt'oggi per i numeri complessi.

1.3 Aritmetica complessa

Definiamo **unità immaginaria** quella quantità i tale che $i^2 = -1$, ovvero quella quantità che soddisfa l'equazione $x^2 + 1 = 0$. In altre parole si potrebbe dire che $i = \sqrt{-1}$.

Possiamo utilizzare la definizione appena data per calcolare le radici quadrate dei numeri negativi, ad esempio, $\sqrt{-4} = \sqrt{(-1) \cdot 4} = i(\pm 2) = \pm 2i$

Definiamo poi **numeri complessi** tutte le espressioni del tipo $a + ib$ con $a, b \in \mathbb{R}$ e indichiamo con \mathbb{C} l'insieme di tutti i numeri complessi. Se $z = a + ib \in \mathbb{C}$ i *numeri reali* a e b si chiamano rispettivamente **parte reale** e **parte immaginaria** di z e si indicano con $\text{Re}(z)$ e $\text{Im}(z)$.

Volendo essere rigorosi, dovremo definire il significato del simbolo “+” nella notazione “ $a + ib$ ” dato che non sta a indicare la somma a cui siamo abituati. Non definiremo formalmente il suo significato ma, per fissare le idee lo si può pensare come una somma tra due

vettori ortogonali di lunghezze $|a|$ e $|b|$ rispettivamente. Dal punto di vista computazionale possiamo comunque trattarlo come una somma usuale.

Siano $z_1 = a_1 + ib_1$ e $z_2 = a_2 + ib_2$ due numeri complessi, definiamo alcune operazioni tra complessi:

- *Somma di due numeri complessi*

Se $z = z_1 + z_2$, definiamo $z = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$.

Per la somma di numeri complessi valgono le proprietà associative e commutativa.

- *Prodotto di due numeri complessi*

Se $z = z_1 z_2$, definiamo $z = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + a_2 b_1)$. In pratica trattiamo z_1 e z_2 come binomi e ne facciamo il prodotto tenendo conto però che $i^2 = -1$.

Per il prodotto di numeri complessi valgono le proprietà associative e commutativa.

- *Coniugato di un numero complesso*

Se $z = a + ib$, si dice **coniugato** di z e si indica con \bar{z} la quantità $a - ib$. In alcuni testi tecnici il coniugato di z è indicato con z^* .

Si osservi che $\operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}(\bar{z})$ e $\operatorname{Im}(z) = -\operatorname{Im}(\bar{z})$, quindi $\operatorname{Re}(z) = (z + \bar{z})/2$ e $\operatorname{Im}(z) = (z - \bar{z})/2i$. Infine, $\overline{\bar{z}} = z$.

- *Modulo di un numero complesso*

Se $z = a + ib$, si dice **modulo** di z la quantità $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. La similitudine con la norma del vettore (a, b) è evidente. Inoltre $|z|^2 = z\bar{z}$.

- *Quoziente di numeri complessi*

Per prima cosa calcoliamo il reciproco di un numero complesso. Sia $z_1 \neq 0$. Allora

$$\frac{1}{z_1} = \frac{\bar{z}_1}{z_1 \bar{z}_1} = \frac{\bar{z}_1}{|z_1|^2} = \frac{a_1 - ib_1}{a_1^2 + b_1^2}$$

Più in generale,

$$\frac{z_2}{z_1} = z_2 \frac{\bar{z}_1}{|z_1|^2} = \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + i(a_1 b_2 - b_1 a_2)}{a_1^2 + b_1^2}$$

Somma e prodotto godono delle stesse proprietà delle corrispondenti operazioni nel campo reale (prop. commutativa, associativa, distributiva). Inoltre si verifica facilmente che:

- $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$, $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$
- $|z| \geq 0$ per ogni $z \in \mathbb{C}$ e $|z| = 0$ se e solo se $z = 0$.
- $|z| = |\bar{z}|$, $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$, $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ (disug. triangolare)
- $|\operatorname{Re}(z)| \leq |z| \leq |\operatorname{Re}(z)| + |\operatorname{Im}(z)|$, $|\operatorname{Im}(z)| \leq |z| \leq |\operatorname{Re}(z)| + |\operatorname{Im}(z)|$

1.4 Rappresentazioni cartesiana e polare

Abbiamo già avuto modo di osservare che ad un numero complesso $z = a + ib \in \mathbb{C}$ è possibile associare il punto del piano cartesiano di coordinate (a, b) o, equivalentemente, il vettore che congiunge il punto (a, b) all'origine. Questo modo di scrivere e visualizzare i numeri complessi prende il nome di **rappresentazione cartesiana**, dato che usa un sistema di coordinate cartesiane per il piano.

Utilizzando la rappresentazione cartesiana, si possono rappresentare facilmente le operazioni di coniugio e di somma di due numeri complessi (vedi figura 1.1). La prima corrisponde ad una simmetria rispetto all'asse reale, la seconda alla somma di due vettori fatta con la regola del parallelogramma. La parte reale e la parte immaginaria di z non sono altro che le componenti del vettore (a, b) in questo sistema di riferimento.

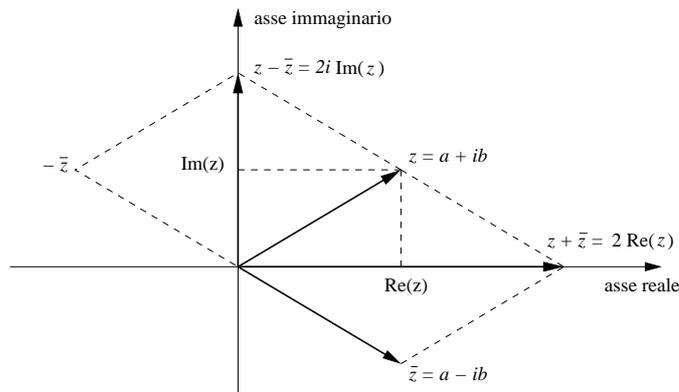


Figura 1.1 Rappresentazione cartesiana di coniugato, parte reale e parte immaginaria di un numero complesso.

Le coordinate cartesiane però non sono l'unico sistema di coordinate possibile per il piano complesso. La **rappresentazione polare** è il modo di rappresentare i numeri complessi a partire dalle coordinate polari. In coordinate polari il punto P che rappresenta il numero complesso z , è individuato dalle coordinate ρ e ϑ (fig 1.2): $P = (a, b) = (\rho \cos \vartheta, \rho \sin \vartheta)$ ovvero $z = \rho(\cos \vartheta + i \sin \vartheta)$. L'angolo ϑ si chiama **argomento** di z (in alcuni testi tecnici viene chiamato anche *fase*).

Per il passaggio dalla notazione cartesiana alla polare o viceversa, si osservi che valgono le uguaglianze seguenti:

$$\begin{cases} a = \rho \cos \vartheta \\ b = \rho \sin \vartheta \end{cases}$$

$$\begin{cases} \rho = |P - O| = \sqrt{a^2 + b^2} = |z| \\ \cos(\arg z) = \frac{a}{|z|} \\ \sin(\arg z) = \frac{b}{|z|} \end{cases}$$

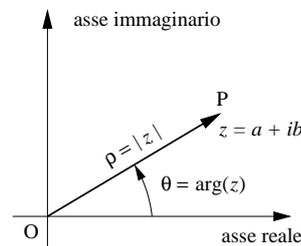


Figura 1.2 Rappresentazione polare di un numero complesso

Più semplicemente, se $a > 0$, $\arg(z) = \arctan(b/a)$.

Graficamente (fig 1.2), $\arg(z)$ è l'angolo formato dal segmento $P - O$ con il semiasse reale positivo. Essendo un angolo, $\arg(z)$ è definito a meno di multipli di 2π :

$$z = \rho(\cos \vartheta + i \sin \vartheta) = \rho(\cos(\vartheta + 2k\pi) + i \sin(\vartheta + 2k\pi));$$

Come intervallo di definizione di $\vartheta = \arg(z)$ possiamo prendere un qualunque intervallo di ampiezza 2π . Salvo diverso avviso, nel seguito considereremo $\vartheta = \arg(z) \in [-\pi, \pi)$.

In notazione polare il coniugio corrisponde al cambio di segno dell'argomento. La polare è una notazione poco adatta per calcolare le somme ma bene si presta per moltiplicazioni, divisioni e potenze. Siano $z_1 = \rho_1(\cos \vartheta_1 + i \sin \vartheta_1)$ e $z_2 = \rho_2(\cos \vartheta_2 + i \sin \vartheta_2)$,

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= \rho_1 \rho_2 (\cos \vartheta_1 + i \sin \vartheta_1) (\cos \vartheta_2 + i \sin \vartheta_2) = \\ &= \rho_1 \rho_2 ((\cos \vartheta_1 \cos \vartheta_2 - \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2) + i (\cos \vartheta_1 \sin \vartheta_2 + \cos \vartheta_2 \sin \vartheta_1)) = \\ &= \rho_1 \rho_2 (\cos(\vartheta_1 + \vartheta_2) + i \sin(\vartheta_1 + \vartheta_2)) \end{aligned}$$

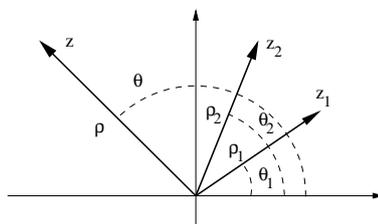


Figura 1.3 Prodotto di numeri complessi in rappresentazione polare.

$$z = z_1 \cdot z_2, \quad \rho = \rho_1 \rho_2, \quad \vartheta = \vartheta_1 + \vartheta_2.$$

Analogamente, se $z_2 \neq 0$,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} (\cos(\vartheta_1 - \vartheta_2) + i \sin(\vartheta_1 - \vartheta_2))$$

Dalle uguaglianze precedenti segue che

$$|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|, \quad \arg(z_1 z_2) \text{ "=" } \arg(z_1) + \arg(z_2)$$

e

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) \text{ "=" } \arg(z_1) - \arg(z_2)$$

dove con "=" si intende che al valore ottenuto andrà eventualmente sommato o sottratto 2π se vogliamo che l'argomento appartenga a $[-\pi, \pi]$ (formalmente avremo dovuto scrivere, ad esempio, $\arg(z_1 z_2) = [\arg(z_1) + \arg(z_2)] \bmod{2\pi - \pi}$).

Se $z_1 = z_2 = z$, in particolare otteniamo $z^2 = \rho^2(\cos(2\vartheta) + i \sin(2\vartheta))$; generalizzando ad un'esponente qualsiasi,

$$z^n = \rho^n (\cos(n\vartheta) + i \sin(n\vartheta)) \quad (1.4)$$

ci permette di calcolare le potenze (con esponente intero) di z .

1.5 Radici di un numero complesso

La formula (1.4) può essere utilizzata per definire le radici n -esime di un numero complesso: $w = \sqrt[n]{z}$ è definito come quel numero tale che $w^n = z$.

Siano $z = \rho_1(\cos \vartheta_1 + i \sin \vartheta_1)$, $w = \rho_2(\cos \vartheta_2 + i \sin \vartheta_2)$, allora, ricordando che ϑ è definito a meno di multipli interi di 2π ,

$$w^n = \rho_2^n(\cos(n\vartheta_2) + i \sin(n\vartheta_2)) = \rho_1(\cos(\vartheta_1 + 2k\pi) + i \sin(\vartheta_1 + 2k\pi)).$$

Confrontando le espressioni si ricava:

$$\rho_2 = \rho_1^{1/n}, \quad \vartheta_2 = \frac{\vartheta_1 + 2k\pi}{n} = \frac{\vartheta_1}{n} + \frac{2k}{n}\pi.$$

Abbiamo n valori distinti per ϑ_2 corrispondenti a $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$. Per $k = n$ otteniamo lo stesso valore che per $k = 0$:

$$w_k = \rho^{1/n} \left(\cos \left(\frac{\vartheta_i + 2k\pi}{n} \right) + i \sin \left(\frac{\vartheta_i + 2k\pi}{n} \right) \right), \quad k = 0, 1, \dots, n-1. \quad (1.5)$$

La radice n -esima di un numero complesso non nullo ha sempre esattamente n valori distinti che hanno tutti lo stesso modulo ed argomenti equidistanti. Se disegniamo gli n valori sul piano complesso e li congiungiamo fra loro con dei segmenti otteniamo un poligono regolare di n lati centrato nell'origine.

ESEMPIO 1.2 Calcoliamo i valori di $\sqrt[6]{i-1}$ e rappresentiamole nel piano complesso.

Scriviamo $i-1$ in forma trigonometrica:

$$i-1 = \sqrt{2} \left(\cos \left(\frac{3}{4}\pi \right) + i \sin \left(\frac{3}{4}\pi \right) \right)$$

Dalla (1.5) si ha:

$$w_k = \sqrt[6]{2} \left(\cos \left(\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{3} \right) \right)$$

per $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

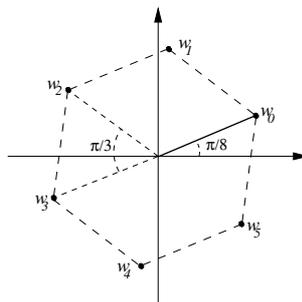


Figura 1.4 Radici seste di $i-1$.

Interpretando i numeri complessi come vettori del piano, la moltiplicazione per $\cos \vartheta + i \sin \vartheta$ corrisponde ad una rotazione del vettore di un angolo ϑ .

Per disegnare i valori ottenuti sarà sufficiente disegnarne uno ed ottenere gli altri per rotazioni successive di $\pi/3$ di questo. Si ottiene il diagramma in figura 1.4.

1.6 Funzioni trascendenti di un numero complesso

1.6.1 Esponenziale e logaritmo in \mathbb{C}

Ricordiamo lo sviluppo in serie di Taylor delle funzioni trigonometriche e dell'esponenziale reale:

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}. \quad (1.6)$$

Le tre serie convergono per ogni $x \in \mathbb{R}$ ed hanno una struttura molto simile. Sostituendo $-1 = i^2$ nelle serie di seno e coseno possiamo scrivere:

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} i^{2n} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{1}{i} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} i^{2n} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^{2n}}{(2n)!}.$$

Sommando,

$$\cos x + i \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!} \quad (1.7)$$

La serie (1.7) ha forti somiglianze con lo sviluppo di e^x tanto da suggerire di chiamare e^{ix} la sua somma.

Definiamo allora

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (1.8)$$

Resta da dare un significato a e^z nel caso in cui z sia un generico numero complesso e non immaginario puro. Estendiamo la definizione (1.8) in modo che continuino a valere le proprietà delle potenze: sia $z = a + ib$, definiamo

$$e^z = e^{a+ib} = e^a \cdot e^{ib} = e^a (\cos b + i \sin b). \quad (1.9)$$

Si osservi che se $b = 0$ (cioè se $z \in \mathbb{R}$) la definizione coincide con quella dell'esponenziale reale, ovvero abbiamo esteso il significato dell'esponenziale già nota. Inoltre,

$$|e^{ib}| = |\cos b + i \sin b| = 1 \quad \text{e quindi} \quad |e^z| = e^{\operatorname{Re} z}.$$

Fin'ora ci siamo occupati delle somiglianze tra esponenziale reale e complessa. Esaminiamo ora due importanti differenze tra i 2 casi:

- Nel caso complesso non è più vero che $e^z > 0$ e neppure che $\operatorname{Re}(e^z) > 0$; ad esempio $e^{\pi i} = -1$.
- L'esponenziale complessa è una funzione periodica di periodo $2\pi i$. Infatti

$$\begin{aligned} e^{z+2\pi i} &= e^{\operatorname{Re} z} (\cos(\operatorname{Im} z + 2\pi) + i \sin(\operatorname{Im} z + 2\pi)) = \\ &= e^{\operatorname{Re} z} (\cos \operatorname{Im} z + i \sin \operatorname{Im} z) = e^z, \quad \forall z \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Prima di passare a definire i logaritmi, osserviamo che possiamo utilizzare l'esponenziale per ricavare un altro metodo per rappresentare i numeri complessi. Se $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ è sempre possibile trovare uno $z \in \mathbb{C}$ tale che $w = e^z$. Se $w = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ è l'espressione di w in forma polare, è sempre definito $a = \log \rho$ e quindi $w = e^a (\cos \varphi + i \sin \varphi) = e^{a+i\varphi}$. Questo modo di scrivere i numeri complessi si chiama **rappresentazione esponenziale** e può risultare comoda per fare calcoli o risolvere equazioni.

A questo punto siamo pronti per definire il **logaritmo** di w come quel numero (o quei numeri) z tale che $e^z = w$. Il valore $a + i\varphi$ scritto sopra è un logaritmo di w ma non è l'unica soluzione di $e^z = w$. Se teniamo conto della periodicità di e^z , ci accorgiamo che tutti i numeri della forma $a + i\varphi + 2k\pi i$, per $k \in \mathbb{Z}$ sono logaritmi di w .

In definitiva, se $z = a + ib$

$$\begin{aligned} e^z &= e^a (\cos b + i \sin b) \\ \log(z) &= \log(|z|) + i \arg(z) + 2k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z} \end{aligned} \quad (1.10)$$

Il logaritmo di un numero complesso ha allora infiniti valori distinti. Il logaritmo non è una funzione nel senso classico del termine. È una funzione multivalore. Se fissiamo un valore di k una volta per tutte (cioè scegliamo quella che si chiama una **determinazione** del logaritmo), $\log(z)$ diventa una funzione vera e propria. Salvo diverso avviso sottintenderemo la scelta $k = 0$.

1.6.2 Funzioni trigonometriche e iperboliche in \mathbb{C}

Nel campo complesso ci sono delle relazioni che legano tra loro esponenziali, funzioni trigonometriche e iperboliche: da $e^{ib} = \cos b + i \sin b$ e $e^{-ib} = \cos b - i \sin b$ possiamo ricavare $\sin b$ e $\cos b$ sommando e sottraendo membro a membro:

$$\cos b = \frac{e^{ib} + e^{-ib}}{2}, \quad \sin b = \frac{e^{ib} - e^{-ib}}{2i} \quad (1.11)$$

Si nota una forte somiglianza con le funzioni iperboliche:

$$\cosh b = \frac{e^b + e^{-b}}{2}, \quad \sinh b = \frac{e^b - e^{-b}}{2}. \quad (1.12)$$

Nelle (1.11), b è la parte immaginaria di un numero complesso ovvero è un numero reale. Le (1.12) invece sono le definizioni delle funzioni iperboliche reali.

A partire da queste 4 uguaglianze, possiamo definire le funzioni trigonometriche e iperboliche di un numero complesso: se $z \in \mathbb{C}$, poniamo

$$\begin{aligned} \cos z &= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, & \sin z &= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \\ \cosh z &= \frac{e^z + e^{-z}}{2}, & \sinh z &= \frac{e^z - e^{-z}}{2}. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Le definizioni (1.13) si possono anche giustificare a partire dagli sviluppi in serie (1.6) e da

$$\sinh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \cosh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

con considerazioni analoghe a quanto fatto per giustificare la definizione di e^z . Inoltre si osservi che se $z \in \mathbb{R}$, le (1.13) coincidono con le definizioni date per i reali. Continuano a valere tutte le formule trigonometriche e iperboliche dimostrate per i numeri reali. Osserviamo infine che sussiste un legame tra funzioni trigonometriche e iperboliche:

$$\cosh(iz) = \cos z \quad \text{e} \quad \sinh(iz) = i \sin z.$$

1.7 Funzioni oloomorfe

Sia $A \subset \mathbb{C}$ e sia $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione a valori complessi. Se $z = x + iy$, esistono due funzioni $u(x + iy): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ e $v(x + iy): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tali che $f(z) = f(x + iy) = u(x + iy) + iv(x + iy)$; in altre parole, $u(z) = \operatorname{Re} f(z)$, $v(z) = \operatorname{Im} f(z)$. Per alcuni aspetti, una funzione $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ può essere interpretata come una funzione da \mathbb{R}^2 in \mathbb{R}^2 .

Le definizioni di limite e di continuità di f sono ereditate da quelle di \mathbb{R}^2 , quindi:

DEFINIZIONE 1.1 Sia $f: A \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ e sia $z_0 \in A$. Diciamo che $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w$, $w \in \mathbb{C}$, se $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ t.c. $|z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - w| < \varepsilon$

DEFINIZIONE 1.2 Sia $f: A \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. Diciamo che f è **continua** in $z_0 \in A$ se esiste il $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ e si ha $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$.

Sostituendo a z la coppia (x, y) , la definizione di limite appena data coincide esattamente con quella per \mathbb{R}^2 . La stessa considerazione vale anche per la definizione di continuità.

Si noti che $f : A \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ è continua se e solo se sono continue le funzioni da \mathbb{R}^2 in \mathbb{R} $u(z) = \operatorname{Re} f(z)$ e $v(z) = \operatorname{Im} f(z)$.

Continuano a valere i teoremi sui limiti già visti per \mathbb{R} e per \mathbb{R}^2 . Ad esempio il limite della somma è sempre la somma dei limiti ecc. ecc.

Le analogie col caso reale cessano quando si parla di derivabilità:

DEFINIZIONE 1.3 Sia $f : A \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. Diciamo che f è **derivabile** in senso complesso (o anche che f è **olomorfa**) in $z_0 \in A$ se esiste finito il limite

$$\ell = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

In tal caso ℓ si dice derivata di f in z_0 e si indica con $f'(z_0)$.

Equivalentemente, possiamo scrivere anche $f'(z_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$. Bisogna ricordarsi però che $h \in \mathbb{C}$ e che non possiamo limitarci ad incrementi h reali. Volendo comunque cercare analogie con il caso reale, è più appropriato il confronto con la differenziabilità che con la derivabilità. Anche nel caso complesso la derivabilità implica la continuità.

Teorema 1.1 Condizioni di Cauchy-Riemann Sia $f(z) = u(z) + iv(z)$ una funzione da \mathbb{C} in \mathbb{C} , e sia $z = x + iy$. La funzione f è differenziabile in z (derivabile in senso complesso) se e solo se le funzioni u e v sono differenziabili in senso reale nel punto (x, y) e soddisfano le condizioni

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \quad (1.14)$$

OSSERVAZIONE 1.1 Le condizioni (1.14) si dicono *condizioni di Cauchy-Riemann*; a volte si trovano scritte nella forma

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{i} \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Verificare per esercizio che le due notazioni sono equivalenti.

Dimostrazione del teorema 1.1. Scegliamo un incremento h reale, $h = t + 0i$, e calcoliamo il rapporto incrementale di f :

$$f'(z) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(z+t) - f(z)}{t} = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}$$

D'altra parte, se scegliamo un incremento immaginario puro $h = 0 + it$,

$$f'(z) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(z+it) - f(z)}{it} = \frac{1}{i} \frac{\partial f}{\partial y} = -i \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Dall'ipotesi di derivabilità di f in senso complesso le due espressioni ottenute per $f'(z)$ devono essere uguali e quindi:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = -i \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Separando parte reale e parte immaginaria nell'uguaglianza precedente si trovano le (1.14).

La differenziabilità di f segue facilmente dalla derivabilità di f in senso complesso e da $df = du + idv$.

Viceversa, supponiamo che valgano le (1.14) e che u e v siano differenziabili in senso reale. Allora:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + A, \quad dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy + B.$$

con $A = \alpha_1 dx + \alpha_2 dy$ e $B = \beta_1 dx + \beta_2 dy$ e $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \rightarrow 0$ quando $dx, dy \rightarrow 0$ (dalla definizione di differenziale per le funzioni reali).

Per le condizioni di Cauchy-Riemann si ha:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx - \frac{\partial v}{\partial x} dy + A, \quad dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy + B.$$

cioè

$$df = du + idv = \left(\frac{du}{dx} + i \frac{dv}{dx} \right) dz + \varepsilon dz,$$

dove $\varepsilon = (\alpha_1 + i\beta_1) \frac{dx}{dz} + (\alpha_2 + i\beta_2) \frac{dy}{dz}$. Ma $|\varepsilon| \leq |\alpha_1| + |\alpha_2| + |\beta_1| + |\beta_2| \rightarrow 0$ quando $dz \rightarrow 0$. Quindi il limite

$$f'(z) = \lim_{dz \rightarrow 0} \frac{f(z+dz) - f(z)}{dz} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} + \lim_{dz \rightarrow 0} \varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}$$

esiste ed è finito. Questo significa che f è derivabile in senso complesso. \square

OSSERVAZIONE 1.2 La derivabilità in senso complesso è un requisito molto più forte della differenziabilità in \mathbb{R}^2 . Sia $z = x + iy$, se $f = u + iv$ è differenziabile in senso complesso, per le (1.14) la matrice jacobiana di f è ortogonale (cioè le righe - o le colonne - sono ortogonali fra loro).

OSSERVAZIONE 1.3 Una funzione olomorfa è determinata a meno di una costante additiva se ne conosciamo soltanto la sua parte reale o soltanto la sua parte immaginaria.

ESEMPIO 1.3 Determinare le funzioni olomorfe tali che $\operatorname{Re}(f) = x$.

Sappiamo che $u(x, y) = x$ e che valgono le condizioni di Cauchy-Riemann. Allora

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 1 \\ \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v(x, y) = y + c(x) \\ \frac{\partial v}{\partial x} = c'(x) = 0 \Rightarrow c(x) = c \text{ (costante reale)} \end{cases}$$

Quindi $v(x, y) = y + c$ e $f(z) = x + iy + ic = z + ic$ con $c \in \mathbb{R}$.

OSSERVAZIONE 1.4 Derivando le condizioni di Cauchy-Riemann in ∂x e ∂y rispettivamente, si ha:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y},$$

Quindi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \quad (1.15)$$

Il primo membro della (1.15) si chiama **laplaciano** di u e si indica con Δu . Le funzioni tali che $\Delta u = 0$ si dicono **funzioni armoniche**. Se $f = u + iv$ è olomorfa, u è armonica. Verificare per esercizio che anche v è armonica, ovvero che anche $\Delta v = 0$.

Due funzioni u e v legate tra loro dalle condizioni di Cauchy-Riemann si dicono **coniugate**. Abbiamo visto che la matrice jacobiana J della f è ortogonale. Le righe di J sono i gradienti delle funzioni u e v . Questo significa che in ogni punto (x, y) del dominio di f , $\langle \nabla u, \nabla v \rangle = 0$. In particolare, poichè il gradiente di una funzione è sempre ortogonale alle sue linee di livello abbiamo che le linee di livello di u e v passanti per il punto (x, y) si intersecano fra loro ortogonalmente.

1.8 Serie di potenze

DEFINIZIONE 1.4 Chiamiamo **serie di potenze** di centro z_0 la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad (1.16)$$

con $z \in \mathbb{C}$ e $a_n \in \mathbb{C} \forall n \in \mathbb{N}$.

DEFINIZIONE 1.5 Diciamo che la serie di potenze (1.16) **converge semplicemente** in $z = \hat{z}$ se converge la serie numerica $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (\hat{z} - z_0)^n$.

Diciamo che la serie di potenze (1.16) **converge assolutamente** in $z = \hat{z}$ se converge la serie numerica $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| |\hat{z} - z_0|^n$.

Diciamo che la serie di potenze (1.16) **converge uniformemente** in un insieme K chiuso e limitato se converge la serie numerica $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ dove $b_n = \sup_{z \in K} |a_n (z - z_0)^n|$.

Si vede facilmente che la convergenza assoluta e la convergenza uniforme implicano la convergenza semplice.

Un importante risultato sulla convergenza delle serie di potenze è il

Lemma 1.1 (di Abel)

Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ una serie di potenze su \mathbb{C} e sia $\hat{z} \in \mathbb{C}$ tale che la serie converga semplicemente in \hat{z} . Allora, $\forall r \in \mathbb{R}^+$ tale che $0 < r < |\hat{z} - z_0|$ la serie converge uniformemente in $\overline{B(z_0, r)} = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r\}$.

Dimostrazione. Per semplicità supponiamo $z_0 = 0$. Se $\hat{z} = 0$ non c'è niente da dimostrare. Se $\hat{z} \neq 0$ e $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \hat{z}^n$ converge, allora deve essere $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \hat{z}^n = 0$. La successione $|a_n \hat{z}^n|$ è limitata e quindi esiste un M tale che $|a_n \hat{z}^n| < M$. Sia ora $z \in \overline{B(0, r)}$,

$$|a_n z^n| = \left| a_n \cdot \hat{z}^n \frac{z^n}{\hat{z}^n} \right| = |a_n \hat{z}^n| \cdot \left| \frac{z^n}{\hat{z}^n} \right| \leq M \cdot \left| \frac{r}{\hat{z}} \right|^n.$$

Se $k = |r/\hat{z}|$, $0 < k < 1$ e quindi $|a_n z^n| < M k^n$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \cdot |z^n| \leq M \sum_{n=0}^{\infty} k^n = \frac{M}{1 - k}$$

ovvero la somma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge uniformemente per ogni $z \in \overline{B(0, r)}$. \square

DEFINIZIONE 1.6 Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ una serie di potenze. Indichiamo con $A = \{\hat{z} \in \mathbb{C} : \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n \text{ converge semplicemente in } \hat{z}\}$. L'insieme $D = \overset{\circ}{A}$ si dice **dominio di convergenza** della serie.

DEFINIZIONE 1.7 Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ una serie di potenze con dominio di convergenza D . Chiamiamo **raggio di convergenza** della serie il numero reale $\rho = \sup_{z \in D} |z - z_0|$.

OSSERVAZIONE 1.5 Indichiamo con ρ il raggio di convergenza della serie. Allora $D = B(z_0, \rho)$. Inoltre, $D \subseteq A \subseteq \overline{D}$. Come conseguenza di questo,

- se $\rho = 0$ la serie converge solo per $z = z_0$;
- se $0 < \rho < \infty$, la serie converge assolutamente per $|z - z_0| < \rho$ e non converge per $|z - z_0| > \rho$;
- se $\rho = \infty$ la serie converge assolutamente per ogni $z \in \mathbb{C}$.

La proposizione seguente caratterizza il raggio di convergenza di una serie di potenze.

Lemma 1.2 Sia $x \in \mathbb{R}$, $b_n \in \mathbb{R}$. Sia

$$R = \begin{cases} 0 & \text{se } \ell = \infty \\ 1/\ell & \text{se } 0 < \ell < \infty \\ \infty & \text{se } \ell = 0 \end{cases} .$$

dove $\ell = \maxlim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|b_n|}$. La serie $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ converge per tutti gli x con $|x| < R$; diverge per tutti gli x con $|x| > R$.

Dimostrazione. Supponiamo $0 < \ell < \infty$. Se $|x| < R$, per il criterio della radice,

$$\maxlim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|b_n x^n|} = |x| \maxlim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|b_n|} = \frac{|x|}{R} = k < 1.$$

Quindi $\left| \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \right| < \sum_{n=0}^{\infty} k^n = \frac{1}{1-k}$ e la serie è convergente in x .

Sia ora $|x| > R$; esiste $\varepsilon > 0$ tale che $|x| > (1 + \varepsilon)R > R$.

$$\maxlim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|b_n x^n|} > \maxlim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|b_n ((1 + \varepsilon)R)^n|} = (1 + \varepsilon)R \maxlim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|b_n|} = 1 + \varepsilon > 1.$$

Per le proprietà del massimo limite, per infiniti valori di n si ha $|b_n x^n| > (1 + \varepsilon)^n$; il generico termine della serie non tende a zero e quindi la serie non è convergente.

La dimostrazione nei casi in cui $\ell = 0$ o $\ell = \infty$ è lasciata per esercizio. \square

Proposizione 1.1 (formula di Hadamard)

Sia $z \in \mathbb{C}$, siano $a_n \in \mathbb{C}$ e sia $\ell = \maxlim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$; sia R il raggio di convergenza della serie reale $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| x^n$. Se ρ è il raggio di convergenza della serie complessa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ allora $\rho = R$, cioè

$$\rho = \begin{cases} 0 & \text{se } \ell = \infty \\ 1/\ell & \text{se } 0 < \ell < \infty \\ \infty & \text{se } \ell = 0 \end{cases} .$$

Dimostrazione. La dimostrazione nel caso in cui $\ell = 0$ o $\ell = \infty$ è poco interessante e la tralascieremo. Sia $0 < \ell < \infty$; senza perdere di generalità supponiamo $z_0 = 0$.

Sia $|z| < R$, per il criterio della radice,

$$\maxlim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n z^n|} = |z| \maxlim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{|z|}{R} = k < 1.$$

La serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ è assolutamente convergente per $|z| < R$ e quindi $\rho \geq R$.

Supponiamo per assurdo che $\rho > R$. Esiste $z \in \mathbb{C}$ tale che $R < |z| < \rho$. Sia $x = |z|$, poiché $x < \rho$, per il lemma di Abel la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge uniformemente in $\overline{B(0, x)}$; in particolare $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| x^n = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ è convergente.

D'altra parte, $x > R$ dove R è il raggio di convergenza della serie reale e quindi la serie $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| x^n$ deve essere divergente. Siamo arrivati ad una contraddizione ovvero è assurdo supporre che $\rho > R$. Segue $\rho = R$. \square

OSSERVAZIONE 1.6 Se i coefficienti a_n della serie sono definitivamente diversi da zero ed esiste il limite $\rho' = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$ allora $\rho' = \rho$.

ESERCIZIO 1.1 Utilizzare la formula di Hadamard per verificare che

- i) la serie $\sum_{n=0}^{\infty} n! z^n$ converge solo per $z = 0$;
- ii) il raggio di convergenza di $\sum_{n=0}^{\infty} n z^n$ è 1;
- iii) la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ converge per ogni $z \in \mathbb{C}$.

Occupiamoci ora della regolarità delle funzioni che sono somma di una serie di potenze.

Proposizione 1.2 Se la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ ha raggio di convergenza $\rho \neq 0$, la somma $f(z)$ della serie è una funzione continua.

Dimostrazione. Indichiamo con $f_n(z)$ la somma parziale n -esima della serie (1.16). Le funzioni $f_n(z) = \sum_{k=0}^n a_k (z - z_0)^k$ sono polinomi di grado n e quindi sono continue.

Siano $z_1, z_2 \in D$. Per la continuità di f_n , $\forall \varepsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che $|f_n(z_1) - f_n(z_2)| < \varepsilon/3$ quando $|z_1 - z_2| < \delta$. Inoltre,

$$|f(z) - f_n(z)| < \sum_{k=n+1}^{\infty} b_k, \quad \text{dove } b_k = \sup_{z \in K} |a_k (z - z_0)^k|.$$

Per il lemma di Abel, la serie converge uniformemente in D esiste un n_0 tale che $\forall n > n_0$, $\sum_{k=n+1}^{\infty} b_k < \varepsilon/3$. Riassumendo, per ogni $\varepsilon > 0$ posso sempre trovare un $\delta > 0$ ed un $n_0 \in \mathbb{N}$ tali che per $z_1, z_2 \in D$ e $n > n_0$,

$$\begin{aligned} |f(z_1) - f(z_2)| &\leq |f(z_1) - f_n(z_1)| + |f_n(z_1) - f_n(z_2)| + |f_n(z_2) - f(z_2)| \leq \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

In altre parole la funzione $f(z)$, somma della serie, è continua in ogni $z_1 \in D$. \square

Proposizione 1.3 Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ una serie di potenze con raggio di convergenza $\rho > 0$; indichiamo con $f(z)$, per $|z| < \rho$, la somma della serie.

La serie delle derivate $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ ha ancora raggio di convergenza ρ e si ha

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}. \quad (1.17)$$

Più in generale, la serie $\sum_{n=h}^{\infty} n(n-1) \cdots (n-h+1) a_n z^{n-h}$ ha ancora raggio di convergenza ρ e si ha

$$f^{(h)}(z) = \sum_{n=h}^{\infty} n(n-1) \cdots (n-h+1) a_n z^{n-h}. \quad (1.18)$$

Dimostrazione. Riscalando l'indice della serie di una unità, la serie delle derivate si può scrivere come $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} z^n$. Per calcolarne il raggio di convergenza con la formula di Hadamard dobbiamo calcolare

$$\ell = \maxlim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{(n+1) a_{n+1}}.$$

La successione $\sqrt[n]{n+1}$ ha limite e $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n+1} = 1$ e quindi,

$$\ell = \maxlim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{(n+1) a_{n+1}} = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n+1} \right) \cdot \maxlim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_{n+1}} = 1 \cdot R = R.$$

Con calcoli del tutto analoghi possiamo dimostrare che la serie delle derivate n -esime e quella delle derivate $(n+1)$ -esime hanno lo stesso raggio di convergenza. Per il principio di induzione sull'ordine di derivazione, la serie $\sum_{n=h+1}^{\infty} n(n-1) \cdots (n-h) a_n z^{n-h}$ ha lo stesso raggio di convergenza ρ della serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.

Sia ora $g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ e sia h piccolo a sufficienza perché esista un $r < \rho$ tale che sia $|z|$ che $|z+h|$ siano più piccoli di r ; dimostreremo che $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} - g(z) = 0$.

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} - g(z) = \frac{1}{h} \sum_{n=1}^{\infty} a_n [(z+h)^n - z^n] - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}.$$

La serie a secondo membro ha raggio di convergenza ρ , inoltre

$$(z+h)^n - z^n = (z+h-z)((z+h)^{n-1} + (z+h)^{n-2}z + \dots + z^{n-1}) = h \sum_{k=0}^{n-1} (z+h)^{n-1-k} z^k.$$

Sostituendo,

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} - g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left[\sum_{k=0}^{n-1} (z+h)^{n-1-k} z^k - n z^{n-1} \right] = \sum_{n=0}^{\infty} b_n$$

Quest'ultima serie è maggiorata da $\sum_{n=1}^{\infty} 2n |a_n| r^n$ (abbiamo utilizzato la disuguaglianza triangolare) e quindi è convergente dato che $r < \rho$. Fissato un $\varepsilon > 0$ esiste un n_0 tale che

$$\left| \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n [(z+h)^{n-1} + (z+h)^{n-2}z + \dots + z^{n-1} - n z^{n-1}] \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ricordiamo che

$$(z+h)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} h^k z^{n-k} = z^n + n h z^{n-1} + n(n-1) h^2 z^{n-2} + o(h^2).$$

Di conseguenza $b_n = (z+h)^{n-1} + (z+h)^{n-2}z + \dots + z^{n-1} - nz^{n-1}$ è un polinomio privo del termine noto (che quindi si annulla per $h=0$). Esiste allora un δ tale che se $|h| < \delta$,

$$\left| \sum_{n=0}^{n_0-1} a_n [(z+h)^{n-1} + (z+h)^{n-2}z + \dots + z^{n-1} - nz^{n-1}] \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Facendo tendere ε a zero segue la (1.17). La (1.18) si dimostra facilmente mediante il principio di induzione. \square

1.9 Funzioni analitiche complesse

DEFINIZIONE 1.8 Una funzione $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ si dice **analitica complessa** su $\Omega \subset \mathbb{C}$ se per ogni $z_0 \in \Omega$ esistono degli $a_n \in \mathbb{C}$ ed un intorno U di z_0 tali che $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ per ogni $z \in U$.

OSSERVAZIONE 1.7 In base alla proposizione (1.3) una funzione analitica complessa è derivabile in senso complesso ovvero è olomorfa. Nel paragrafo 1.12 vedremo che è vero anche il viceversa cioè che una funzione olomorfa è analitica in senso complesso.

La classe delle funzioni analitiche complesse e la classe delle funzioni olomorfe coincidono.

Lemma 1.3 Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ convergente in $\Omega \subset \mathbb{C}$ e sia $h(z)$ la sua somma. Se esiste una successione $z_n \rightarrow z_0$ a valori in Ω , $z_n \neq z_0$ per ogni n e tale che $h(z_n) = 0$ per ogni n .

Allora la serie è identicamente nulla.

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che esista un k tale che $a_k \neq 0$. Sia k_0 il più piccolo valore di k per cui $a_k \neq 0$, allora

$$h(z) = (z-z_0)^{k_0} \sum_{n=0}^{\infty} a_{k_0+n} (z-z_0)^n.$$

La serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_{k_0+n} (z-z_0)^n$ ha lo stesso raggio di convergenza della serie di partenza.

La funzione $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{k_0+n} (z-z_0)^n$ è continua, definita in tutto Ω e $g(z_0) \neq 0$. Per la continuità esiste un intorno U di z_0 in cui $g(z) \neq 0$. Poiché $(z-z_0)^{k_0} \neq 0$ per ogni $z \neq z_0$, in $U \setminus \{z_0\}$ si ha $h(z) = (z-z_0)^{k_0} g(z) \neq 0$. Ma $z_n \rightarrow z_0$ quindi esiste un n_0 tale che $z_n \in U$ per ogni $n > n_0$, cioè $h(z_n) \neq 0$ per $n > n_0$ ma questo è assurdo. Quindi $a_k = 0$ per ogni k e la serie è identicamente nulla.

Corollario 1.1 Se $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ non è la funzione identicamente nulla ed $f(z_0) = 0$ allora z_0 è uno zero isolato.

Per semplicità di trattazione ometteremo la dimostrazione del teorema seguente. Si tratta comunque del risultato più importante riguardo le funzioni analitiche complesse anche per le sue molte conseguenze.

Teorema 1.2 (principio di identità delle funzioni analitiche)

Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ aperto connesso e siano f, g analitiche complesse su Ω . Sia $N = \{z \in \Omega \text{ tali che } f(z) = g(z)\}$. Ci sono due possibilità:

i) $N = \Omega$, cioè $f(z) = g(z)$ su tutto Ω ;

ii) N non ha punti di accumulazione in Ω cioè è formato da punti isolati.

Corollario 1.2 Se $f(z)$ è analitica complessa e non identicamente nulla allora i suoi zeri sono isolati.

Corollario 1.3 Se f, g sono analitiche complesse e coincidono su \mathbb{R} allora coincidono su tutto \mathbb{C} .

Quindi se $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è analitica esiste una sola estensione analitica $g: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ tale che g coincide con f su \mathbb{R} .

Il corollario precedente fornisce una motivazione rigorosa per le definizioni (1.9), (1.13) date nel paragrafo 1.6 per l'esponenziale complessa e per le funzioni trigonometriche e iperboliche. Le funzioni definite dalle (1.9), (1.13) sono analitiche complesse e, se valutate per z reale, coincidono con le omologhe reali. In base al corollario precedente le definizioni date sono le uniche possibili se si vuole mantenere l'analiticità delle funzioni.

Concludiamo il paragrafo con una importante osservazione. Sia $\Omega \in \mathbb{C}$ un insieme aperto e sia $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ analitica complessa in $z_0 \in \Omega$. Allora $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ in un opportuno intorno U di z_0 . Derivando successivamente termine a termine la serie si ha:

$$f(z_0) = a_0, \quad f'(z_0) = a_1, \quad f''(z_0) = 2a_2, \quad \dots, \quad f^n(z_0) = n! a_n.$$

Cioè $a_n = \frac{f^n(z_0)}{n!}$. Se f è analitica complessa il suo sviluppo in serie di potenze coincide con la sua serie di Taylor.

1.10 Integrazione nel campo complesso

DEFINIZIONE 1.9 Diciamo che γ è una **curva regolare** (o un cammino regolare) in \mathbb{C} se $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ è una funzione di classe C^1 intesa come $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. L'insieme descritto da $\gamma(t)$ al variare di $t \in [a, b]$ si dice **traccia** (o sostegno) di γ . Una curva si dice **chiusa** se $\gamma(a) = \gamma(b)$, si dice **semplice** se sono iniettive le restrizioni di γ agli insiemi $[a, b]$ e $(a, b]$.

DEFINIZIONE 1.10 Sia $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione continua e sia $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ una curva regolare a tratti la cui traccia sia contenuta in A . Chiamiamo **integrale di f sulla curva γ** la quantità:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f &= \int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt = \\ &= \int_a^b (u(x, y) dx - v(x, y) dy) + i \int_a^b (v(x, y) dx + u(x, y) dy). \end{aligned}$$

ESEMPIO 1.4 $\gamma : t \rightarrow z_0 + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi)$ è un cammino regolare, chiuso, semplice la cui traccia è la circonferenza di centro z_0 e raggio r .

$$\int_{\gamma} z dz = \int_0^{2\pi} (z_0 + re^{it})re^{it} dt = \int_0^{2\pi} irz_0e^{it} + ir^2e^{2it} dt = 0$$

dato che e^{it} è una funzione periodica di periodo 2π .

DEFINIZIONE 1.11 Se $\gamma : t \in [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ è una curva regolare, indicheremo con $\gamma^- : t \rightarrow \mathbb{C}$ la curva regolare con la stessa traccia di γ ma percorsa in senso opposto. Ad esempio, un modo di scrivere γ^- è $\gamma^-(t) = \gamma((a+b) - t)$.

Cambi di parametro ammissibili Sia $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ una curva regolare e sia $t = \varphi(\tau)$ una funzione C^1 definita su un intervallo $[\alpha, \beta]$ e tale che, $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$, $\varphi'(\tau) > 0$ $\forall \tau$. La curva $\gamma_1 = \gamma \circ \varphi$, $\gamma_1 : \tau \rightarrow \gamma(\varphi(\tau))$, $\tau \in [\alpha, \beta]$ si dice dedotta da γ mediante un cambio di parametro (che conserva l'orientamento dato che $\varphi'(\tau) > 0$).

Si osservi che anche φ^{-1} è un cambio di parametro ammissibile. Si può dimostrare che la relazione tra due curve deducibili tramite un cambio di parametro ammissibile è di equivalenza.

Proprietà dell'integrale complesso esteso ad una curva

i) Linearità:

$$\int_{\gamma} c_1 f_1 + c_2 f_2 = c_1 \int_{\gamma} f_1 + c_2 \int_{\gamma} f_2, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{C}$$

ii) Cambio di orientamento:

$$\int_{\gamma^-} f = - \int_{\gamma} f \quad (1.19)$$

iii) Invarianza per equivalenza:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f &= \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t) dt = \int_a^b f(\gamma(\varphi(\tau)))\gamma'(\tau)\varphi'(\tau) dt = \\ &= \int_a^b f((\gamma \circ \varphi)(\tau))(\gamma \circ \varphi)'(\tau) dt = \int_{\gamma \circ \varphi} f \end{aligned}$$

iv) Additività rispetto al cammino di integrazione. Indichiamo con $\gamma = \gamma_1 \gamma_2$ la curva ottenuta concatenando i cammini γ_1 e γ_2 . Allora

$$\int_{\gamma} f = \int_{\gamma_1} f + \int_{\gamma_2} f$$

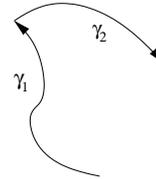


Figura 1.5 Concatenazione di due cammini: $\gamma = \gamma_1 \circ \gamma_2$

- v) Stima “ML”. Se $M = \max\{|f(\gamma(t))|, t \in [a, b]\}$ e se L è la lunghezza della curva γ , allora

$$\left| \int_{\gamma} f \right| \leq M \cdot L.$$

Dimostrazione.

$$\left| \int_{\gamma} f \right| = \left| \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(\gamma(t))| \cdot |\gamma'(t)| dt \leq M \int_a^b |\gamma'(t)| dt = M \cdot L$$

- vi) Siano $f_n : A \rightarrow \mathbb{C}$ funzioni continue e sia γ un cammino regolare a tratti con traccia contenuta in A . Se la successione f_n converge uniformemente ad una funzione $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ sui punti della traccia di γ , allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\gamma} f_n(z) dz = \int_{\gamma} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z) dz = \int_{\gamma} f(z) dz$$

1.11 Primitive

DEFINIZIONE 1.12 Sia $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ continua in $A \subseteq \mathbb{C}$. Diciamo che $F : A \rightarrow \mathbb{C}$ è una **primitiva** di f se F è derivabile in senso complesso in A e $\forall z \in A$ vale $F'(z) = f(z)$.

Proposizione 1.4 Sia $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ continua in $A \subseteq \mathbb{C}$. Sia F una primitiva di f . Sia poi $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ un cammino regolare con traccia contenuta in A .

Allora:

$$\int_{\gamma} f = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f &= \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t) dt = \int_a^b F'(\gamma(t))\gamma'(t) dt = \\ &= \int_a^b d(F \circ \gamma)(t) dt = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)). \end{aligned}$$

□

OSSERVAZIONE 1.8 Se γ è una curva chiusa allora $\gamma(a) = \gamma(b)$. Se f ammette primitiva su \mathbb{C} allora $\int_{\gamma} f = 0$.

ESEMPIO 1.5 Sia $\gamma : t \rightarrow re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ e sia $f(z) = 1/z$. Calcoliamo

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{re^{it}} ire^{it} dt = \int_0^{2\pi} i dt = 2\pi i.$$

La curva γ (fig. 1.6) è chiusa; se $f(z)$ ammettesse una primitiva in un qualunque insieme Ω contenente la traccia di γ , l'integrale dovrebbe essere nullo. Questo significa che $1/z$ non ammette primitiva in un tale Ω .

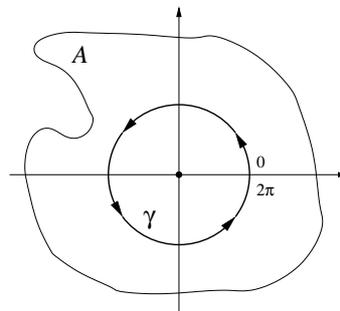


Figura 1.6

ESEMPIO 1.6 $f(z) = 1/z$ ammette primitiva in $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{\operatorname{Re} z < 0, \operatorname{Im} z = 0\}$.

Una primitiva può essere calcolata come integrale tra un punto fissato del piano e z , indipendentemente dal cammino in Ω che li unisce.

Fissiamo ad esempio $z_0 = 1$ come punto di riferimento. Siano $A = |z|$, $B = z/|z|$ (vedi fig. 1.7); allora

$$\begin{aligned} \int_1^z \frac{1}{w} dw &= \int_1^A \frac{1}{w} dw + \int_A^z \frac{1}{w} dw = \\ &= \log(A) - \log(1) + \int_0^{\arg(z)} (Ae^{i\vartheta})^{-1} i A e^{i\vartheta} d\vartheta = \log|z| + i \arg(z) \end{aligned}$$

Si può verificare che calcolando l'integrale su un percorso diverso otteniamo lo stesso risultato. Ad esempio,

$$\int_1^z \frac{1}{w} dw = \int_1^B \frac{1}{w} dw + \int_B^z \frac{1}{w} dw = \log|z| + i \arg(z)$$

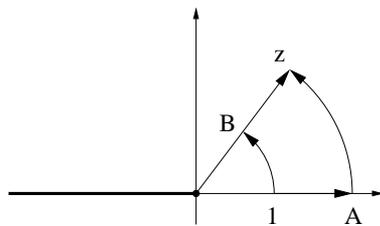


Figura 1.7 Indipendenza dal cammino per il calcolo della primitiva di $1/z$ in $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{\operatorname{Re} z < 0, \operatorname{Im} z = 0\}$

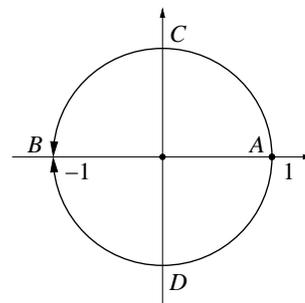


Figura 1.8 Non è possibile definire la primitiva di $1/z$ in tutto $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$

Posso definire $F(z) = \log|z| + i \arg(z)$ per tutti gli $z \in \mathbb{C}$ tranne per quelli del semiasse negativo. Se cercassi di definire la primitiva su tutto il piano, allora (fig. 1.8)

$$F(-1) = \int_{A\widehat{C}B} \frac{1}{w} dw = \pi i, \quad \text{ma anche} \quad F(-1) = \int_{A\widehat{D}B} \frac{1}{w} dw = -\pi i,$$

arrivando ad una contraddizione.

La proposizione seguente caratterizza le situazioni in cui è possibile definire la primitiva di una funzione f .

Proposizione 1.5 Sia $f : A \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, con A aperto connesso. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

- i) f ammette primitiva in A ;
- ii) l'integrale di f su ogni cammino γ regolare a tratti, con traccia contenuta in A , dipende solo dagli estremi di integrazione;
- iii) l'integrale di f è nullo su ogni curva γ chiusa continua e regolare a tratti con traccia contenuta in A .

1.12 Teorema e di Cauchy e sue conseguenze

Quando scriviamo l'integrale di una funzione lungo un cammino γ è necessario specificare il verso di percorrenza della curva (cfr. proprietà (1.19)). Conviene stabilire una volta per tutte un orientamento privilegiato per i cammini e riferirsi a questo a meno che non sia diversamente specificato.

Teorema 1.3 (di Jordan) *Sia $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ una curva continua, semplice, chiusa. Il complementare della sua traccia ($\mathbb{C} \setminus \gamma([a, b])$) è l'unione di due aperti disgiunti e connessi di cui uno è limitato.*

Il teorema 1.3 suggerisce un modo di scegliere l'orientamento privilegiato:

DEFINIZIONE 1.13 *Se γ è un circuito, diremo che γ è percorso in **senso positivo** (o anche che è **orientato positivamente**) se, al crescere del parametro t , γ è percorso in senso antiorario, ovvero in modo che un osservatore che percorra γ nel senso delle t crescenti veda l'aperto limitato D , individuato da γ , alla sua sinistra.*

D'ora in poi considereremo i cammini orientati positivamente se non specificato diversamente.

Teorema 1.4 (della divergenza) *Siano $X, Y : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ due funzioni di classe $C^1(A)$. Sia γ un circuito regolare a tratti contenuto in A insieme al suo interno D .*

Allora vale l'uguaglianza

$$\int_{\gamma} X dx + Y dy = \int_D \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) dx dy \quad (1.20)$$

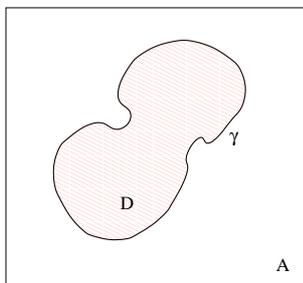


Figura 1.9

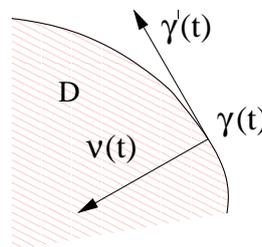


Figura 1.10 Vettori tangente e normale a γ e orientamento positivo.

Si osservi che il segno del primo membro della (1.20) dipende dall'orientamento di γ mentre il secondo membro ne è indipendente. Perché la formula sia corretta è necessario che al crescere del parametro t la frontiera di D sia percorsa in senso antiorario. Per essere più precisi, il **vettore tangente** al cammino $\gamma(t)$ è $\gamma'(t)$. Il vettore $\nu(t) = i\gamma'(t)$, ottenuto dal precedente mediante una rotazione di $\pi/2$ in senso antiorario (cioè nel senso positivo degli angoli) individua il **vettore normale** a γ nel punto $\gamma(t)$. In base alla definizione 1.13, diciamo che γ è orientata positivamente se $\nu(t)$ punta verso l'interno di D in ogni punto in cui è definito.

Teorema 1.5 (integrale di Cauchy) Sia $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ olomorfa nell'aperto connesso A . Per ogni circuito regolare a tratti γ contenuto in A assieme al proprio interno D si ha:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

Dimostrazione. Se $f = u + iv$ è olomorfa allora le funzioni u e v sono differenziabili in senso reale. Possiamo applicare il teorema della divergenza.

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &= \int_{\gamma} u dx - v dy + i \int_{\gamma} v dx + u dy = \\ &= - \int_D \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy + i \int_D \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy \end{aligned}$$

Per le condizioni di Cauchy-Riemann i due integrandi sono identicamente nulli e quindi segue la tesi. \square

Le condizioni di Cauchy-Riemann equivalgono ad affermare che le forme differenziali associate ad f sono *chiuse* ovvero localmente esatte. Si potrebbe dimostrare che il teorema continua a valere per qualunque circuito γ regolare a tratti ma è più complicato e non lo facciamo.

Corollario 1.4 Una funzione $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ olomorfa in A è dotata di primitiva in ogni sottoinsieme semplicemente connesso di A .

ESEMPIO 1.7 Abbiamo visto negli esempi 1.5 e 1.6 che $f(z) = 1/z$ non ammette primitiva nè in \mathbb{C} , nè in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Ha invece primitiva in $\mathbb{C} \setminus \{\operatorname{Re} z < 0, \operatorname{Im} z = 0\}$ o, più in generale in insiemi del tipo “ \mathbb{C} meno una semiretta uscente dall'origine” (che infatti sono semplicemente connessi).

Proposizione 1.6 Sia $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ olomorfa nell'aperto connesso A . Siano γ_1 e γ_2 due circuiti regolari a tratti e contenuti in A , con γ_2 interno a γ_1 . Siano D_1 e D_2 gli aperti individuati dalle regioni interne a γ_1 e a γ_2 rispettivamente. Se $D_1 \setminus D_2 \subset A$, allora

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_{\gamma_2} f(z) dz.$$

Dimostrazione. Mediante dei tagli opportuni è sempre possibile suddividere $D_1 \setminus D_2$ in due parti E_1 ed E_2 semplicemente connesse e tali che $E_1 \cup E_2 = D_1 \setminus D_2$. Dalle ipotesi fatte, $f(z)$ è olomorfa in E_1 e in E_2 , quindi

$$\int_{\partial E_1} f dz = 0, \quad \int_{\partial E_2} f dz = 0.$$

D'altra parte,

$$\begin{aligned} \int_{\partial E_1} f dz &= \int_{\widehat{SV}P} f dz + \int_{\widehat{PQ}} f dz + \int_{\widehat{QTR}} f dz + \int_{\widehat{RS}} f dz, \\ \int_{\partial E_2} f dz &= \int_{\widehat{RU}Q} f dz + \int_{\widehat{QP}} f dz + \int_{\widehat{PZS}} f dz + \int_{\widehat{SR}} f dz. \end{aligned}$$

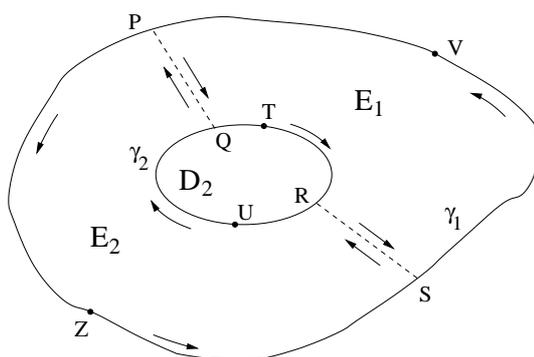


Figura 1.11 $D_1 = D_2 \cup E_1 \cup E_2$.

Si osservi che gli integrali sui tagli RS e PQ compaiono in entrambe le espressioni ma con versi di percorrenza opposti. Quindi,

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\partial E_1} f dz + \int_{\partial E_2} f dz = \\ &= \int_{S\widehat{V}P} f dz + \int_{P\widehat{Z}S} f dz + \int_{Q\widehat{T}R} f dz + \int_{P\widehat{Z}S} f dz = \\ &= \int_{\gamma_1} f dz - \int_{\gamma_2} f dz. \end{aligned}$$

□

Una volta stabilito il teorema integrale di Cauchy, siamo in grado di dimostrare alcune notevoli proprietà delle funzioni olomorfe.

Proposizione 1.7 (formula integrale di Cauchy) *Sia $f : A \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione olomorfa nell'aperto connesso A e sia γ un circuito contenuto in A assieme al proprio interno D .*

Per ogni $z_0 \in D$ si ha:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz \quad (1.21)$$

Dimostrazione. Sia γ_r la circonferenza di raggio r e centro in z_0 , con raggio abbastanza piccolo in modo che γ_r sia contenuta nell'interno di γ . La funzione $\frac{f(z)}{z - z_0}$ è olomorfa in $A \setminus \{z_0\}$; per il teorema di Cauchy applicato alla coppia γ, γ_r ,

$$\int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

Inoltre,

$$\int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{it})}{re^{it}} ire^{it} dt = i \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) dt.$$

Le uguaglianze scritte valgono per ogni valore di r (purché abbastanza piccolo); continuano a valere se si passa al limite per $r \rightarrow 0$:

$$\int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = i \int_0^{2\pi} f(z_0) dt = 2\pi i f(z_0)$$

ovvero la tesi. □

OSSERVAZIONE 1.9 Conoscendo il valore di f sul circuito γ è possibile determinare il valore di f in tutti i punti interni a γ stesso. Si osservi inoltre che $\int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$ è definito per tutti gli z_0 fuori dalla traccia di γ . Se z_0 è esterno a γ , l'integrale è nullo. In definitiva:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \begin{cases} f(z_0) & \text{se } z_0 \in D \\ 0 & \text{se } z_0 \notin A \setminus \bar{D} \end{cases}$$

OSSERVAZIONE 1.10 Se $f(z) \equiv 1$ allora

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{z - z_0} dz = \begin{cases} 1 & \text{se } z_0 \in D \\ 0 & \text{se } z_0 \notin A \setminus \bar{D} \end{cases}$$

Più in generale, se la curva γ non è semplice e z non sta sulla traccia di γ , si definisce **indice di avvolgimento** di γ rispetto a z il numero

$$\text{Ind}(\gamma, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{w - z} dw.$$

L'indice $\text{Ind}(\gamma, z)$ è sempre un numero intero e conta quante volte γ gira attorno al punto z contando come positivi i giri nel senso crescente degli angoli (cioè in senso antiorario) e negativi gli altri.

Dalle proprietà di derivazione per serie delle serie di potenze (proposizione 1.3) sappiamo che una funzione analitica è olomorfa. La proposizione seguente afferma che è vero anche il viceversa. In altre parole “olomorfa” è equivalente ad “analitica complessa”.

Proposizione 1.8 Sia $f : A \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione olomorfa in A aperto connesso. Allora f è analitica complessa, ovvero, per ogni $z_0 \in A$ esistono dei $c_n \in \mathbb{C}$ tali che se γ è un circuito contenuto in A ,

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} c_n (z - z_0)^n \quad e \quad c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w) dw}{(w - z_0)^{n+1}}.$$

Dimostrazione. Sia $z_0 \in A$ e sia r tale che la palla $B = B(z_0, r) = \{z_0 : |w - z_0| < r\}$ sia contenuta in A . Siano poi $z \in B$ e $w \in \partial B$; possiamo scrivere

$$\frac{1}{w - z} = \frac{1}{(w - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{w - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{w - z_0}}$$

Al variare di $w \in \partial B$, $\left| \frac{z - z_0}{w - z_0} \right|$ è costante e minore di 1. Possiamo sviluppare la frazione in serie di potenze:

$$\frac{1}{w - z} = \frac{1}{w - z_0} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{z - z_0}{w - z_0} \right]^n; \quad (1.22)$$

inoltre la serie converge totalmente al variare di $z \in \partial B$.

Dalla formula integrale di Cauchy si ha:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B} \frac{f(w)}{w-z} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B} \frac{f(w)}{w-z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{z-z_0}{w-z_0} \right]^n dw.$$

Per la convergenza totale possiamo scambiare somma e integrale

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (z-z_0)^n \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} dw \right].$$

abbiamo scritto $f(z)$ come somma di una serie di potenze:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n \quad \text{dove} \quad c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} dw.$$

inoltre il valore di c_n non dipende dalla scelta di r . Poiché z_0 è un qualsiasi punto di A abbiamo dimostrato che f è analitica complessa. \square

Come corollario della proposizione precedente possiamo generalizzare la formula integrale di Cauchy alle derivate della f :

Corollario 1.5 (Formula di Cauchy per le derivate) *Sia $f : A \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione olomorfa in A aperto connesso e sia γ un circuito contenuto in A insieme al suo interno. Allora, per ogni $z_0 \in A$, per ogni $n > 0$ si ha:*

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z) dz}{(z-z_0)^{n+1}} \quad (1.23)$$

Dimostrazione. f è olomorfa in A , quindi $\forall z_0 \in A$ vale la (1.21). Per la proposizione precedente esistono tutte le derivate di f in A esistono e valgono le condizioni per poter derivare la (1.21) sotto il segno di integrale quante volte si vuole. Derivando n volte si ricava la (1.23). \square

OSSERVAZIONE 1.11 Possiamo reinterpretare il risultato della proposizione 1.8 utilizzando la formula (1.23): se $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ è olomorfa in $A \subset \mathbb{C}$ allora per ogni $z_0 \in A$,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n \quad \text{dove} \quad c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}.$$

Quindi ogni f olomorfa è sviluppabile in serie di potenze e tale serie coincide con lo sviluppo in serie di Taylor.

Chiudiamo il paragrafo con una ulteriore caratterizzazione delle funzioni analitiche complesse:

Teorema 1.6 (di Morera) *Sia $f : A \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione continua nell'aperto connesso A . Se per ogni poligonale chiusa γ contenuta in A si ha $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$ allora f è analitica (e quindi olomorfa) in A .*

Dimostrazione. (traccia) Poiché $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$ per tutte le poligonali chiuse γ con traccia contenuta in A , Fissato uno $z_0 \in A$, è possibile definire una primitiva di f su tutto A ponendo

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(w) dw.$$

$F(z)$ risulta ben definita poiché essendo nullo l'integrale di f esteso ad un circuito, il valore di $F(z)$ non dipende dal cammino scelto. Segue che f è olomorfa su A . \square

In un certo senso il teorema di Morera è l'inverso del teorema di Cauchy.

1.13 Singolarità e teorema dei residui

Proposizione 1.9 *Sia $f : A \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione analitica in A aperto connesso. Le affermazioni seguenti sono equivalenti:*

- i) $\exists z_0 \in A, n \in \mathbb{N}$ tale che $f^{(n)}(z_0) = 0$;
- ii) f è nulla in un intorno di z_0 ;
- iii) f è identicamente nulla in A .

Dimostrazione. È una conseguenza del principio di identità delle funzioni analitiche tenendo conto dell'osservazione 1.11. \square

Corollario 1.6 *Sia $f : A \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ è analitica in A aperto connesso e non identicamente nulla. L'insieme degli zeri di f o è vuoto o è formato da punti isolati.*

DEFINIZIONE 1.14 *Siano f_1 ed f_2 due funzioni analitiche in A aperto, con f_2 non identicamente nulla e sia $g(z) = f_1(z)/f_2(z)$. Il rapporto g è una funzione analitica nell'insieme A da cui sono stati tolti i punti z_i in cui $f_2(z_i) = 0$. Gli z_i si dicono **punti singolari isolati** per g .*

ESEMPIO 1.8

- $g_1(z) = \frac{1}{z^2 + 1}$ ha due punti singolari $z_1 = i$ e $z_2 = -i$, ovvero nei punti in cui $z^2 + 1 = 0$.
- $g_2(z) = \frac{\sin z}{z}$ ha un punto singolare nell'origine.

Si osservi che i punti singolari delle funzioni g_1 e g_2 dell'esempio precedente sono di natura diversa: nel primo caso $\lim_{|z-z_i| \rightarrow 0} g_1(z) = \infty$ mentre nel secondo il limite di $g_2(z)$ quando $z \rightarrow 0$ esiste ed è 1. Classificheremo i punti singolari di una funzione in base al comportamento di questa in prossimità della singolarità.

DEFINIZIONE 1.15 *Un punto singolare isolato z_0 di una funzione analitica $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ si dice **eliminabile** se esiste un prolungamento analitico di f in un intorno di z_0 .*

DEFINIZIONE 1.16 *Sia $f : A \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione olomorfa e sia $z_0 \in A$ tale che $f(z_0) = 0$. Diciamo che z_0 è uno **zero di ordine n** per f se esiste $h(z)$ olomorfa in un intorno di z_0 tale che $f(z) = (z - z_0)^n h(z)$ e $h(z_0) \neq 0$.*

Consideriamo ancora $g(z) = f_1(z)/f_2(z)$. Supponiamo che $f_2(z)$ abbia uno zero di molteplicità n in z_0 , ovvero $f_2(z) = (z - z_0)^n h(z)$ con $h(z_0) \neq 0$. Allora,

$$g(z) = \frac{f_1(z)}{f_2(z)} = \frac{f_1(z)}{h(z)}(z - z_0)^{-n}, \quad \text{ovvero} \quad \frac{f_1(z)}{h(z)} = g(z)(z - z_0)^n.$$

Se passiamo al limite per $z \rightarrow z_0$,

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^k g(z) = \begin{cases} \infty & \text{se } k > n \\ 0 & \text{se } k < n \\ \frac{f_1(z_0)}{h(z_0)} & \text{se } k = n \end{cases}.$$

DEFINIZIONE 1.17 Sia $f : A \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione analitica e sia z_0 un punto singolare isolato. Diciamo che z_0 è un **polo di ordine n** per f se esiste finito e non nullo il $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)(z - z_0)^n$.

ESEMPIO 1.9

- I poli di $g_1(z) = \frac{1}{1+z^2}$ sono $z_{1,2} = \pm i$ e sono entrambi del primo ordine.
- I poli di $g_2(z) = \frac{1}{(z^2+z+1)^2}$ sono $z_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$ e sono entrambi del secondo ordine.

DEFINIZIONE 1.18 Sia $f : A \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ analitica e sia z_0 un punto singolare isolato di f . Chiamiamo **residuo** di f nel punto z_0 il numero

$$\text{Res}(f, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) dz \quad (1.24)$$

dove γ è un circuito contenente z_0 e nessun altro eventuale punto singolare di f .

Proposizione 1.10 Sia $f : A \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione analitica e sia z_0 un polo di ordine n per f . Allora

$$\text{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} ((z - z_0)^n f(z)) \quad (1.25)$$

Dimostrazione. Se f ha un polo di ordine n in z_0 allora la funzione $g(z) = (z - z_0)^n f(z)$ ha in z_0 una discontinuità eliminabile. Sia γ una circonferenza centrata in z_0 di raggio abbastanza piccolo da non contenere altre singolarità di f al suo interno. Dalla formula di Cauchy per le derivate (1.23),

$$g^{(n-1)}(z_0) = \frac{(n-1)!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{g(z)}{(z - z_0)^n} dz = \frac{(n-1)!}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) dz.$$

Dalla definizione di residuo,

$$\text{Res}(f, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) dz = \frac{g^{(n-1)}(z_0)}{(n-1)!} = \frac{1}{(n-1)!} \left[\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} ((z - z_0)^n f(z)) \right]_{z=z_0}.$$

□

Teorema 1.7 (dei residui) Sia $f : A \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ analitica nell'aperto $A \subset \mathbb{C}$ e sia γ un circuito contenuto in A . Sia D l'aperto individuato dall'interno di γ e siano z_1, \dots, z_r i punti singolari di f interni ad A . Allora

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^r \text{Res}(f, z_k). \quad (1.26)$$

Dimostrazione. Siano γ_k circonferenze abbastanza piccole da essere contenute in A e contenere al loro interno solo la singolarità z_k ; siano A_k i loro interni. L'enunciato segue subito applicando il teorema di Cauchy all'insieme $A \setminus \cup_{k=1}^r A_k$ (fig 1.12) ed utilizzando la definizione di residuo. \square

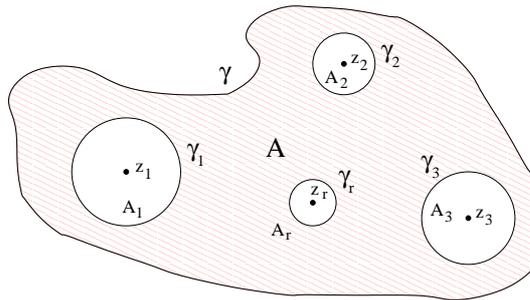


Figura 1.12 La frontiera di A è formata da γ e dalle γ_k . Si noti che queste ultime sono orientate positivamente se percorse in senso orario.

Concludiamo il capitolo con due lemmi utili per il calcolo di integrali definiti mediante il teorema dei residui.

Lemma 1.4 (del grande cerchio) Sia f una funzione continua nel settore circolare $\vartheta_1 < \arg(z) < \vartheta_2$, almeno per $|z|$ abbastanza grande.

Se $\lim_{R \rightarrow \infty} z f(z) = 0$ allora $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} f(z) dz = 0$ dove γ_R è l'intersezione della circonferenza di raggio R e centro l'origine con il settore circolare.

Dimostrazione. Basta applicare la stima "ML" e passare al limite per $R \rightarrow \infty$. \square

Lemma 1.5 (del piccolo cerchio) Sia f una funzione continua nel settore circolare $\vartheta_1 < \arg(z) < \vartheta_2$, almeno per $|z|$ abbastanza piccolo.

Se $\lim_{r \rightarrow 0} z f(z) = 0$ allora $\lim_{r \rightarrow 0} \int_{\gamma_r} f(z) dz = 0$ dove γ_r è l'intersezione della circonferenza di raggio r e centro l'origine con il settore circolare.

Dimostrazione. Basta applicare la stima "ML" e passare al limite per $r \rightarrow 0$. \square

Equazioni differenziali ordinarie

2.1 Generalità e definizioni

In questo capitolo saranno dati per acquisiti i principali risultati di esistenza, unicità e prolungabilità delle soluzioni. Ci limiteremo a ricordare alcuni enunciati.

Saranno invece forniti metodi risolutivi ed applicazioni per alcune importanti categorie di equazioni differenziali sia del primo ordine che di ordini superiori.

DEFINIZIONE 2.1 Sia $f(x)$ una funzione definita su un intervallo $I \subset \mathbb{R}$. Un'equazione differenziale ordinaria è una equazione che coinvolge f ed un certo numero di sue derivate e vale per ogni $x \in I$.

ESEMPIO 2.1 Le seguenti sono equazioni differenziali:

$$f'(x) + xf(x) = 0, \quad f'(x) = \sin x, \quad f''(x) + [f'(x)]^2 - 4 \cos x f(x) = 0$$

Spesso si usa sostituire una variabile al posto di $f(x)$ sottintendendo la dipendenza da x . Le tre equazioni scritte sopra si trovano anche scritte come

$$y' + xy = 0, \quad y' = \sin x, \quad y'' + (y')^2 - 4y \cos x = 0.$$

DEFINIZIONE 2.2 Si dice **ordine** di una equazione differenziale l'ordine della derivata più alta che compare nell'equazione.

DEFINIZIONE 2.3 Sia $y = f(x)$ una funzione definita su un intervallo $I \subset \mathbb{R}$, si dice **soluzione** (esplicita) dell'equazione differenziale $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ se $\forall x \in I$ si ha $F(x, f(x), f'(x), \dots, f^{(n)}(x)) = 0$.

In generale una equazione differenziale può avere più di una soluzione. Ad esempio, l'equazione $y' = y$ ha come soluzioni $y = ce^x$, $c \in \mathbb{R}$. Il numero di parametri da cui dipendono le soluzioni può variare ad esempio a seconda dell'ordine o del tipo dell'equazione.

ESEMPIO 2.2

i) $y^2 + (y')^2 = 0$ ammette soltanto la soluzione nulla.

- ii) $(y' - y)(y' - 2) = 0$ ha due famiglie di soluzioni ($y = ce^x$ e $y = 2x + c$) ciascuna dipendente da un solo parametro.
- iii) $y'' - 2y' + e^x = 0$ ha una famiglia di soluzioni ($y = e^x + c_1e^{2x} + c_2$) dipendente da due parametri.

DEFINIZIONE 2.4 Una famiglia di funzioni dipendente da un certo numero n di parametri si dice **soluzione generale** se contiene tutte le soluzioni dell'equazione differenziale.

DEFINIZIONE 2.5 Chiamiamo **soluzione particolare** di una equazione differenziale un singolo elemento scelto nella soluzione generale. In altri termini una soluzione particolare è una soluzione dell'equazione che non dipende da parametri.

DEFINIZIONE 2.6 I vincoli che ci permettono di individuare una soluzione particolare nella famiglia delle soluzioni si dicono **condizioni iniziali** se sono date in termini di un solo valore della variabile indipendente.

DEFINIZIONE 2.7 Dati una equazione differenziale ed un insieme di condizioni iniziali, il problema di determinare nella famiglia della soluzione generale la (o le) soluzioni che soddisfino le condizioni iniziali assegnate si dice **problema di Cauchy**.

ESEMPIO 2.3 La soluzione generale dell'equazione differenziale $y'' = e^x$ è $y(x) = e^x + c_1x + c_2$. Assegnamo, ad esempio, le condizioni iniziali $y(0) = 1$ e $y'(0) = 2$; derivando l'espressione di y rispetto a x otteniamo $y'(x) = e^x + c_1$. I parametri c_1 e c_2 devono soddisfare il sistema

$$y(0) = e^0 + c_1 \cdot 0 + c_2 = 1 \quad \Rightarrow \quad c_2 = 0 \quad (2.1)$$

$$y'(0) = e^0 + c_1 = 2 \quad \Rightarrow \quad c_1 = 1. \quad (2.2)$$

Risulta così determinata la soluzione particolare $y = e^x + x$.

Le condizioni iniziali non sono l'unico modo di individuare una soluzione particolare. Siamo in grado di determinare la stessa soluzione particolare dell'esempio 2.3 (procedendo in maniera analoga – provare per esercizio) anche a partire da $y(0) = 1$ e $y(1) = e + 1$.

In questo caso si parla di **condizioni ai limiti** e di **problema ai limiti**.

DEFINIZIONE 2.8 Un'equazione differenziale si dice **in forma normale** quando è della forma $y^{(n)} = F(x, y, \dots, y^{(n-1)})$ ovvero quando è "risolta" rispetto alla derivata di ordine più alto.

Per equazioni scritte in forma normale si può dimostrare sotto ampie ipotesi l'esistenza e l'unicità della soluzione del problema di Cauchy. In generale però non è detto che le soluzioni espresse dall'integrale generale dell'equazione siano tutte definite sullo stesso insieme al variare dei parametri c_1, c_2, \dots, c_n (ovvero della condizione iniziale). Quando si parla di soluzione di un problema di Cauchy si intende sempre una funzione tale che:

- a) è definita in un intervallo contenente il punto x_0 in cui sono assegnate le condizioni iniziali;

b) è derivabile in tutto l'intervallo in cui è definita tante volte quanto lo richiede l'equazione differenziale e soddisfa l'equazione in tutto l'intervallo in cui è definita.

DEFINIZIONE 2.9 Un'equazione differenziale si dice **autonoma** se la variabile indipendente non compare esplicitamente nella sua espressione.

ESEMPIO 2.4 Le equazioni differenziali dell'esempio 2.3 sono autonome mentre le seguenti non lo sono:

$$y' + x \sin y = 1, \quad xy'' - (x^2 - 1)y' + y^2 = 0, \quad y'' = y^2 + x$$

OSSERVAZIONE 2.1 Se $y(x)$ è soluzione di una equazione differenziale autonoma, sono soluzioni anche tutte le funzioni del tipo $y(x - x_0)$ per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$. Verificare per esercizio questa affermazione.

Passeremo in rassegna caratteristiche generali e metodi risolutivi per alcune importanti classi di equazioni differenziali.

2.2 Equazioni a variabili separabili

Le equazioni a variabili separabili sono del tipo

$$y' = a(x)b(y) \tag{2.3}$$

dove a e b sono funzioni continue.

Osserviamo innanzitutto che se y_0 è soluzione dell'equazione $b(y) = 0$ la funzione costante $y(x) = y_0$ soddisfa l'equazione differenziale.

Consideriamo un intervallo J in cui $b(y) \neq 0$ e dividiamo entrambi i membri dell'equazione per $b(y)$:

$$\frac{y'}{b(y)} = a(x).$$

Integriamo entrambi i membri rispetto alla x :

$$\int \frac{y'(x)}{b(y(x))} dx = \int a(x) dx + c.$$

Con il cambio di variabile $y = y(x)$ nel primo integrale si giunge a

$$\int \frac{dy}{b(y)} = \int a(x) dx + c.$$

Quello che abbiamo scritto è un integrale generale dell'equazione (2.3) anche se scritto in forma implicita. Se $A(x) = \int a(x) dx$ e $B(y) = \int \frac{dy}{b(y)}$ allora $B(y) = A(x) + c$. Se siamo in grado di scrivere esplicitamente la funzione B^{-1} , inversa di $B(y)$, l'integrale generale della (2.3) in forma esplicita è $y = B^{-1}(A(x) + c)$.

ESEMPIO 2.5 Risolviamo il problema di Cauchy $\begin{cases} y' = x(y^2 + 1) \\ y(0) = 1 \end{cases}$.

Dividiamo entrambi i membri per $y^2 + 1$ e integriamo tra 0 ed x : $\int_0^x \frac{y'(x)}{y(x)^2 + 1} dx = \int_0^x t dt$ e, dopo il cambio di variabile,

$$\int_{y(0)=1}^y \frac{dw}{w^2 + 1} = \int_0^x t dt.$$

Quindi $\arctan(y) - \arctan 1 = x^2/2 + 0$, cioè $y(x) = \tan\left(\frac{x^2}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$ ed è definita per $|x| < \sqrt{\pi/2}$.

ESEMPIO 2.6 Risolviamo il problema di Cauchy $\begin{cases} y y' = 1 \\ y(2) = 2 \end{cases}$.

Integriamo tra 2 ed x :

$$\int_2^x y'(t) y(t) dt = \int_2^x dt; \quad \int_2^{y(x)} w dw = x - 2;$$

Infine, $y^2 = 2x$ e $y = \sqrt{2x}$. Il segno $+$ è stato scelto in base alla condizione iniziale.

ESEMPIO 2.7 Risolviamo il problema di Cauchy $\begin{cases} y y' = 1 \\ y(x_0) = 0 \end{cases}$.

Procedendo come sopra arriviamo ancora all'espressione $y = \pm\sqrt{2(x - x_0)}$. Una soluzione deve però soddisfare l'equazione differenziale in un intervallo contenente x_0 e, in particolare in x_0 stesso. Dalla condizione iniziale si ha che $y(x_0) = 0$; dall'equazione però deve essere $y'(x_0) y(x_0) = 1$. Siamo giunti ad una contraddizione e quindi le funzioni $y = \pm\sqrt{2(x - x_0)}$ **non** sono soluzioni del problema di Cauchy proposto, che quindi non ammette soluzione.

Osserviamo infine che le funzioni $y = \pm\sqrt{2(x - x_0)}$ non sono derivabili in x_0 ; viene quindi a mancare uno dei requisiti necessari per essere soluzione.

In generale non è detto che un problema di Cauchy abbia soluzione. In caso che questa esista non è detto che sia unica. Perché siano garantite esistenza e unicità della soluzione sono necessarie alcune ipotesi di regolarità sulle funzioni $a(x)$ e $b(y)$ che definiscono la (2.3):

Teorema 2.1 *Condizione necessaria perché il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y' = a(x)b(y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad (2.4)$$

ammetta una ed una sola soluzione è che $a(x)$ sia continua in un intorno di x_0 e che $b(y)$ sia lipschitziana in un intorno di $y(x_0)$.

OSSERVAZIONE 2.2 Una funzione derivabile è anche lipschitziana. Condizione sufficiente perché il problema di Cauchy (2.4) ammetta soluzione unica è che $a(x)$ sia continua in x_0 e che $b(y)$ sia derivabile in $y(x_0)$.

Nel caso dell'esempio 2.7, $a(x) = 1$ è continua ovunque mentre $b(y) = 1/y$ non è continua (né tantomeno lipschitziana) per $y = 0$. Le ipotesi del teorema 2.1 non sono soddisfatte.

In altre situazioni (vedi esempio 2.8) può venire a mancare l'unicità della soluzione.

ESEMPIO 2.8 Consideriamo il problema di Cauchy:
$$\begin{cases} y' = \sqrt{1-y^2} \\ y(x_0) = 1 \end{cases}.$$

Osserviamo subito che la funzione costante $y(x) = 1$ soddisfa sia l'equazione che la condizione iniziale e che quindi è soluzione del problema di Cauchy.

Dividendo per $\sqrt{1-y^2}$ e integrando si arriva a $\arcsin y = x+c$, ovvero $y(x) = \sin(x+c)$. Inoltre, dalla condizione iniziale $x_0 + c = \pi/2$. La funzione $y(x) = \sin(\pi/2 + (x - x_0))$ soddisfa effettivamente sia l'equazione che la condizione iniziale ed è quindi soluzione del problema di Cauchy.

Abbiamo trovato due soluzioni distinte dello stesso problema. Questo però non è in contraddizione con il teorema 2.1: $b(y) = \sqrt{1-y^2}$ è continua per $y = 1$ ma non lipschitziana.

ESEMPIO 2.9 Consideriamo il problema di Cauchy
$$\begin{cases} y' = \sqrt{y} \\ y(0) = a \end{cases},$$
 con $a \geq 0$. Applicando la tecnica esposta in questo paragrafo:

$$\int_0^x \frac{y'}{\sqrt{y}} dx = x \quad \text{da cui} \quad \frac{x^2}{2} = \sqrt{y} - \sqrt{a}.$$

Se $a \neq 0$ il metodo fornisce la soluzione $y(x) = (x + 2\sqrt{a})^2/4$. La funzione $b(y) = \sqrt{y}$ è lipschitziana in un intorno di $y = a$; valgono i requisiti per l'unicità della soluzione e quindi non ci sono altre soluzioni oltre a quella trovata.

Se $a = 0$ il metodo fornisce $y(x) = x^2/4$. Però $b(y)$ non è lipschitziana in un intorno di 0: *potrebbero* esserci anche altre soluzioni oltre a quella trovata. È facile verificare che anche la funzione $y \equiv 0$ è soluzione del problema di Cauchy con $a = 0$.

2.3 Equazioni omogenee

DEFINIZIONE 2.10 Una funzione $f(x, y)$ si dice **omogenea** se, $\forall (x, y) \neq (0, 0), \forall k > 0$ esiste un $m \in \mathbb{R}$ tale che $f(kx, ky) = k^m f(x, y)$. La quantità m si dice **grado di omogeneità** della funzione f .

L'equazione

$$P(x, y) + Q(x, y)y' = 0 \tag{2.5}$$

si dice **omogenea** quando P e Q sono funzioni omogenee di x ed y dello stesso grado di omogeneità m .

La sostituzione $y(x) = z(x) \cdot x$ riduce P e Q alla forma

$$P(x, zx) = x^m a(z), \quad Q(x, zx) = x^m b(z)$$

(si osservi che le funzioni a e b non dipendono da x). Inoltre, $y' = z'x + z$. L'equazione differenziale si scrive $b(z)(z'x + z) + a(z) = 0$ ovvero

$$\frac{b(z)}{a(z) + zb(z)} z' = -\frac{1}{x}. \tag{2.6}$$

L'equazione (2.6) è a variabili separabili ed è risolvibile con le tecniche del paragrafo 2.2. Il suo integrale generale è

$$\int \frac{b(z)}{a(z) + zb(z)} dz + \log |x| = \text{costante};$$

una volta calcolato, la sostituzione $z = y/x$ fornisce l'integrale dell'equazione originaria.

ESEMPIO 2.10 Risolviamo l'equazione $-y'x^2 + x^2 + y^2 + xy = 0$.

In questo caso $P(x, y) = x^2 + y^2 + xy$, $Q(x, y) = x^2$ sono funzioni omogenee di grado due. Introduciamo la nuova incognita $z(x)$ definita da $y = zx$;

$$P(x, zx) = x^2 \cdot (1 + z^2 + z), \quad Q(x, zx) = -x^2 \cdot 1, \quad \text{ovvero}$$

$$a(z) = 1 + z + z^2 \quad b(z) = -1.$$

L'equazione differenziale per z è $z'x + z = 1 + z^2 + z$. Semplificando e integrando si giunge a

$$\arctan z = \log |x| + c, \quad \text{e quindi a } z = \tan(\log |x| + c).$$

Sostituendo $z = \frac{y}{x}$ si arriva alla soluzione dell'equazione differenziale:

$$y = x \tan(\log |x| + c).$$

2.4 Equazioni lineari

DEFINIZIONE 2.11 Sia $F(y_0, y_1, \dots, y_n)$ una funzione continua. L'equazione differenziale $F(y, y', \dots, y^{(n)}) = f(x)$ si dice **lineare** se lo è la funzione F ovvero se

$$aF(z_0, z_1, \dots, z_n) + bF(w_0, w_1, \dots, w_n) =$$

$$= F(az_0 + bw_0, az_1 + bw_1, \dots, az_n + bw_n) \quad (2.7)$$

per ogni $a, b \in \mathbb{R}$. La funzione $f(x)$ si dice **termine noto** dell'equazione.

Un'equazione lineare si dice **omogenea** se $f(x) \equiv 0$; si dice **completa** in caso contrario.

In base alla definizione precedente, una generica equazione differenziale lineare è della forma

$$a_0(x)y + a_1(x)y' + \dots + a_n(x)y^{(n)} = f(x).$$

DEFINIZIONE 2.12 Le funzioni $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$, definite su uno stesso dominio D si dicono **linearmente dipendenti** se esistono delle costanti c_1, c_2, \dots, c_n , non tutte nulle, tali che $c_1f_1(x) + c_2f_2(x) + \dots + c_nf_n(x) = 0$ per ogni $x \in D$. Si dicono **linearmente indipendenti** in caso contrario.

Si può dimostrare che se le funzioni $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ sono derivabili n volte, sono linearmente indipendenti se e solo se lo sono i vettori

$$\begin{pmatrix} f_1(x_0) \\ f_1'(x_0) \\ \vdots \\ f_1^{(n)}(x_0) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} f_2(x_0) \\ f_2'(x_0) \\ \vdots \\ f_2^{(n)}(x_0) \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \begin{pmatrix} f_n(x_0) \\ f_n'(x_0) \\ \vdots \\ f_n^{(n)}(x_0) \end{pmatrix}$$

per un certo $x_0 \in \mathbb{R}$.

I risultati seguenti descrivono la struttura della soluzione generale per equazioni lineari omogenee e complete rispettivamente:

Teorema 2.2 *Le soluzioni di una equazione differenziale lineare omogenea costituiscono uno spazio vettoriale la cui dimensione è pari all'ordine dell'equazione.*

Dimostrazione. Una equazione lineare omogenea ha la forma

$$F(y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (2.8)$$

con F lineare. Osserviamo che esiste sempre almeno una soluzione (quella identicamente nulla). Se $y_1(x)$ e $y_2(x)$ sono soluzioni, allora

$$F(y_1, y_1', \dots, y_1^{(n)}) = 0 \quad e \quad F(y_2, y_2', \dots, y_2^{(n)}) = 0.$$

Per la (2.7), $F(ay_1 + by_2, (ay_1 + by_2)', \dots, (ay_1 + by_2)^{(n)}) = 0$ ovvero $ay_1(x) + by_2(x)$ è soluzione. Quindi l'insieme delle soluzioni è uno spazio vettoriale.

Consideriamo ora le soluzioni y_1, y_2, \dots, y_n dei problemi di Cauchy con condizioni iniziali

$$\begin{cases} y_1(x_0) = 1 \\ y_1'(x_0) = 0 \\ \vdots \\ y_1^{(n)}(x_0) = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} y_1(x_0) = 0 \\ y_1'(x_0) = 1 \\ \vdots \\ y_1^{(n)}(x_0) = 0 \end{cases}, \quad \dots, \quad \begin{cases} y_1(x_0) = 0 \\ y_1'(x_0) = 0 \\ \vdots \\ y_1^{(n)}(x_0) = 1 \end{cases}.$$

Le funzioni y_1, y_2, \dots, y_n sono soluzioni linearmente indipendenti. Dimostriamo che le soluzioni della (2.8) sono tutte e sole le combinazioni lineari di y_1, y_2, \dots, y_n .

Per la linearità le combinazioni lineari sono soluzioni; viceversa, sia y la soluzione del generico problema di Cauchy per la (2.8), con condizioni iniziali

$$\begin{cases} y(x_0) = w_1 \\ y'(x_0) = w_2 \\ \vdots \\ y^{(n)}(x_0) = w_n \end{cases};$$

Ancora per la linearità dell'equazione anche $w_1 y_1 + w_2 y_2 + \dots + w_n y_n$ è soluzione del problema di Cauchy e quindi per l'unicità della soluzione deve essere $y = w_1 y_1 + w_2 y_2 + \dots + w_n y_n$ ovvero le soluzioni dell'equazione (2.8) sono tutte e sole le combinazioni lineari di n funzioni linearmente indipendenti e quindi formano uno spazio vettoriale di dimensione n . \square

Teorema 2.3 *Le soluzioni di una equazione differenziale lineare non omogenea*

$$F(y, y', \dots, y^{(n)}) = f(x) \quad (2.9)$$

formano una varietà lineare affine di dimensione pari all'ordine dell'equazione.

Dimostrazione. Sia $F(y, y', \dots, y^{(n)}) = f(x)$ un'equazione differenziale non omogenea e sia $y_0(x)$ una sua soluzione. È sufficiente dimostrare che se $y(x)$ è una qualsiasi soluzione dell'equazione, le $z(x) = y(x) - y_0(x)$ formano uno spazio vettoriale di dimensione n , cioè pari all'ordine dell'equazione (2.9).

Dalla linearità di F segue

$$\begin{aligned} F(z, z', \dots, z^{(n)}) &= F(y - y_0, y' - y_0', \dots, y^{(n)} - y_0^{(n)}) = \\ &= F(y, y', \dots, y^{(n)}) - F(y_0, y_0', \dots, y_0^{(n)}) = f(x) - f(x) \equiv 0 \end{aligned}$$

ovvero z è soluzione dell'equazione lineare omogenea $F(z, z', \dots, z^{(n)}) = 0$ associata alla (2.9). Per il teorema 2.2 le soluzioni z dell'equazione omogenea formano uno spazio vettoriale di dimensione n e questo conclude la dimostrazione. \square

Il corollario seguente riconduce la soluzione di un'equazione non omogenea a determinare una soluzione particolare e alla soluzione dell'equazione omogenea associata. Ne faremo ampio uso nelle applicazioni.

Corollario 2.1 *La soluzione di una equazione lineare non omogenea (2.9) si può scrivere nella forma $y(x) = y_0(x) + z(x)$ dove y_0 è una soluzione particolare dell'equazione completa e z è la soluzione generale dell'equazione omogenea $F(z, z', \dots, z^{(n)}) = 0$ associata alla (2.9).*

Dimostrazione. Per il teorema precedente, $y(x) - y_0(x) = z(x)$. Se fissiamo y_0 , ogni soluzione y si scrive in uno ed un sol modo come somma di y_0 e di una soluzione dell'equazione omogenea associata. \square

2.4.1 Equazioni lineari del primo ordine

Sono equazioni della forma:

$$y'(x) + a(x)y(x) = f(x) \quad (2.10)$$

con a ed f continue nell'intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$.

Per il corollario 2.1 la soluzione dell'equazione completa si riduce a

- i) risolvere l'equazione omogenea associata;
- ii) determinare una soluzione particolare dell'equazione omogenea.

Soluzione dell'equazione omogenea. L'equazione $z' + a(x)z = 0$ può essere risolta per separazione delle variabili.

Si vede subito che l'equazione ammette la soluzione identicamente nulla (come era ovvio aspettarsi dato che le sue soluzioni formano uno spazio vettoriale).

Se $z(x_0) \neq 0$ per un certo x_0 allora $z(x) \neq 0$ in un opportuno intorno di x_0 ; possiamo dividere entrambi i membri dell'equazione per $z(x)$ e integrare:

$$\int_{z(x_0)}^{z(x)} \frac{u'}{u} dx = - \int_{x_0}^x a(t) dt, \quad \text{da cui} \quad \log \left(\frac{z(x)}{z(x_0)} \right) = - \int_{x_0}^x a(t) dt.$$

L'equazione omogenea è soddisfatta da tutte le funzioni del tipo

$$z(x) = c \cdot e^{- \int_{x_0}^x a(t) dt}, \quad c \text{ costante.}$$

Si noti che le soluzioni sono tutte linearmente dipendenti come era lecito aspettarsi in base al teorema 2.2.

Metodo della variazione della costante per la determinazione di una soluzione particolare della (2.10).

Il metodo consiste nel cercare soluzioni particolari di forma “simile” alla soluzione dell’equazione omogenea. È applicabile anche ad equazioni lineari di ordine superiore al primo e talvolta anche ad equazioni non lineari (vedi ad esempio l’equazione di Bernoulli, § 2.5).

Per le equazioni lineari del primo ordine cerchiamo soluzioni particolari della forma

$$y_0(x) = c(x) e^{-A(x)}, \quad \text{dove} \quad A(x) = \int_{x_0}^x a(t) dt. \quad (2.11)$$

La costante c che figura nell’espressione della soluzione della (2.8) è stata sostituita da una funzione $c(x)$, da cui il nome di “variazione della costante”.

Deriviamo la (2.11) e sostituiamo l’espressione nella (2.10):

$$\underbrace{a(x) c(x) e^{-A(x)}}_{a(x) y(x)} + \underbrace{c'(x) e^{-A(x)} - c(x) a(x) e^{-A(x)}}_{y'(x)} = f(x)$$

da cui $c(x) = \int_{x_0}^x f(t) e^{A(t)} dt$. Una soluzione particolare della (2.10) (quella che soddisfa

la condizione iniziale $y(x_0) = 0$) è $y_0(x) = e^{-A(x)} \int_{x_0}^x f(t) e^{A(t)} dt$.

Per il corollario 2.1, la soluzione generale della (2.10) è,

$$y(x) = c e^{-A(x)} + e^{-A(x)} \int_{x_0}^x f(t) e^{A(t)} dt.$$

Soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) + a(x)y(x) = f(x) \\ y(x_0) = w_0 \end{cases}. \quad (2.12)$$

Abbiamo già visto come determinare la soluzione $y_0(x)$ del problema (2.12) nel caso $w_0 = 0$. Inoltre sappiamo che la soluzione che cerchiamo è della forma $y_0(x) + z(x)$ dove $z(x)$, per la linearità delle dell’equazione, soddisfa il problema di Cauchy

$$\begin{cases} z'(x) + a(x)z(x) = 0 \\ z(x_0) = w_0 \end{cases}.$$

Quindi, $z(x) = e^{-A(x)} \int_{x_0}^x f(t) e^{A(t)} dt$; la soluzione del problema (2.12) è allora

$$y(x) = y_0 e^{-A(x)} + e^{-A(x)} \int_{x_0}^x f(t) e^{A(t)} dt.$$

ESEMPIO 2.11 Determinare l’integrale generale dell’equazione $y' + y \sin x = \sin 2x$. Poi risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' + y \sin x = \sin 2x \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \end{cases}.$$

Per prima cosa risolviamo l'equazione omogenea:

$$\frac{y'}{y} = -\sin x \quad \Rightarrow \quad \ln(y) = \cos x + k \quad \Rightarrow \quad y = c e^{\cos x},$$

(c e k costanti).

Cerchiamo, con il metodo della variazione della costante, una soluzione per l'equazione completa tra le funzioni della forma $y(x) = c(x) e^{\cos x}$:

$$c'(x) e^{\cos x} + c(x) \sin x e^{\cos x} - c(x) \sin x e^{\cos x} = \sin 2x \quad \Rightarrow \quad c'(x) = e^{-\cos x} \sin 2x.$$

Determiniamo $c(x)$ calcolando l'integrale (per parti)

$$c(x) = \int^x [e^{-\cos t} \sin t] \cdot [2 \cos t] dt = 2 e^{-\cos x} \cos x + \int^x 2 e^{-\cos t} \sin t dt$$

cioè $c(x) = 2 e^{-\cos x}(1 + \cos x)$. L'integrale generale è quindi

$$y(x) = c e^{\cos x} + 2 e^{-\cos x}(1 + \cos x). \quad (2.13)$$

Per risolvere il problema di Cauchy è sufficiente imporre la condizione iniziale nella (2.13):

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2e^0(1+0) + ce^0 = 1 \quad \Rightarrow \quad c = -1;$$

e quindi $y(x) = 2e^{-\cos x}(1 + \cos x) - e^{\cos x}$.

2.4.2 Equazioni omogenee a coefficienti costanti

Sono equazioni lineari, di ordine qualsiasi in cui i coefficienti delle incognita e delle sue derivate sono costanti:

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0. \quad (2.14)$$

Per quanto detto in precedenza, le soluzioni dell'equazione formano uno spazio vettoriale di dimensione n ; esistono quindi n soluzioni y_1, y_2, \dots, y_n linearmente indipendenti.

Per fissare le idee, partiamo dalle equazioni del primo ordine

$$a_1 y' + a_0 y = 0. \quad (2.15)$$

Questa equazione particolare può essere vista anche come equazione a variabili separabili o come equazione lineare omogenea del primo ordine. Qualunque metodo risolutivo si scelga (provarli entrambi per esercizio) la soluzione generale è $y(x) = c e^{\lambda x}$ dove $\lambda = -a_0/a_1$.

Le funzioni esponenziali sono tali che $\frac{d^n}{dx^n} e^{\lambda x} = \lambda^n e^{\lambda x}$; se sostituiamo funzione e derivata nell'equazione (2.15) si ha $(a_1 \lambda + a_0) e^{\lambda x} = 0$. Perché questa uguaglianza sia vera per ogni x , (ovvero perché l'esponenziale sia soluzione della (2.15)), deve essere $a_1 \lambda + a_0 = 0$ ovvero $\lambda = -a_0/a_1$.

Il coefficiente λ dell'esponente è la soluzione di una equazione algebrica di primo grado associata all'equazione differenziale.

Queste considerazioni possono essere estese alle equazioni di ordine superiore al primo. Sostituendo $y = e^{\lambda x}$ nell'equazione (2.14) si ha

$$e^{\lambda x} (a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0) = 0$$

La funzione $y = e^{\lambda x}$ è soluzione dell'equazione differenziale se e solo se λ soddisfa l'equazione algebrica

$$a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0. \quad (2.16)$$

Inoltre se $\lambda \neq \mu$ le funzioni $e^{\lambda x}$ e $e^{\mu x}$ sono linearmente indipendenti.

Se le radici $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ dell'equazione (2.16) (reali o complesse che siano) sono tutte distinte, abbiamo trovato n soluzioni $e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, \dots, e^{\lambda_n x}$ dell'equazione differenziale (2.14) linearmente indipendenti. Abbiamo trovato una base per lo spazio vettoriale delle soluzioni della (2.14). La soluzione generale dell'equazione è

$$y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} + \dots + c_n e^{\lambda_n x}.$$

Le cose cambiano in presenza di radici multiple dell'equazione (2.16): non abbiamo più a disposizione n valori distinti per λ . Procedendo come sopra non ci sono abbastanza elementi per costruire una base per lo spazio vettoriale delle soluzioni dato che non abbiamo più a disposizione n soluzioni linearmente indipendenti.

Esaminiamo un semplice esempio: costruiamo una equazione differenziale a partire da una equazione algebrica con una radice doppia ($\lambda = a$, con $a \neq 0$):

$$a \lambda^2 - 2a\lambda + a^2 = 0 \quad \text{corrisponde l'eq. diff.} \quad y'' - 2ay' + a^2 y = 0;$$

L'equazione differenziale si può scrivere anche come

$$(y' - ay)' - a(y' - ay) = 0. \quad (2.17)$$

Introduciamo la nuova incognita $z = y' - ay$ e risolviamo l'equazione $z' - az = 0$ ottenuta sostituendo nella precedente. $z = 0$ è soluzione e quindi la (2.17) è soddisfatta dalle y tali che $y' - ay = 0$, ovvero da $y = c_1 e^{ax}$.

L'equazione per z ha però anche la soluzione non nulla $z = e^{ax}$. Risolvendo $y' - ay = e^{ax}$ (vedi paragrafo 2.4.1) scopriamo che $y = c_2 x e^{ax}$ soddisfa ancora la (2.17) ed è linearmente indipendente da e^{ax} . La soluzione generale della (2.17) è allora:

$$y = c_1 e^{ax} + c_2 x e^{ax}.$$

Nel caso di una radice doppia $\lambda = a$ della (2.16), l'equazione differenziale ammette come soluzione non solo e^{ax} ma anche $x e^{ax}$.

Generalizzando, nel caso di una radice λ di molteplicità m della (2.16) sono soluzioni della (2.14) le funzioni $e^{\lambda x}, x e^{\lambda x}, \dots, x^{m-1} e^{\lambda x}$.

Da una radice di molteplicità m otteniamo m soluzioni linearmente indipendenti. Inoltre, per il teorema fondamentale dell'algebra, un polinomio di grado n ha esattamente n radici complesse se contate con la loro molteplicità. Questo significa che anche nel caso di radici multiple siamo in grado di scrivere una base per lo spazio vettoriale delle soluzioni.

ESEMPIO 2.12 Risolviamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + 2y' + 3y = 0 \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 2 \end{cases}.$$

L'equazione è del secondo ordine. Le soluzioni formano uno spazio vettoriale di dimensione 2. Per trovare una base per la soluzione generale abbiamo bisogno di due soluzioni linearmente indipendenti.

L'equazione caratteristica associata all'equazione differenziale è $\lambda^2 + 2\lambda + 3 = 0$; le sue soluzioni sono $\lambda = -1 \pm i\sqrt{2}$.

Entrambe le radici hanno molteplicità 1; una base per lo spazio delle soluzioni è ad esempio $\{e^{(-1+i\sqrt{2})x}, e^{(-1-i\sqrt{2})x}\}$, mentre la soluzione generale dell'equazione è:

$$y(x) = c_1 e^{(-1+i\sqrt{2})x} + c_2 e^{(-1-i\sqrt{2})x}.$$

Derivando,

$$y'(x) = (-1 + i\sqrt{2}) c_1 e^{(-1+i\sqrt{2})x} + (-1 - i\sqrt{2}) c_2 e^{(-1-i\sqrt{2})x}.$$

Imponiamo che siano soddisfatte le condizioni iniziali. Si giunge al sistema:

$$\begin{cases} y(0) = c_1 + c_2 = 1 \\ y'(0) = (-1 + i\sqrt{2}) c_1 + (-1 - i\sqrt{2}) c_2 = 2 \end{cases}$$

cioè

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ c_1 - c_2 = -\frac{i}{\sqrt{2}} \end{cases} \quad \text{da cui} \quad \begin{cases} c_1 = \frac{1}{2} - i\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ c_2 = \frac{1}{2} + i\frac{1}{2\sqrt{2}} \end{cases}.$$

La soluzione del problema di Cauchy è

$$y(x) = \left(\frac{1}{2} - i\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) e^{(-1+i\sqrt{2})x} + \left(\frac{1}{2} + i\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) e^{(-1-i\sqrt{2})x}. \quad (2.18)$$

Abbiamo risolto un problema di Cauchy *reale* trovando una soluzione che, apparentemente, non lo è. D'altra parte abbiamo scelto una base complessa nonostante lo spazio delle soluzioni sia costituito da funzioni reali.

Facendo un po' di calcoli si riesce a scrivere la (2.18) come funzione reale:

$$y(x) = e^{-x} \cos(\sqrt{2}x) + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-x} \sin(\sqrt{2}x)$$

Si noti che le funzioni $e^{-x} \cos(\sqrt{2}x)$ e $e^{-x} \sin(\sqrt{2}x)$ sono soluzioni dell'equazione differenziale e sono linearmente indipendenti. Sono una base (reale questa volta!) per lo spazio vettoriale delle soluzioni.

OSSERVAZIONE 2.3 È sempre possibile trovare una base reale per lo spazio vettoriale delle soluzioni.

Osserviamo innanzitutto che se un polinomio a coefficienti reali ammette la radice complessa $\lambda = a + ib$ allora deve ammettere anche la radice $\bar{\lambda} = a - ib$.

Quindi se $e^{(a+ib)x}$ è soluzione dell'equazione differenziale, lo è anche $e^{(a-ib)x}$. Sfruttando le proprietà dell'esponenziale complessa e le formule di Eulero,

$$\begin{aligned} e^{(a+ib)x} + e^{(a-ib)x} &= e^{ax}(e^{ibx} + e^{-ibx}) = 2e^{ax} \cos bx \\ e^{(a+ib)x} - e^{(a-ib)x} &= e^{ax}(e^{ibx} - e^{-ibx}) = 2ie^{ax} \sin bx \end{aligned}$$

Quindi lo spazio vettoriale generato da $e^{(a+ib)x}$ e $e^{(a-ib)x}$ coincide con quello generato dalle funzioni reali $e^{ax} \cos(bx)$ e $e^{ax} \sin(bx)$. Anche in presenza di una coppia di radici complesse coniugate è sempre possibile scrivere la soluzione generale come combinazione lineare di funzioni a valori reali.

ESEMPIO 2.13 Determinare la soluzione generale dell'equazione differenziale

$$y^{(4)} + 2y'' + y = 0.$$

L'equazione associata è $\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = 0$ ed ammette le soluzioni $\lambda = i$ e $\lambda = -i$ entrambe di molteplicità due.

Lo spazio vettoriale V delle soluzioni ha dimensione 4. Da ciascuna delle due radici si ricavano due elementi per la base di V . Ad esempio, $V = \langle e^{ix}, xe^{ix}, e^{-ix}, xe^{-ix} \rangle$.

In base all'osservazione 2.3 una base reale per V è $\{\cos(x), \sin(x), x \cos(x), x \sin(x)\}$. Utilizzando quest'ultima base, la soluzione generale è

$$y(x) = c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x) + c_3 x \cos(x) + c_4 x \sin(x).$$

ESEMPIO 2.14 Risolvere il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y''' + 2y'' + y' = 0 \\ y(0) = y'(0) = y''(0) = 1 \end{cases}$$

L'equazione è del terzo ordine. Lo spazio vettoriale delle soluzioni ha dimensione 3. Le soluzioni dell'equazione caratteristica associata sono $\lambda = 0$ e $\lambda = -1$ (doppia). La soluzione generale è

$$y(x) = c_0 + c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x}.$$

Imponiamo le condizioni iniziali:

$$\begin{aligned} y(0) &= c_0 + c_1 = 1 \\ y'(x) &= (c_2 - c_1)e^{-x} - c_2 x e^{-x} & y'(0) &= c_2 - c_1 = 1 \\ y''(x) &= c_1 e^{-x} - c_2 e^{-x} - c_2 e^{-x} & y''(0) &= c_1 - 2c_2 = 1 \end{aligned}$$

Risolvendo il sistema si trova $c_0 = 4$, $c_1 = -3$, $c_2 = -2$.

La soluzione del problema di Cauchy è: $y(x) = 4 - 3e^{-x} - 2xe^{-x}$.

2.4.3 Equazioni non omogenee a coefficienti costanti

Per la linearità dell'equazione, la soluzione generale delle equazioni complete sarà del tipo "soluzione particolare + soluzione dell'eq. omogenea". Sappiamo già risolvere le equazioni omogenee; ci resta solo da determinare una soluzione particolare.

È possibile determinare una soluzione particolare con il metodo della variazione della costante come abbiamo già fatto in altri casi.

ESEMPIO 2.15 Determinare la soluzione particolare dell'equazione

$$y' - y = e^{t+1}.$$

Per prima cosa risolviamo l'equazione omogenea: $y' - y = 0$. La soluzione generale è $y(t) = ce^t$.

Cerchiamo poi una soluzione particolare con la variazione della costante: cerchiamo una soluzione del tipo $c(t)e^t$. Derivando e sostituendo nell'equazione completa, $c(t)$ deve soddisfare l'equazione differenziale

$$c'(t)e^t = e^{t+1} \quad \text{ovvero} \quad c'(t) = e \quad \text{e} \quad c(t) = et + \text{costante}.$$

Possiamo scegliere la *costante* = 0; come soluzione particolare abbiamo allora te^{t+1} ; la soluzione generale dell'equazione è $y(t) = ce^t + te^{t+1}$.

Nel caso di equazioni di ordine superiore al primo l'uso della variazione della costante si complica e si va incontro a cacoli piuttosto pesanti.

Per alcune forme particolari del termine noto è possibile sfruttare informazioni "a priori" sulla forma della soluzione particolare. Questo ci permette di cercare le soluzioni particolari in classi molto ristrette di funzioni, evitando così il metodo della variazione della costante.

Caso I: Il termine noto non è soluzione dell'equazione omogenea

Supponiamo per il momento che **il termine noto non sia una soluzione dell'equazione omogenea**. Vedremo in seguito come ci si comporta in caso contrario. Esaminiamo alcuni dei casi più comuni:

Termine noto della forma " $a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t)$ "

Le derivate di combinazioni lineari di seni e coseni sono ancora combinazioni lineari dei seni e coseni. Se il termine noto è di questa forma, esistono soluzioni particolari della forma $c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t)$.

Rispetto alla variazione della costante, dove era necessario risolvere una equazione differenziale per determinare la soluzione particolare, qui è sufficiente risolvere un sistema lineare per determinare i due coefficienti c_1 e c_2 .

Vale la pena osservare che in generale è necessario cercare soluzioni particolari con entrambi gli addendi anche nel caso in cui il termine noto contenga solo una delle due funzioni trigonometriche. Si noti che le derivate di ordine dispari di un seno sono coseni e viceversa. È possibile trovare soluzioni particolari in cui compare solo una funzione trigonometrica solo nel caso in cui compaiano soltanto derivate di ordine pari (nella soluzione particolare compare la stessa funzione trigonometrica del termine noto) o soltanto di ordine dispari (nella soluzione particolare compare solo la funzione trigonometrica che non figura nel termine noto).

OSSERVAZIONE 2.4 Si noti che se il termine noto è soluzione dell'equazione omogenea, (in altri termini se $\lambda = i\omega$ è soluzione dell'equazione caratteristica), tutte le funzioni del tipo $c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t)$ annullano il primo membro dell'equazione.

ESEMPIO 2.16 Determiniamo una soluzione particolare di $y' - y = 3 \sin(2t)$.

L'equazione omogenea è soddisfatta dalle funzioni ce^t ; il termine noto non è soluzione dell'equazione omogenea.

Cerchiamo una soluzione particolare del tipo $y(t) = c_1 \cos(2t) + c_2 \sin(2t)$. Deriviamo e sostituiamo nell'equazione:

$$y'(t) - y(t) = -2c_1 \sin(2t) + 2c_2 \cos(2t) - c_1 \cos(2t) - c_2 \sin(2t) = 3 \sin(2t) + 0 \cos(2t).$$

Semplificando e uguagliando i coefficienti di $\sin(2t)$ e di $\cos(2t)$ si giunge al sistema

$$\begin{cases} -2c_1 - c_2 = 3 \\ 2c_2 - c_1 = 0 \end{cases} \quad \text{che è soddisfatto da} \quad \begin{cases} c_1 = -6/5 \\ c_2 = -3/5 \end{cases}.$$

La funzione $y(t) = -\frac{6}{5} \sin(2t) - \frac{3}{5} \cos(2t)$ è la soluzione particolare cercata.

Termine noto della forma “ ae^{bt} ”

Le derivate delle funzioni esponenziali sono ancora esponenziali con lo stesso esponente. Sempre supponendo che il termine noto non soddisfi l'equazione (in termini di equazione caratteristica supponiamo che b non sia soluzione), si cercano soluzioni particolari della forma ce^{bt} .

Il problema è ricondotto alla soluzione di un'equazione di primo grado nell'incognita c .

Termine noto polinomiale

Le derivate dei polinomi sono ancora polinomi ma di grado inferiore. Se il termine noto è un polinomio $p(t)$ di grado k e non soddisfa l'equazione omogenea (cioè zero non è soluzione di molteplicità k dell'equazione caratteristica), l'equazione ammette una soluzione particolare polinomiale $q(t)$ di grado k .

Termine noto della forma “ $(a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t))e^{ct}$ ”

Si cercano soluzioni particolari della stessa forma del termine noto. Il problema è ricondotto a determinare i coefficienti di seno e coseno.

Termine noto della forma “polinomio per esponenziale”

Se il termine noto è del tipo $p(t)e^{ct}$, si cercano soluzioni della forma “ $q(t)e^{ct}$ ” dove $q(t)$ è un polinomio dello stesso grado di $p(t)$.

Termine noto della forma “ $(a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t))p(t)$ ”

Si cercano soluzioni della forma $(c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t))q(t)$. Sostituendo nell'equazione differenziale si determinano c_1 , c_2 ed i coefficienti di $q(t)$.

OSSERVAZIONE 2.5 Per le equazioni lineari vale quello che i fisici chiamano “principio di sovrapposizione degli effetti”: supponiamo di avere un'equazione lineare della forma

$$F(y^{(n)}, y^{(n-1)}, \dots, y', y) = f(x) + g(x). \quad (2.19)$$

Sia $y_1(x)$ una soluzione di $F(y^{(n)}, y^{(n-1)}, \dots, y', y) = f(x)$ e sia $y_2(x)$ una soluzione di $F(y^{(n)}, y^{(n-1)}, \dots, y', y) = g(x)$; sommando membro a membro, la funzione $y(x) = y_1(x) + y_2(x)$ soddisfa la (2.19).

ESEMPIO 2.17 Risolviamo l'equazione differenziale $y' - y = \sin(2t) + e^{-t} + t$.

La soluzione generale dell'equazione omogenea è $y(t) = ce^t$. Per trovare una soluzione particolare sfruttiamo l'osservazione 2.5 e scomponiamo il termine noto esaminando un'addendo alla volta.

- i) Esaminiamo il primo addendo del termine noto. Cerchiamo una soluzione particolare di $z_1' - z_1 = \sin(2t)$ della forma $z_1 = a \sin(2t) + b \cos(2t)$.

$$z_1' - z_1 = (a - 2b) \sin(2t) + (2a + b) \cos(2t) = 1 \sin(2t) + 0 \cos(2t).$$

Quindi

$$\begin{cases} a - 2b = 1 \\ 2a + b = 0 \end{cases} \quad \text{che ha soluzione} \quad \begin{cases} a = 1/3 \\ b = -1/3 \end{cases}.$$

Allora, $z_1(t) = \frac{1}{3}(\sin(2t) - \cos(2t))$.

ii) Consideriamo ora $z'_2 - z_2 = e^{-t}$. Cerchiamo una soluzione della forma $z_2 = ae^{-t}$.

$$z'_2 - z_2 = -ae^{-t} - ae^{-t} = e^{-t}, \quad \text{da cui} \quad a = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad z_2 = \frac{1}{2}e^{-t}.$$

iii) Resta da considerare $z'_3 - z_3 = t$. Questa volta il prototipo per la soluzione particolare è il generico polinomio di primo grado $z_3 = at + b$.

$$z'_3 - z_3 = -at + (a - b) = t. \quad \begin{cases} a = -1 \\ a - b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases}$$

e quindi $z_3 = -t - 1$.

Una soluzione particolare dell'equazione differenziale per la y è

$$z_1 + z_2 + z_3 = \frac{1}{3}(\sin(2t) - \cos(2t)) + \frac{1}{2}e^{-t} + (-t + 1).$$

Infine, la soluzione generale è

$$y = ce^t + \frac{1}{3}(\sin(2t) - \cos(2t)) + \frac{1}{2}e^{-t} + (-t + 1).$$

Caso II: Il termine noto è soluzione dell'equazione omogenea

Esaminiamo un paio di esempi tanto per fissare le idee:

ESEMPIO 2.18 Risolviamo l'equazione: $y' - y = e^t$. Al solito risolviamo l'equazione omogenea: $y = ce^t$. Per come è fatto il termine noto dovremo cercare soluzioni particolari del tipo $y_1 = ae^t$. y_1 però è soluzione dell'equazione omogenea, quindi $y'_1 - y_1 = 0$ qualunque sia a .

Proviamo a cercare soluzioni della forma $y_1 = ate^t$:

$$y'_1 - y_1 = (a + at)e^t - ate^t = ae^t.$$

Confrontando con il termine noto e^t si trova $a = 1$. $y_1 = te^t$ è una soluzione particolare dell'equazione. Per avere la soluzione generale y basta sommare a y_1 la soluzione generale dell'equazione omogenea: $y = c_1e^t + c_2te^t$.

ESEMPIO 2.19 Risolviamo l'equazione $y'' - 2y' + y = e^t$.

L'equazione caratteristica è $(\lambda - 1)^2 = 0$. La soluzione $\lambda = 1$ è doppia. La soluzione generale dell'equazione omogenea è $y = ae^t + bte^t$. Sia e^t che te^t sono soluzioni dell'equazione omogenea. Proviamo a cercare soluzioni del tipo $y_1 = at^2e^t$.

Sostituendo, $y''_1 - 2y'_1 + y_1 = \dots = 2ae^t = e^t$ da cui si ricava $a = 1/2$.

$y_1 = \frac{1}{2}t^2e^t$ è una soluzione particolare. La soluzione generale è $\frac{1}{2}t^2e^t + c_1e^t + c_2te^t$.

Dagli esempi si può estrapolare la regola generale: nel caso in cui il termine noto sia soluzione dell'equazione omogenea, si dovrà cercare una soluzione particolare della forma considerata nel caso I moltiplicata per t^m dove m è la molteplicità della radice dell'equazione caratteristica corrispondente al termine noto preso in esame.

Nell'esempio 2.18 al termine noto e^t corrisponde la soluzione $\lambda = 1$ dell'equazione caratteristica. La soluzione è semplice e quindi come prototipo per la soluzione particolare abbiamo scelto ate^t .

Nell'esempio 2.19 la soluzione dell'equazione caratteristica che corrisponde al termine noto (sempre $\lambda = 1$) è doppia. Il prototipo utilizzato è infatti at^2e^t .

ESEMPIO 2.20 Determinare una soluzione particolare dell'equazione $y^{(5)} - y''' = t + 1$.

Al termine noto (polinomiale) corrisponde la soluzione $\lambda = 0$ (tripla) dell'equazione caratteristica. Il prototipo per la soluzione particolare è $t^3(at + b)$.

Facendo i calcoli troviamo $a = 1/24$, $b = 1/6$ ovvero $y = \frac{1}{24}t^4 + \frac{1}{6}t^3$.

Per esercizio scrivere la soluzione generale dell'equazione.

2.5 Equazione di Bernoulli

L'equazione di Bernoulli è una equazione del primo ordine, non lineare, della forma

$$y' + a(t)y = b(t)y^n. \quad (2.20)$$

È possibile ricondurre l'equazione ad una lineare mediante una opportuna sostituzione. Introduciamo la nuova incognita $z(t)$ definita da $y = z^\alpha$ dove α è un parametro che ci riserviamo di scegliere in seguito; si ha $y' = \alpha z^{\alpha-1} z'$ e, sostituendo nella (2.20),

$$\alpha z^{\alpha-1} z' + \alpha z^\alpha = b z^{n\alpha}.$$

Se scegliamo α in modo tale che $\alpha - 1 = n\alpha$ (ovvero $\alpha = 1/(1-n)$), è possibile raccogliere a fattor comune e semplificare nell'eq precedente un fattore $z^{\alpha-1}$:

$$z^{\alpha-1}(\alpha z' + \alpha z) = z^{\alpha-1} \cdot b, \quad \text{cioè} \quad \alpha z' + \alpha z = b. \quad (2.21)$$

Ci siamo ricondotti ad una equazione lineare risolvibile con le tecniche del paragrafo 2.4.1. Facendo i calcoli e tenendo presente che $1/\alpha = 1-n$,

$$z(t) = c e^{(n-1)A(t)} + (1-n)e^{(n-1)A(t)} \int_{x_0}^t b(\tau) e^{(n-1)A(\tau)} d\tau.$$

dove $A(t)$ è una primitiva di $a(t)$. Infine,

$$y(t) = \left\{ c e^{(n-1)A(t)} + (1-n)e^{(n-1)A(t)} \int_{x_0}^t b(\tau) e^{(n-1)A(\tau)} d\tau \right\}^{\frac{1}{1-n}}.$$

ESEMPIO 2.21 Risolvere l'equazione di Bernoulli $y' + xy = xy^3$.

Poniamo $y = z^\alpha$. Sostituendo, $\alpha z^{\alpha-1} z' + xz = z^{3\alpha}$. Scegliamo α tale che $\alpha - 1 = 3\alpha$, cioè $\alpha = -1/2$. L'equazione per z è

$$z' - 2xz = -2x. \quad (2.22)$$

La soluzione dell'equazione omogenea è $z_0(t) = ce^{x^2}$. Con la variazione della costante determiniamo la soluzione generale $z(t) = e^{-x^2} + ce^{x^2}$ della (2.22) e quindi $y(t) = z(t)^{-1/2}$.

OSSERVAZIONE 2.6 Finora abbiamo usato il metodo della variazione della costante esclusivamente per equazioni lineari. È possibile però utilizzarlo anche per risolvere l'equazione di Bernoulli. Questo fatto non deve sorprendere viste le "parentele" dell'equazione di Bernoulli con le equazioni lineari.

Provare, per esercizio, a risolvere prima l'equazione $y' + a(t)y = 0$ per poi determinare la soluzione generale della (2.20) facendo variare la costante.

CAPITOLO 3

Serie di Fourier

Le serie di Fourier sono introdotte a partire da problemi di approssimazione nel senso dei minimi quadrati. Tra i vari approcci non è certo il più agevole; ha però il vantaggio che, una volta superato lo “*choc*” iniziale, lo sviluppo della teoria e la comprensione del significato delle applicazioni pratiche dovrebbe risultare naturale e piuttosto agevole.

Nella prima parte del capitolo sono introdotte alcune nozioni generali sugli spazi di Hilbert con particolare riguardo per lo spazio $L^2([-\pi, \pi])$, ambiente naturale per lo studio delle serie di Fourier.

Successivamente si passa alle serie di Fourier utilizzando sia la notazione trigonometrica che quella esponenziale dimostrando alcuni teoremi di convergenza e le principali proprietà.

Il capitolo termina con l'applicazione delle serie di Fourier allo studio delle equazioni alle derivate parziali.

3.1 Spazi di Hilbert

DEFINIZIONE 3.1 Sia V uno spazio vettoriale su \mathbb{R} (o su \mathbb{C}). Una **norma** su V è una applicazione $N : V \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

- i) $N(x) \geq 0$ per ogni $x \in V$; $N(x) = 0$ se e solo se $x = 0$.
- ii) $N(\alpha x) = |\alpha|N(x)$ per ogni $x \in V$, per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ (o $\alpha \in \mathbb{C}$).
- iii) $N(x + y) \leq N(x) + N(y)$ per ogni $x, y \in V$ (disuguaglianza triangolare).

ESEMPIO 3.1

- Il valore assoluto è una norma per \mathbb{R} ;
- Il modulo di un numero complesso è una norma per \mathbb{C} ;
- Una possibile norma per $V = \mathbb{R}^n$ è la *norma euclidea*: se $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $N_2(x) = \|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$;
- In generale, uno spazio vettoriale ammette più di una norma. Anche

$$N_1(x) = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n| \quad e \quad N_\infty(x) = \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|\}$$

sono norme per $V = \mathbb{R}^n$. A volte N_1 ed N_∞ si trovano indicate come $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_\infty$ rispettivamente. Verificare per esercizio che N_1 ed N_∞ soddisfano effettivamente la definizione (3.1).

Quando non ci sono ambiguità su quale norma si stia utilizzando, la indicheremo semplicemente con $\|\cdot\|$.

ESERCIZIO 3.1 Per ciascuna delle norme definite nell'esempio 3.1 verificare le proprietà *i*), *ii*), *iii*) della definizione 3.1.

DEFINIZIONE 3.2 Uno spazio vettoriale V sui reali si dice **unitario** se su di esso è definito un prodotto scalare, ovvero una applicazione che ad una coppia di elementi $x, y \in V$ fa corrispondere un numero reale che indicheremo con $\langle x, y \rangle$ e che si dice **prodotto scalare** di x ed y , in modo che valgano le proprietà seguenti:

- i*) $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle \quad \forall x, y, z \in V;$
- ii*) $\langle \alpha x, y \rangle = \langle x, \alpha y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle \quad \forall x, y \in V, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R};$
- iii*) $\langle x, x \rangle \geq 0 \quad \forall x \in V; \quad \langle x, x \rangle = 0$ se e solo se $x = 0;$
- iv*) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle \quad \forall x, y \in V.$

DEFINIZIONE 3.3 Uno spazio vettoriale V sui complessi si dice **unitario** se su di esso è definito un prodotto hermitiano, ovvero una applicazione che ad una coppia di elementi $x, y \in V$ fa corrispondere un numero complesso che indicheremo con $\langle x, y \rangle$ e che si dice **prodotto hermitiano** di x ed y , in modo che valgano le proprietà seguenti:

- i*) $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle \quad \forall x, y, z \in V;$
- ii*) $\langle \alpha x, y \rangle = \langle x, \bar{\alpha} y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle \quad \forall x, y \in V, \quad \forall \alpha \in \mathbb{C};$
- iii*) $\langle x, x \rangle$ è reale e non negativo $\quad \forall x \in V; \quad \langle x, x \rangle = 0$ se e solo se $x = 0;$
- iv*) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle} \quad \forall x, y \in V.$

A partire da un prodotto scalare (o da un prodotto hermitiano) è sempre possibile definire una norma ponendo

$$\|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2}. \quad (3.1)$$

La verifica delle condizioni *i*) e *ii*) della definizione 3.1 è pressoché immediata. Per dimostrare la *iii*) è necessario un risultato preliminare:

Proposizione 3.1 (disuguaglianza di Schwarz) Sia V uno spazio unitario (reale o complesso). Per ogni $x, y \in V$ si ha

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\| \quad (3.2)$$

Dimostrazione. Se $x = 0$ o se $y = 0$ entrambi i membri della (3.2) sono nulli e quindi non c'è niente da dimostrare. Sia $\lambda = s + it \in \mathbb{C}$ e supponiamo $x, y \neq 0$ si ha:

$$\begin{aligned} 0 \leq \|x - \lambda y\|^2 &= \langle x - \lambda y, x - \lambda y \rangle = \\ &= \|x\|^2 - (s - it) \langle x, y \rangle - (s + it) \overline{\langle x, y \rangle} + (s^2 + t^2) \|y\|^2 = \\ &= \|x\|^2 - 2s \operatorname{Re}(\langle x, y \rangle) - 2t \operatorname{Im}(\langle x, y \rangle) + (s^2 + t^2) \|y\|^2 \end{aligned}$$

La funzione $E(s, t) = \|x - (s + it)y\|^2$ è sempre non negativa. In particolare sarà non negativo il valore del suo minimo. Il minimo è raggiunto quando s, t sono tali che

$$\frac{\partial E}{\partial s} = -2 \operatorname{Re}(\langle x, y \rangle) + 2s \|y\|^2 = 0, \quad \frac{\partial E}{\partial t} = -2 \operatorname{Im}(\langle x, y \rangle) + 2t \|y\|^2 = 0$$

da cui si ricava $s + it = \frac{\operatorname{Re}(\langle x, y \rangle)}{\|y\|^2} + i \frac{\operatorname{Im}(\langle x, y \rangle)}{\|y\|^2} = \frac{\langle x, y \rangle}{\|y\|^2}$.

Quindi è vero che

$$0 \leq \left\| x - \frac{\langle x, y \rangle}{\|y\|^2} y \right\|^2 = \|x\|^2 - 2 \frac{\langle x, y \rangle \overline{\langle x, y \rangle}}{\|y\|^2} + \frac{\|y\|^2}{\|y\|^4} \langle x, y \rangle \overline{\langle x, y \rangle}$$

ovvero $0 < \|x\|^2 \|y\|^2 - |\langle x, y \rangle|^2$ da cui segue la tesi. \square

OSSERVAZIONE 3.1 Nel caso degli spazi vettoriali reali esiste una dimostrazione alternativa, forse più semplice, della disuguaglianza di Schwarz: sia $\lambda \in \mathbb{R}$ e supponiamo $x, y \neq 0$ si ha:

$$0 \leq \|x - \lambda y\|^2 = \langle x - \lambda y, x - \lambda y \rangle = \|x\|^2 - 2\lambda \langle x, y \rangle + \lambda^2 \|y\|^2$$

La disuguaglianza appena scritta vale per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$; il trinomio $\|x\|^2 - 2\lambda \langle x, y \rangle + \lambda^2 \|y\|^2$ non può cambiare segno al variare di λ , quindi

$$4 \langle x, y \rangle^2 - 4 \|x\|^2 \|y\|^2 \leq 0 \quad \text{cioè} \quad \langle x, y \rangle^2 \leq \|x\|^2 \|y\|^2.$$

Proposizione 3.2 (disuguaglianza triangolare) *Sia V uno spazio unitario (reale o complesso). Per ogni $x, y \in V$ vale la disuguaglianza*

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \tag{3.3}$$

Dimostrazione:

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle = \|x\|^2 + \langle x, y \rangle + \overline{\langle x, y \rangle} + \|y\|^2 = \\ &= \|x\|^2 + 2 \operatorname{Re} \langle x, y \rangle + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2 \operatorname{Re} (\|x\| \|y\|) + \|y\|^2 = \\ &= (\|x\| + \|y\|)^2. \end{aligned}$$

dove si sono utilizzate le proprietà del prodotto hermitiano (o scalare se lo spazio V è sui reali), la proposizione 3.1 e il fatto che $\|x\| \|y\| \in \mathbb{R}$. \square

DEFINIZIONE 3.4 *Una successione $\{x_n\}$ a valori in uno spazio vettoriale normato V si dice di Cauchy se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un indice n tale che $\|x_m - x_k\| < \varepsilon$ per ogni $m, k > n$.*

ESEMPIO 3.2 Tutte le successioni a valori reali, convergenti sono successioni di Cauchy. Sia $\{x_n\}$ a valori reali e tale che $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \ell$. Dalla definizione di limite, per ogni $\varepsilon_1 > 0$ esiste n tale che $|x_k - \ell| < \varepsilon_1$ per ogni $k > n$. Se $m, k > n$, per la disuguaglianza triangolare, $|x_m - x_k| \leq |x_m - \ell| + |\ell - x_k| < 2\varepsilon_1$. Se scegliamo $\varepsilon = 2\varepsilon_1$ abbiamo dimostrato che $\{x_n\}$ è di Cauchy.

DEFINIZIONE 3.5 *Uno spazio vettoriale V dotato di norma si dice **completo** se ogni successione di Cauchy $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è convergente in V .*

DEFINIZIONE 3.6 *Uno spazio vettoriale V si dice **di Hilbert** se è completo ed unitario.*

ESEMPIO 3.3

- i) \mathbb{R}^n è uno spazio di Hilbert se munito del prodotto scalare usuale (prodotto componente per componente).
- ii) \mathbb{C}^n è uno spazio di Hilbert se munito del prodotto hermitiano $\langle x, y \rangle = x \cdot \bar{y}$ dove con “ \cdot ” si è indicato ancora il prodotto componente per componente.
- iii) le funzioni continue a valori reali definite in $[0, 1]$ formano uno spazio unitario rispetto al prodotto scalare

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t) dt, \quad f, g \in C([0, 1]). \quad (3.4)$$

Non è però uno spazio di Hilbert dato che non è completo. Consideriamo la successione $f_n(t) = t^n$. Siano $m, k > n$,

$$\begin{aligned} \|f_k - f_m\|^2 &= \langle f_k - f_m, f_k - f_m \rangle = \int_0^1 (t^m - t^k)^2 dt = \\ &= \frac{1}{2m+1} + \frac{1}{2k+1} - \frac{2}{m+k+1} < \frac{2}{2n+1}. \end{aligned}$$

La successione $\{f_n\}$ è di Cauchy in $C([0, 1])$ ($\varepsilon = \sqrt{2/(2n+1)}$) ma

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \neq 1 \\ 1 & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

non è continua, cioè $f \notin C([0, 1])$. La successione f_n non converge in $C([0, 1])$. Di conseguenza $C([0, 1])$ non è uno spazio di Hilbert.

ESERCIZIO 3.2 Verificare che $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)\overline{g(t)} dt$ è un prodotto hermitiano nello spazio delle funzioni continue $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$.

Teorema 3.1 (teorema delle proiezioni ortogonali) *Sia V uno spazio di Hilbert e sia V_0 un sottospazio chiuso di V e sia $u \in V$. Esiste uno ed un solo $w \in V_0$ tale che*

$$\|w - u\| \leq \|v - u\| \quad \forall v \in V_0.$$

Inoltre w è l'unico punto di V_0 tale che $\langle w, v \rangle = \langle u, v \rangle$ per ogni $v \in V_0$. Infine, $\|w\| \leq \|u\|$.

3.2 Il metodo dei minimi quadrati in \mathbb{R}^n

Sia $A = (a_{ij})$ una matrice reale di tipo $m \times n$ con $m > n$; siano poi $b = (b_1, b_2, \dots, b_m) \in \mathbb{R}^m$ e $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Consideriamo il sistema lineare $Ax = b$ composto da m equazioni in n incognite. Supponiamo che le colonne a_1, a_2, \dots, a_n di A siano linearmente indipendenti.

Dal corso di Geometria sappiamo che se esiste una soluzione x del sistema $Ax = b$ allora

$$x_1 a_1 + x_2 a_2 + \dots + x_n a_n = b.$$

In altre parole, il vettore b deve appartenere allo spazio vettoriale $V_A = \langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$ generato dalle colonne di A . Se b è un qualunque vettore di \mathbb{R}^m non è detto che appartenga al sottospazio V_A quindi, in generale, il sistema $Ax = b$ non ammetterà soluzione. Abbiamo supposto gli a_i linearmente indipendenti quindi a_1, a_2, \dots, a_n è una base per V_A . Se $b \in V_A$ lo si può scrivere in modo unico come combinazione lineare (di coefficienti x_1, x_2, \dots, x_n) degli elementi a_1, a_2, \dots, a_n della base. Questo significa che, quando esiste, la soluzione del sistema è unica. Moltiplichiamo il sistema di partenza a sinistra per A^T : $A^T Ax = A^T b$. Il nuovo sistema è quadrato $n \times n$ e si verifica facilmente che la matrice $A^T A$ è invertibile. Se $b \in V_A$, la soluzione del sistema iniziale è allora $x = (A^T A)^{-1} A^T b$.

Se $b \notin V_A$ non esistono x_1, x_2, \dots, x_n tali che $b_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j$, $i = 1, 2, \dots, m$.

Tutto quello che possiamo fare è cercare un “surrogato” della soluzione.

DEFINIZIONE 3.7 Chiamiamo soluzione del sistema $Ax = b$ nel senso dei minimi quadrati un vettore $x = x_1, x_2, \dots, x_n$ tale che $\|b - Ax\|$ sia minimo.

Se $b \in \mathbb{R}^m$, esistono unici due vettori $p_1 \in V_A$ e $p_2 \in V_A^\perp$ tali che $b = p_1 + p_2$. Si ha

$$\|b - Ax\|^2 = \|p_2 + (p_1 - Ax)\|^2 = \|p_2\|^2 + \|p_1 - Ax\|^2$$

dato che $p_1 - Ax \in V_A$ e $p_2 \perp (p_1 - Ax)$. Si vede subito che il valore di x che rende minima $\|b - Ax\|^2$ è la soluzione di $p_1 = Ax$ (un tale x esiste dato che $p_1 \in V_A$).

Per quanto detto sopra,

$$x = (A^T A)^{-1} A^T p_1 = (A^T A)^{-1} A^T (b - p_2) = (A^T A)^{-1} A^T b - (A^T A)^{-1} A^T p_2.$$

Ma $p_2 \perp V_A$ significa che $\langle a_i^T, p_2 \rangle = 0$ per $i = 1, \dots, n$ ovvero $A^T p_2 = 0$. Quindi $x = (A^T A)^{-1} A^T b$.

Cercare una soluzione di $Ax = b$ nel senso dei minimi quadrati equivale a cercare l'elemento di V_A più vicino (cioè che “dista meno” in norma) a b . Questa interpretazione della soluzione nel senso dei minimi quadrati apre la strada alla soluzione di problemi di migliore approssimazione. Una volta determinata la soluzione x del sistema lineare, il vettore Ax è l'elemento di V_A che meglio approssima b . L'errore commesso nell'approssimazione è la norma del residuo:

$$\text{Errore} = \|b - Ax\|.$$

ESERCIZIO 3.3 Determinare la migliore approssimazione nel senso dei minimi quadrati del vettore $(3, 1, 0)$ mediante elementi dello spazio V generato da $(1, 1, 2)$ e da $(1, -1, 3)$. Calcolare poi l'errore commesso con l'approssimazione.

L'esercizio consiste nel risolvere nel senso dei minimi quadrati il sistema $Ax = b$ dove

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Si ha:

$$A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 11 \end{pmatrix}, \quad A^T b = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$(A^T A)^{-1} = \frac{1}{30} \begin{pmatrix} 11 & -6 \\ -6 & 6 \end{pmatrix}, \quad x = (A^T A)^{-1} A^T b = \frac{1}{30} \begin{pmatrix} 11 & -6 \\ -6 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{2}{15} \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \end{pmatrix}$$

La migliore approssimazione di b è il vettore

$$Ax = \frac{2}{15} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \end{pmatrix} = \frac{2}{15} \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \\ 7 \end{pmatrix},$$

l'errore commesso è

$$\left\| (3, 1, 0) - \left(\frac{2}{3}, \frac{22}{15}, \frac{14}{15} \right) \right\| = \sqrt{\frac{49}{9} + \frac{49}{225} + \frac{196}{225}} = \frac{\sqrt{1470}}{15}.$$

A verifica della correttezza della soluzione trovata, il vettore residuo $b - Ax$ è ortogonale alle colonne di A ; in altre parole $A^T(b - Ax) = 0$.

Le considerazioni che abbiamo appena fatto per \mathbb{R}^n continuano a valere anche in spazi più generali. Nei paragrafi seguenti ci occuperemo di un esempio particolarmente interessante.

3.3 Lo spazio $L^2(\Omega)$

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un parallelepipedo (un intervallo nel caso $n = 1$). Consideriamo l'insieme \mathcal{L}^2 delle funzioni a valori reali (o complessi), definite in Ω , tali che

$$\int_{\Omega} |f(x)|^2 dx < +\infty.$$

Si verifica abbastanza facilmente che \mathcal{L}^2 è uno spazio vettoriale. Su \mathcal{L}^2 è anche possibile definire un prodotto scalare

$$\langle f, g \rangle = \int_{\Omega} f(t) \overline{g(t)} dt. \quad (3.5)$$

A partire dal prodotto scalare vorremo definire come norma

$$\|f\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} f(t) \overline{f(t)} dt = \int_{\Omega} |f(t)|^2 dt \quad (3.6)$$

ma c'è un problema: non è una norma! Sia $x_0 \in \Omega$ e sia $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = x_0 \\ 0 & \text{se } x \neq x_0 \end{cases}$:

$\|f\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} = 0$ ma f non è identicamente nulla e questo contraddice la *i*) della definizione 3.1. Per aggirare l'ostacolo, diremo che due funzioni $f, g \in \mathcal{L}^2(\Omega)$ sono equivalenti se $\int_{\Omega} |f(t) - g(t)|^2 dt = 0$. Abbiamo così diviso gli elementi di \mathcal{L}^2 in classi di equivalenza.

Il prodotto scalare (3.5) e la (3.6) non cambiano scegliendo un rappresentante di una classe piuttosto che un'altro.

DEFINIZIONE 3.8 Chiamiamo $L^2(\Omega)$ l'insieme delle classi di equivalenza delle funzioni di \mathcal{L}^2 .

Una volta chiarita la differenza tra i due spazi, non faremo una distinzione vera e propria tra gli elementi di \mathcal{L}^2 e gli elementi di L^2 , sottintendendo comunque di utilizzare sempre questi ultimi. La (3.5) è un prodotto scalare in $L^2(\Omega)$ e la (3.6) è (e questa volta veramente!) una norma per $L^2(\Omega)$.

Proprietà dello spazio $L^2(\Omega)$

i) $L^2(\Omega)$ è uno spazio vettoriale (e quindi uno spazio unitario) su \mathbb{R} o su \mathbb{C} a seconda che si considerino funzioni a valori in \mathbb{R} o in \mathbb{C} rispettivamente.

ii) (disuguaglianza di Hölder)

$$\left| \int_{\Omega} f(t) \overline{g(t)} dt \right| \leq \left(\int_{\Omega} f(t) \overline{f(t)} dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} g(t) \overline{g(t)} dt \right)^{\frac{1}{2}} \quad \forall f, g \in L^2(\Omega). \quad (3.7)$$

È la disuguaglianza di Schwarz scritta per gli elementi di $L^2(\Omega)$.

iii) (disuguaglianza di Minkowski)

$$\left\{ \int_{\Omega} |f(t) + g(t)|^2 dt \right\}^{\frac{1}{2}} \leq \left\{ \int_{\Omega} |f(t)|^2 dt \right\}^{\frac{1}{2}} + \left\{ \int_{\Omega} |g(t)|^2 dt \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (3.8)$$

Si tratta delle disuguaglianza triangolare per gli elementi di $L^2(\Omega)$.

iv) $L^2(\Omega)$ è completo. Dimosteremo questa affermazione più avanti, e soltanto in un caso particolare.

Dalla *i*) e dalla *iv*) segue che $L^2(\Omega)$ è uno spazio di Hilbert.

3.3.1 Lo spazio $L^2([-\pi, \pi])$

$L^2([-\pi, \pi])$ è lo spazio vettoriale delle funzioni $f: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ (o \mathbb{C}) tali che

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \overline{f(t)} dt < \infty.$$

Esaminiamo il caso reale: un primo passo per lo studio di $L^2([-\pi, \pi])$ è cercarne una base. Gli elementi dello spazio sono funzioni quindi la base che stiamo cercando sarà una successione $\{f_n\}$ di funzioni di $L^2([-\pi, \pi])$.

Cerchiamo di determinare una sistema ortonormale per $L^2([-\pi, \pi])$ ovvero una successione $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tale che:

$$\|f_n\|^2 = \langle f_n, f_n \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f_n(x) \overline{f_n(x)} dx = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\langle f_n, f_m \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f_n(x) \overline{f_m(x)} dx = 0 \quad \forall m, n \in \mathbb{N}, m \neq n$$

È possibile costruire un sistema ortonormale per $L^2([-\pi, \pi])$ a partire dalle funzioni trigonometriche:

Proposizione 3.3 *Siano m, n interi non negativi. Valgono le uguaglianze seguenti:*

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \cos(mx) dx = \begin{cases} 0 & \text{se } m \neq n \\ \pi & \text{se } m = n \neq 0 \\ 2\pi & \text{se } m = n = 0 \end{cases} \quad (3.9)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \sin(mx) dx = \begin{cases} 0 & \text{se } m \neq n \\ \pi & \text{se } m = n \neq 0 \end{cases} \quad (3.10)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \cos(mx) dx = 0 \quad (3.11)$$

Dimostrazione. Le tre formule si dimostrano utilizzando le formule di prostaferesi per calcolare gli integrali. \square

La proposizione 3.3, letta in termini di prodotto scalare in $L^2([-\pi, \pi])$, significa che

$$\begin{aligned} \langle \cos(mx), \cos(nx) \rangle &= 0 && \text{per } m \neq n, \\ \langle \sin(mx), \sin(nx) \rangle &= 0 && \text{per } m \neq n, \\ \langle \cos(mx), \sin(nx) \rangle &= 0 && \text{per ogni } m, n \end{aligned}$$

ovvero che le funzioni $\sin(mx)$ per $m > 0$ e $\cos(mx)$ per $m \geq 0$ sono un sistema ortogonale di $L^2([-\pi, \pi])$. Sempre dalla proposizione 3.3,

$$\begin{aligned} \|\cos(mx)\|^2 &= \langle \cos(mx), \cos(mx) \rangle = \begin{cases} \pi & \text{se } m \neq 0 \\ 2\pi & \text{se } m = 0 \end{cases} \\ \|\sin(mx)\|^2 &= \langle \sin(mx), \sin(mx) \rangle = \pi. \end{aligned}$$

Se normalizziamo (dividiamo le funzioni per la loro norma in modo da renderle di norma 1), abbiamo costruito un sistema ortonormale per $L^2([-\pi, \pi])$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(x), \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(2x), \dots, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(mx) \dots \\ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(x), \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(2x), \dots, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(mx) \dots \end{aligned}$$

OSSERVAZIONE 3.2 I sistemi ortonormali sono utilissimi quando si devono calcolare norme o prodotti scalari. Ad esempio, se $f = a_1 f_1 + \dots + a_n f_n$, dove $f_1, f_2, \dots, f_n \in L^2([-\pi, \pi])$, $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ e le f_i sono un sistema ortonormale, allora

$$\|f\|^2 = |a_1|^2 \|f_1\|^2 + |a_2|^2 \|f_2\|^2 + \dots + |a_n|^2 \|f_n\|^2 = |a_1|^2 + |a_2|^2 + \dots + |a_n|^2.$$

Conoscere un sistema ortonormale è di aiuto anche nei problemi di migliore approssimazione nel senso dei minimi quadrati.

Proposizione 3.4 *Sia $f \in L^2([-\pi, \pi])$ a valori reali, sia V un sottospazio di $L^2([-\pi, \pi])$ e siano f_1, f_2, \dots, f_n una base ortonormale di V . La migliore approssimazione nel senso dei minimi quadrati di f con un elemento di V è la combinazione lineare $a_1 f_1 + a_2 f_2 + \dots + a_n f_n$ di coefficienti $a_i = \langle f, f_i \rangle$, $i = 1, \dots, n$.*

Dimostrazione. Sia $g = a_1 f_1 + a_2 f_2 + \dots + a_n f_n$ un elemento di V , l'errore commesso approssimando f con g è dato da

$$\begin{aligned} E(a_1, a_2, \dots, a_n)^2 &= \|f - g\|^2 = \|f - (a_1 f_1 + a_2 f_2 + \dots + a_n f_n)\|^2 = \\ &= \|f\|^2 - 2 \sum_{i=1}^n a_i \langle f, f_i \rangle + \sum_{i=1}^n |a_i|^2 \end{aligned}$$

dove si è tenuto conto che le f_i sono ortonormali e dell'osservazione 3.2. Perché E sia minimo si devono annullare le sue derivate rispetto agli a_i :

$$\frac{\partial E^2}{\partial a_i} = -2 \langle f, f_i \rangle + 2a_i = 0 \quad \text{e quindi} \quad a_i = \langle f, f_i \rangle$$

□

Oltre che a partire dalle funzioni trigonometriche è possibile costruire un'altro sistema ortonormale in $L^2([-\pi, \pi])$ utilizzando le esponenziali complesse. Come conseguenza delle formule di Eulero vale l'uguaglianza

$$\begin{pmatrix} e^{inx} \\ e^{-inx} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(nx) \\ \sin(nx) \end{pmatrix}; \quad \text{inoltre} \quad \det \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix} = -2i \neq 0.$$

Questo significa che il sottospazio di $L^2([-\pi, \pi]; \mathbb{C})$ generato dalle funzioni e^{inx} e e^{-inx} coincide con quello generato da $\sin(nx)$ e $\cos(nx)$. Possiamo scrivere un nuovo sistema ortonormale sostituendo le coppie

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(nx), \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(nx) \quad \text{con le coppie} \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-inx}.$$

Riassumendo,

Proposizione 3.5 *La successione*

$$\left\{ \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}} \right\}_{n \in \mathbb{Z}} \tag{3.12}$$

costituisce un sistema ortonormale in $L^2([-\pi, \pi]; \mathbb{C})$.

Dimostrazione. È sufficiente verificare che $\langle e^{inx}, e^{imx} \rangle = 0$ e che $\langle e^{inx}, e^{-inx} \rangle = 2\pi$. La verifica è lasciata per esercizio. □

Le combinazioni lineari a coefficienti complessi delle funzioni (3.12) generano funzioni a valori complessi. Per limitarsi a funzioni a valori reali dovremo imporre delle restrizioni sui coefficienti della combinazioni lineari. Se $c_n, c_{-n} \in \mathbb{C}$,

$$c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx} = (c_n + c_{-n}) \cos(nx) + i(c_{-n} - c_n) \sin(nx)$$

Perché la combinazione lineare sia reale, la quantità

$$\text{Im}(c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx}) = \text{Im}(c_n + c_{-n}) \cos(nx) + \text{Re}(c_{-n} - c_n) \sin(nx)$$

si deve annullare per ogni $x \in [-\pi, \pi]$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$, quindi,

$$\begin{cases} \text{Im}(c_n + c_{-n}) = 0 \\ \text{Re}(c_n - c_{-n}) = 0 \end{cases} \quad \text{ovvero} \quad \begin{cases} \text{Im}(c_n) = -\text{Im}(c_{-n}) \\ \text{Re}(c_n) = \text{Re}(c_{-n}) \end{cases}.$$

In altre parole, la combinazione lineare è reale se e solo se $c_n = \bar{c}_{-n}$ per ogni $n > 0$.

3.4 Serie di Fourier in $L^2([-\pi, \pi])$

Una serie di Fourier è una espressione del tipo

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)), \quad a_n, b_n \in \mathbb{R} \quad (3.13)$$

o, equivalentemente, del tipo

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}, \quad \text{con } c_n \in \mathbb{C} \quad (3.14)$$

dove con il simbolo $\sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n$ si indica il $\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N f_n$.

Utilizzeremo indifferentemente la (3.13) o la (3.14) limitandoci per quest'ultima al caso in cui la somma sia reale, ovvero supporremo sempre che $c_n = \bar{c}_{-n}$. Il passaggio dalla forma (3.13) alla forma (3.14) avviene mediante le formule di Eulero:

$$a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) = \frac{1}{2}(a_n - ib_n)e^{inx} + \frac{1}{2}(a_n + ib_n)e^{-inx} \quad n > 0;$$

confrontando,

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, \quad c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n), \quad c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n).$$

Inversamente,

$$a_0 = 2c_0, \quad a_n = c_n + c_{-n} = 2 \operatorname{Re}(c_n), \quad b_n = i(c_n - c_{-n}) = -2 \operatorname{Im}(c_n)$$

D'ora in poi supporremo sempre f a valori reali.

DEFINIZIONE 3.9 Sia $f \in L^2([-\pi, \pi])$. Si dice **serie di Fourier associata ad f** la somma (3.14) dove

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx. \quad (3.15)$$

oppure, secondo la notazione trigonometrica, la somma (3.13) dove

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx. \quad (3.16)$$

OSSERVAZIONE 3.3 Nel paragrafo precedente sono stati introdotti due sistemi ortonormali per $L^2([-\pi, \pi])$. Il collegamento tra questi e le serie di Fourier è evidente: in notazione esponenziale, ad esempio, la serie di Fourier può essere scritta anche utilizzando le funzioni del sistema ortonormale:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}}, \quad \text{dove} \quad C_n = \sqrt{2\pi} c_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx = \left\langle f, \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}} \right\rangle.$$

Quindi i singoli addendi della serie di f non sono altro che le proiezioni ortogonali di f lungo gli elementi del sistema ortonormale e C_n non è altro che la componente di f lungo e^{inx} .

Considerazioni analoghe si possono fare riguardo al sistema ortonormale trigonometrico. Se scriviamo la serie (3.13) come

$$\frac{A_0}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}} + B_n \frac{\sin(nx)}{\sqrt{\pi}} \right)$$

i coefficienti sono di nuovo le componenti di f lungo gli elementi del sistema ortonormale:

$$\begin{aligned} A_0 &= \sqrt{2\pi} \frac{a_0}{2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \left\langle f(x), \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right\rangle \\ A_n &= \sqrt{\pi} a_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx = \left\langle f(x), \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(nx) \right\rangle \quad n > 0 \\ B_n &= \sqrt{\pi} b_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx = \left\langle f(x), \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(nx) \right\rangle \quad n > 0 \end{aligned}$$

OSSERVAZIONE 3.4 In base alla proposizione 3.4 possiamo interpretare le somme parziali delle serie di Fourier come soluzioni del problema di migliore approssimazione nel senso dei minimi quadrati di una funzione di $L^2([-\pi, \pi])$ con funzioni trigonometriche (o esponenziali) di frequenza $\leq N$. Ad esempio, fra tutte le funzioni del tipo $\sum_{n=-N}^N a_n e^{inx}$, la migliore approssimazione di f è quella che ha come coefficienti a_n i coefficienti di Fourier di f : se i c_n sono quelli definiti dalla (3.15),

$$\left\| f - \sum_{n=-N}^N c_n e^{inx} \right\|_{L^2([-\pi, \pi])} \leq \left\| f - \sum_{n=-N}^N a_n e^{inx} \right\|_{L^2([-\pi, \pi])} \quad \forall a_0, \dots, a_N \in \mathbb{C}, a_{-n} = \overline{a_n}.$$

Proposizione 3.6 Sia $f \in L^2([-\pi, \pi])$ e siano c_n i suoi coefficienti di Fourier. Indichiamo con S_N la somma parziale N -esima della serie di Fourier di f .

- i) la successione $\|S_N\|$ è non decrescente;
- ii) la successione $E_N = \|f - S_N\|$ degli errori è non crescente.

Dimostrazione. Per quanto riguarda la i) è sufficiente osservare che

$$\begin{aligned} \|S_N\|^2 &= \left\langle \sum_{n=-N}^N C_n \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}}, \sum_{n=-N}^N C_n \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}} \right\rangle = \sum_{n=-N}^N \sum_{m=-N}^N C_n \overline{C_m} \left\langle \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}}, \frac{e^{imx}}{\sqrt{2\pi}} \right\rangle = \\ &= \sum_{n=-N}^N C_n \overline{C_n} = \sum_{n=-N}^N |C_n|^2 = \sum_{n=-(N-1)}^{N-1} |C_n|^2 + 2|C_N|^2 \geq \|S_{N-1}\|^2. \end{aligned}$$

La ii) è invece una conseguenza quasi immediata dell'osservazione 3.4:

$$\begin{aligned} \|f - S_N\|^2 &= \|f - S_{N-1} - \overline{c_N} e^{-inx} - c_N e^{inx}\|^2 \leq \\ &\leq \|f - S_{N-1} - \overline{a_N} e^{-inx} - a_N e^{inx}\|^2 \quad \text{per ogni } a_n \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

In particolare, possiamo scegliere $a_n = 0$ e quindi $\|f - S_N\|^2 \leq \|f - S_{N-1}\|^2$. \square

Proposizione 3.7 Se S_N è la somma parziale N -esima della serie di Fourier di f allora

- i) $f - S_N$ è ortogonale a S_N ;
- ii) $\|f\|^2 = \|S_N\|^2 + \|f - S_N\|^2$.

Dimostrazione. Iniziamo con la prima affermazione:

$$\begin{aligned} \langle f - S_N, S_N \rangle &= \langle f, S_N \rangle - \|S_N\|^2 = \sum_{n=-N}^N \left\langle f, C_n \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}} \right\rangle - \|S_N\|^2 = \\ &= \sum_{n=-N}^N \overline{C_n} \left\langle f, \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}} \right\rangle - \|S_N\|^2 = \sum_{n=-N}^N \overline{C_n} C_n - \|S_N\|^2 = \\ &= \sum_{n=-N}^N |C_n|^2 - \|S_N\|^2 = \|S_N\|^2 - \|S_N\|^2 = 0 \end{aligned}$$

Il prodotto scalare è nullo e quindi $f - S_N$ ed S_N sono ortogonali.

Per la seconda affermazione basta osservare che

$$\|f\|^2 = \|S_N + (f - S_N)\|^2 = \|S_N\|^2 + \langle S_N, f - S_N \rangle + \langle f - S_N, S_N \rangle + \|f - S_N\|^2.$$

Per la i) i prodotti scalari si annullano e quindi vale la ii). □

OSSERVAZIONE 3.5 Per la proposizione 3.7,

$$\left\| \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \right\|^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \|S_N\|^2 = \|f\|^2 - \lim_{N \rightarrow \infty} \|f - S_N\|^2.$$

Questo ha due conseguenze importanti:

- i) $\|S_N\| \leq \|f\|$ per ogni $N \geq 0$;
- ii) $\lim_{N \rightarrow \infty} \|f - S_N\| = 0$ se e solo se $\lim_{N \rightarrow \infty} \|S_N\| = \|f\|$.

Dalla i), insieme alla prima affermazione della proposizione 3.6, segue che la serie di Fourier di f converge a una funzione g di $L^2([-\pi, \pi])$ sulla quale per il momento non abbiamo nessuna informazione. Abbiamo visto in precedenza che l'errore commesso approssimando f con la somma parziale N -esima della serie di Fourier non aumenta all'aumentare di N . Ci potremo chiedere se $\lim_{N \rightarrow \infty} \|f - S_N\| = 0$ ovvero se la somma della serie di Fourier di f converge o meno, nel senso di $L^2([-\pi, \pi])$, alla funzione f stessa.

Teorema 3.2 (di Riesz-Fisher) Sia $\{e_n\}$ un sistema ortonormale in uno spazio di Hilbert V e sia $\{C_n\}$ una successione tale che $\sum_{n=0}^{\infty} |C_n|^2 < \infty$. Esiste un elemento $f \in V$ tale che $C_n = \langle f, e_n \rangle$ per ogni n ed inoltre

$$\|f\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |C_n|^2. \quad (3.17)$$

Dimostrazione. Sia $S_N = \sum_{n=0}^N C_n e_n$. Per l'ortonormalità della base e_n ,

$$\|S_{N+p} - S_N\|^2 = \left\| \sum_{n=N+1}^{N+p} C_n e_n \right\|^2 = \sum_{n=N+1}^{N+p} |C_n|^2.$$

$\sum_{n=0}^{\infty} |C_n|^2 < \|f\|^2$, quindi la serie è convergente. Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un N_ε tale che per ogni $N > N_\varepsilon$, per ogni $p > 0$, $\sum_{n=N+1}^{N+p} |C_n|^2 < \varepsilon$. Segue che la successione $\{S_N\}$ è di Cauchy e, per la completezza dello spazio di Hilbert V , converge ad un elemento $f \in V$, ovvero $\lim_{N \rightarrow \infty} \|f - S_N\| = 0$.

In base alla ii) dell'osservazione 3.5 questo significa che $\lim_{N \rightarrow \infty} \|S_N\| = \|f\|$, ovvero la (3.17). Resta da far vedere che $\langle f, e_n \rangle = C_n$ per ogni n . Fissato un valore di n ,

$$\langle f, e_n \rangle = \langle S_m, e_n \rangle + \langle f - S_m, e_n \rangle \quad \text{per ogni } m \in \mathbb{N}.$$

Se $m > n$,

$$\langle S_m, e_n \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^m C_k e_k, e_n \right\rangle = C_n;$$

d'altra parte $|\langle f - S_m, e_n \rangle| \leq \|f - S_m\| \cdot \|e_n\| = \|f - S_m\| \rightarrow 0$ per quanto dimostrato in precedenza. Passando al limite per $m \rightarrow \infty$ abbiamo $\langle f, e_n \rangle = C_n$. \square

Corollario 3.1 *Se $f \in L^2([-\pi, \pi])$ la serie di Fourier di f converge ad f nel senso di $L^2([-\pi, \pi])$.*

Dimostrazione. È sufficiente applicare il teorema 3.2 con $V = L^2([-\pi, \pi])$ e scegliere come sistema ortonormale il sistema trigonometrico o quello esponenziale. \square

OSSERVAZIONE 3.6 Fino ad ora abbiamo sempre parlato di sistemi ortonormali senza mai usare la parola *base*. In effetti non avevamo nessun diritto di farlo. Perché un sistema ortonormale $\{e_n\}$ sia una base ortonormale di V è necessario far vedere che se $f \in V$ è tale che $\langle f, e_n \rangle = 0$ per ogni n allora $\|f\| = 0$. Finalmente, in base al teorema 3.2 possiamo affermare che sia il sistema ortonormale trigonometrico che quello esponenziale sono una *base* per lo spazio vettoriale $L^2([-\pi, \pi])$. Più propriamente, diciamo che i sistemi ortonormali trigonometrico ed esponenziale sono **completi** per $L^2([-\pi, \pi])$.

OSSERVAZIONE 3.7 Scrivendo per esteso l'espressione di $\|S_N\|^2$ data dalla *i)* dell'osservazione 3.7 e passando al limite per $n \rightarrow \infty$, a seconda che si utilizzi la notazione reale o complessa, si ottengono le disuguaglianze

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \|f\|^2 \quad \text{oppure} \quad \left| \frac{a_0}{2} \right|^2 + \sum_{n=0}^{\infty} (|a_n|^2 + |b_n|^2) \leq \frac{1}{\pi} \|f\|^2 \quad (3.18)$$

che sono note come **disuguaglianza di Bessel**. Se però il sistema ortonormale è completo (ed è il caso dei due utilizzati per le serie di Fourier), vale anche la (3.17) che, riscritta in termini dei coefficienti a_n, b_n, c_n definiti dalla (3.15) e dalla (3.16) assume la forma

$$\|f\|^2 = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = \pi \left(\left| \frac{a_0}{2} \right|^2 + \sum_{n=0}^{\infty} (|a_n|^2 + |b_n|^2) \right). \quad (3.19)$$

Osserviamo infine che perché abbia senso considerare i coefficienti a_n, b_n, c_n è sufficiente che siano convergenti gli integrali che li definiscono, ovvero che la funzione f sia integrabile in $[-\pi, \pi]$. Questo è un requisito più leggero dell'appartenenza ad $L^2([-\pi, \pi])$.

3.5 Teoremi di convergenza delle serie di Fourier

Per poter parlare di serie di Fourier associata ad una funzione f definita in $[-\pi, \pi]$ è sufficiente che esistano gli integrali che definiscono i coefficienti ovvero che $|f|$ sia integrabile.

I coefficienti di Fourier di f sono definiti tramite degli integrali. Se modifichiamo il valore della funzione f in un numero finito di punti i coefficienti di Fourier non cambiano. Fissato un $x_0 \in [-\pi, \pi]$, il valore della somma della serie in x_0 non dipende quindi solo dal valore di $f(x_0)$ ma dal valore della f in tutto l'intervallo $[-\pi, \pi]$.

Di conseguenza ha senso interrogarsi ad esempio sul comportamento puntuale della serie di Fourier di f in relazione a quello di f stessa.

Teorema 3.3 *Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione continua e regolare a tratti in $[-\pi, \pi]$. Allora la serie di Fourier di f converge puntualmente ad f per ogni $x \in (-\pi, \pi)$.*

Dimostrazione. Sia $S_N = \sum_{n=-N}^N c_n e^{inx}$. Introduciamo la funzione $D_N(x)$ detta **nucleo di Dirichlet** definita da

$$D_N(x) = \sum_{n=-N}^N e^{inx} = \frac{e^{(N+1)ix} - e^{-iNx}}{e^{ix} - 1} = \frac{\sin \left[\left(N + \frac{1}{2} \right) x \right]}{\sin \left(\frac{1}{2} x \right)}. \quad (3.20)$$

D_N sarà utile per calcolare le somme parziali delle serie di Fourier.

$$\begin{aligned} S_N(x) &= \sum_{n=-N}^N c_n e^{inx} = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-N}^N e^{inx} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-int} f(t) dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=-N}^N e^{in(x-t)} f(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_N(x-t) f(t) dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_N(-y) f(x+y) dy = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_N(y) f(x+y) dy \end{aligned}$$

Dalla (3.20) si vede facilmente che $\int_{-\pi}^{\pi} D_N(y) dy = 2\pi$. Segue

$$\begin{aligned} S_N(x) - f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+y) D_N(y) dy - \frac{1}{2\pi} f(x) \int_{-\pi}^{\pi} D_N(y) dy = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x+y) - f(x)] D_N(y) dy = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x+y) - f(x)}{e^{iy} - 1} (e^{(N+1)iy} - e^{-iNy}) dy. \end{aligned}$$

Fissato un valore di x , poniamo $g(y) = \frac{f(x+y) - f(x)}{e^{iy} - 1}$. Essendo f regolare a tratti, si verifica che $g \in L^2([-\pi, \pi])$ e quindi che la serie di Fourier di g converge a g nel senso di $L^2([-\pi, \pi])$. Se indichiamo con d_n i coefficienti della serie di g ,

$$S_N(x) - f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(y) e^{(N+1)iy} dy - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(y) e^{-Ny} dy = d_{-(N+1)} - d_N.$$

Per la (3.19) $\sum_{N=-\infty}^{N=\infty} |d_n|^2 = \frac{\|f\|^2}{2\pi} < +\infty$ quindi $\lim_{|n| \rightarrow \infty} |d_n| = 0$. Segue che

$$\lim_{N \rightarrow \infty} |S_N(x) - f(x)| = 0 \quad \text{per ogni } x \in [-\pi, \pi]$$

ovvero che la serie di Fourier di f converge puntualmente ad f . \square

Enunciamo senza dimostrazione altri due importanti teoremi sulla convergenza delle serie di Fourier:

Teorema 3.4 *Se f è una funzione continua e regolare a tratti in $[-\pi, \pi]$ ed $f(-\pi) = f(\pi)$, la serie di Fourier di f converge uniformemente ad f .*

Teorema 3.5 *Se $f \in L^1([-\pi, \pi])$, la serie di Fourier di f converge puntualmente alla funzione*

$$g(x) = \frac{1}{2}(f(x+0) + f(x-0))$$

dove

$$f(x+0) = \lim_{y \rightarrow x^+} f(y) \quad e \quad f(x-0) = \lim_{y \rightarrow x^-} f(y).$$

3.6 Altre proprietà delle serie di Fourier

PROPRIETÀ 1. L'operatore che ad una funzione f associa la successione dei suoi coefficienti di Fourier è lineare.

In altre parole, se $f, g \in L^1([-\pi, \pi])$, poiché L^1 è uno spazio vettoriale, anche $h = \alpha f + \beta g \in L^1([-\pi, \pi])$ per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Se a_n, b_n, c_n sono i coefficienti di Fourier di f, g, h rispettivamente, per la linearità dell'integrale $c_n = \alpha a_n + \beta b_n$.

PROPRIETÀ 2. Significato del coefficiente di indice zero.

In notazione complessa, dalla definizione $c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt$. Quindi c_0 è il valor medio della funzione f in $[-\pi, \pi]$. Considerazioni analoghe si possono fare per il coefficiente a_0 della forma trigonometrica delle serie di Fourier ricordando che $a_0 = 2c_0$.

PROPRIETÀ 3. Integrabilità termine a termine delle serie di Fourier.

Sia $f \in L^2([-\pi, \pi])$ e sia $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$ la serie di Fourier di $f(x)$. Per ogni $x, x_0 \in [-\pi, \pi]$ si ha

$$\int_{x_0}^x f(t) dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \int_{x_0}^x e^{int} dt.$$

Inoltre, per ogni x_0 fissato, la serie converge uniformemente al variare di $x \in [-\pi, \pi]$. Si noti che per poter integrare per serie *non* si richiede la convergenza uniforme della serie di Fourier di f .

PROPRIETÀ 4. Serie di Fourier della primitiva e della derivata di f .

Possiamo utilizzare la proprietà 3 per calcolare i coefficienti di Fourier della funzione $F(x) = \int_{-\pi}^x f(t) dt$, primitiva della f . Se indichiamo con c_k i coefficienti di Fourier di f e con D_k quelli di F ,

$$D_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikt} F(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikt} \left\{ \int_{-\pi}^t f(s) ds \right\} dt.$$

Se $k \neq 0$, integrando per parti,

$$\begin{aligned} D_k &= \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^x f(s) ds \cdot \int_{-\pi}^x e^{-ikt} dt \right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{e^{-ikt}}{-ik} dt = \\ &= -(-ik)^{-1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{ikt} dt = \frac{1}{ik} c_k. \end{aligned}$$

Quindi,

$$D_k = \begin{cases} \frac{1}{ik} c_k & \text{se } k \neq 0 \\ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(t) dt & \text{se } k = 0 \end{cases}$$

Supponiamo ora che la funzione f sia derivabile in $(-\pi, \pi)$. Procedendo in maniera analoga si possono calcolare i coefficienti d_k della serie di Fourier di $g(x) = f'(x)$:

$$d_k = \begin{cases} (ik)c_k + \frac{(-1)^k}{2\pi} (f(\pi) - f(-\pi)) & \text{se } k \neq 0 \\ \frac{1}{2\pi} (f(\pi) - f(-\pi)) & \text{se } k = 0 \end{cases}$$

L'espressione per $i d_k$ assume una forma più semplice nel caso in cui $f(-\pi) = f(\pi)$. Si noti che quest'ultima ipotesi è sempre soddisfatta nel caso in cui f sia periodica:

$$d_k = \begin{cases} (ik)c_k & \text{se } k \neq 0 \\ 0 & \text{se } k = 0 \end{cases}$$

OSSERVAZIONE 3.8 Non c'è nessun motivo a priori per cui la serie di Fourier di f' debba essere convergente. La convergenza andrà dimostrata di volta in volta ad esempio mediante la disuguaglianza di Bessel.

3.7 Serie di Fourier in $L^2([-\ell, \ell])$ e serie speciali

Serie di Fourier in intervalli di ampiezza diversa da 2π

La teoria delle serie di Fourier può essere sviluppata anche per funzioni definite in intervalli diversi da $[-\pi, \pi]$. I risultati per funzioni definite in $[-\ell, \ell]$ si ottengono da quelli dei paragrafi precedenti mediante il cambio di variabile $y = \frac{\ell}{\pi} x$.

Ad esempio, se $f(y) \in L^2([-\ell, \ell])$, la serie di Fourier di f si scrive

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\frac{\pi}{\ell}y} \quad \text{dove} \quad c_n = \frac{1}{2\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(t) e^{-in\frac{\pi}{\ell}t} dt.$$

Analogamente, se si usa la notazione trigonometrica, la serie ha la forma

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{\ell}y\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{\ell}y\right)$$

dove

$$a_n = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(t) \cos\left(\frac{n\pi}{\ell}t\right) dt, \quad b_n = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(t) \sin\left(\frac{n\pi}{\ell}t\right) dt. \quad (3.21)$$

Sviluppi in serie di soli seni o soli coseni

A volte, nelle applicazioni, fa comodo poter utilizzare sviluppi in serie di Fourier in cui compaiano soltanto funzioni trigonometriche di un tipo (cioè sviluppi in cui $a_n = 0$ per ogni n , oppure $b_n = 0$ per ogni n).

Normalmente questo è possibile soltanto se la funzione f che si sta sviluppando gode di proprietà di simmetria dispari o pari rispettivamente. Mediante alcuni accorgimenti è possibile ottenere uno sviluppo in serie di soli seni o di soli coseni a partire da una qualsiasi funzione L^2 . Per fissare le idee supponiamo di lavorare con funzioni $L^2([0, \ell])$.

Serie di soli seni

Data una qualunque funzione $f \in L^2([0, \ell])$, definiamo

$$f_D(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } x \geq 0 \\ -f(-x), & \text{se } x < 0 \end{cases}.$$

La funzione f_D è in $L^2([- \ell, \ell])$ e quindi è sviluppabile in serie di Fourier in $[- \ell, \ell]$. Inoltre f_D è dispari quindi nella sua serie di Fourier non compariranno i termini contenenti i coseni:

$$f_D(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right), \quad x \in [- \ell, \ell].$$

dove i coefficienti b_n sono dati dalla (3.21) scritta per f_D oppure, tenendo conto della simmetria dispari di f_D , da

$$b_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) dx.$$

Serie di soli coseni

Procedendo in maniera analoga, a partire da $f \in L^2([0, \ell])$, definiamo

$$f_P(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } x \geq 0 \\ f(-x), & \text{se } x < 0 \end{cases}.$$

La funzione f_P è in $L^2([- \ell, \ell])$ e quindi è sviluppabile in serie di Fourier in $[- \ell, \ell]$. Inoltre f_P è pari quindi nella sua serie di Fourier non compariranno i termini contenenti i seni:

$$f_P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right), \quad x \in [- \ell, \ell].$$

dove i coefficienti a_n sono dati dalla (3.21) scritta per f_P oppure, tenendo conto della simmetria pari di f_P , da

$$a_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \cos\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) dx.$$

3.8 L'equazione delle onde

L'equazione delle onde, o equazione di D'Alembert ¹ nasce dal problema dello studio delle vibrazioni di una corda.

Consideriamo un tratto di corda adagiato lungo l'asse delle x . Data una particella di filo, indicheremo con $u(x, t)$ la sua distanza dalla posizione di riposo all'istante t . Se supponiamo che il filo sia perfettamente flessibile, ovvero che la tensione sia tangente alla corda, l'equazione che descrive il fenomeno è:

$$v^2(x, t)u_{xx}(x, t) - u_{tt}(x, t) = F(x, t). \quad (3.22)$$

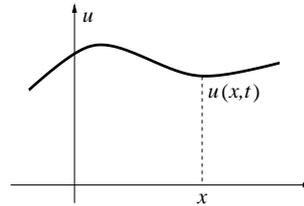


Figura 3.1

L'equazione (3.22) altro non è che “ $F = ma$ ” scritta per la porzione infinitesima di corda posta in x in cui si sia tenuto conto delle ipotesi fisiche sulla corda. La funzione $v(x, t)$ fisicamente ha le dimensioni di una velocità; il termine $F(x, t)$ corrisponde alla presenza di forze esterne ed ha le dimensioni di una accelerazione.

Ci occuperemo del caso in cui v è costante e siamo in assenza di forze esterne; in altre parole studieremo l'equazione $v^2 u_{xx} - u_{tt} = 0$.

3.8.1 Corda vibrante di lunghezza finita con estremi bloccati

Esaminiamo il caso di una corda di lunghezza L . In questo caso la funzione $u(x, t)$ è definita nel rettangolo $D = [0, L] \times \mathbb{R}^+$ (cfr. figura 3.2). Per costruire un problema di Cauchy, oltre ai dati al contorno (“estremi bloccati” nel caso che stiamo esaminando) abbiamo bisogno di imporre delle condizioni iniziali. Complessivamente imporreemo che:

i) posizione iniziale della corda:

$$u(x, 0) = f(x), \quad x \in [0, L];$$

ii) velocità iniziale della corda:

$$u_t(x, 0) = g(x), \quad x \in [0, L];$$

iii) estremi bloccati sull'asse x :

$$\begin{cases} u(0, t) = 0 \\ u(L, t) = 0 \end{cases} \quad t > 0.$$

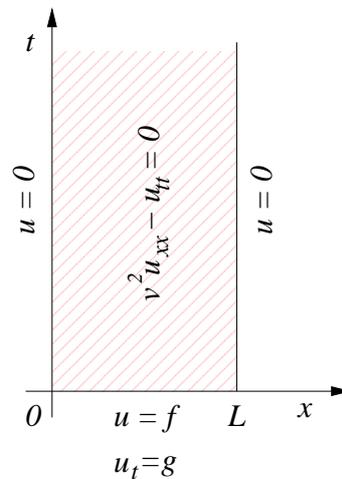


Figura 3.2

Le condizioni i), ii) e iii) insieme all'equazione differenziale formano il problema di Cauchy per l'equazione di d'Alembert.

Proviamo a cercare soluzioni $u(x, t)$ del tipo *a variabili separate*, ovvero della forma $u(x, t) = p(x)q(t)$. Derivando,

$$u_{xx}(x, t) = p''(x)q(t) \quad \text{e} \quad u_{tt}(x, t) = p(x)q''(t);$$

¹Jean Le Rond d'Alembert, Parigi, 1717-1783

l'equazione delle onde diventa quindi $v^2 p'' q - p q'' = 0$, ovvero

$$\frac{p''}{p} = \frac{1}{v^2} \frac{q''}{q}. \quad (3.23)$$

Si osservi che il primo membro della (3.23) dipende dalla sola x mentre il secondo dipende dalla sola t . Di conseguenza entrambi i membri sono costanti (nessuno dei due può dipendere né da x né da t). Quindi,

$$\frac{p''}{p} = \lambda = \frac{1}{v^2} \frac{q''}{q}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Considerando separatamente le due uguaglianze, le funzioni p e q soddisfano le equazioni

$$p'' - \lambda p = 0 \quad \text{e} \quad q'' - \lambda v^2 q = 0.$$

le cui rispettive soluzioni generali sono

$$p(x) = c_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}x} \quad \text{e} \quad q(t) = d_1 e^{\sqrt{\lambda}vt} + d_2 e^{-\sqrt{\lambda}vt}. \quad (3.24)$$

Cominciamo con l'imporre le condizioni al bordo *iii*):

$$\begin{cases} u(0, t) = p(0)q(t) = q(t)(c_1 + c_2) = 0 \\ u(L, t) = p(L)q(t) = q(t)(c_1 e^{\sqrt{\lambda}L} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}L}) = 0 \end{cases} \quad \text{per ogni } t \geq 0.$$

di conseguenza,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ e^{\sqrt{\lambda}L} & e^{-\sqrt{\lambda}L} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Perché il sistema abbia una soluzione (c_1, c_2) non identicamente nulla si deve annullare il determinante della matrice, cioè $e^{\sqrt{\lambda}L} - e^{-\sqrt{\lambda}L} = 0$, da cui $e^{2\sqrt{\lambda}L} = 1$ e $\sqrt{\lambda}L = \pi ni$.

I valori di λ per cui si hanno soluzioni non nulle sono

$$\lambda = -\frac{\pi^2 n^2}{L^2}, \quad n \in \mathbb{N};$$

inoltre, $c_2 = -c_1$. In corrispondenza di ogni $n \in \mathbb{N}$ troviamo una soluzione

$$p_n(x) = c_1 e^{i\frac{\pi n}{L}x} - c_1 e^{-i\frac{\pi n}{L}x} = c_1 \sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right).$$

Introducendo il valore di λ nell'equazione per q ,

$$q'' + \frac{\pi^2 n^2}{L^2} v^2 q = 0.$$

Anche in questo caso abbiamo una soluzione per ogni valore di n :

$$q_n(t) = d_n \cos\left(\frac{\pi n v}{L}t\right) + e_n \sin\left(\frac{\pi n v}{L}t\right), \quad n \in \mathbb{N}$$

Mettendo insieme i risultati fin qui ottenuti, chiamiamo **soluzione fondamentale** dell'equazione delle onde la funzione

$$u_n(x, t) = \sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right) \left[a_n \cos\left(\frac{\pi n v}{L}t\right) + b_n \sin\left(\frac{\pi n v}{L}t\right) \right], \quad n \in \mathbb{N}$$

dove a_n e b_n sono costanti (per il momento) arbitrarie. L'equazione che stiamo studiando è lineare quindi sono soluzioni anche le combinazioni lineari delle u_n e quindi è soluzione anche

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right) \left[a_n \cos\left(\frac{\pi n v}{L}t\right) + b_n \sin\left(\frac{\pi n v}{L}t\right) \right].$$

Su questa imponiamo le condizioni iniziali.

$$u(x, 0) = f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right) \quad (3.25)$$

$$u_x(x, 0) = g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{\pi n v}{L} \sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right) \quad (3.26)$$

Se le funzioni $f(x)$ e $g(x)$ sono $L^2([0, L])$ allora sono sviluppabili in serie di Fourier; possiamo determinare i coefficienti a_n e b_n confrontando le equazioni (3.25) e (3.26) con gli sviluppi in serie di soli seni nell'intervallo $[0, L]$ delle funzioni $f(x)$ e $g(x)$ rispettivamente.

Uno sviluppo in serie di soli seni si ottiene sviluppando in serie di Fourier nell'intervallo $[-L, L]$ il prolungamento dispari della funzione. Nel nostro caso,

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx, \quad b_n \frac{\pi n v}{L} = \frac{2}{L} \int_0^L g(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx.$$

3.9 L'equazione del calore

Consideriamo un mezzo conduttore di calore in cui la quantità di calore è trasportata con densità di calore \mathbf{q} (corrente termica). sia g la quantità di calore; scriviamo l'equazione di bilancio per il calore in assenza di sorgenti:

$$\frac{\partial g}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{q} = 0.$$

In base a risultati sperimentali sappiamo che $\mathbf{q} = -\alpha \operatorname{grad} u$, dove u è la temperatura e $\alpha > 0$ è la conduttività termica del materiale. Scriviamo l'equazione in termini di temperatura:

$$\frac{\partial g}{\partial t} = c \frac{\partial u}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \mathbf{q} = -\alpha \operatorname{div}(\operatorname{grad} u).$$

L'equazione che rappresenta il fenomeno è

$$\Delta u - k \frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

e prende il nome di *equazione del calore*.

3.9.1 Equazione del calore per una sbarretta omogenea

Consideriamo una sbarretta di lunghezza L composta di materiale omogeneo e di sezione trascurabile tanto da poterla considerare come unidimensionale. Poiché è composta di materiale omogeneo la conducibilità termica è costante. Studieremo un'equazione del tipo

$$u_{xx} - k u_t = 0 \quad \text{in} \quad D = [0, L] \times \mathbb{R}^+.$$

Il problema di Cauchy per l'equazione del calore è del tipo

$$\begin{cases} u_{xx} - ku_t = 0, & (x, t) \in [0, L] \times [0, \infty) \\ u(x, 0) = f(x), & x \in [0, L] \\ u(0, t) = 0, & t \geq 0 \\ u(L, t) = 0, & t \geq 0 \end{cases} \quad (3.27)$$

Come nel caso dell'equazione delle onde cerchiamo soluzioni del tipo *a variabili separate*:

$$u(x, t) = p(x)q(t).$$

Sempre procedendo in maniera analoga a quanto fatto nel paragrafo 3.8,

$$\begin{cases} u_t = pq' \\ u_{xx} = p''q \end{cases} \Rightarrow p''q - kpq = 0, \quad \text{cioè} \quad \frac{p''}{p} = k \frac{q'}{q}.$$

Anche in questo caso il primo membro dell'ultima equazione dipende solo da x mentre il secondo dipende soltanto da t e quindi,

$$p'' - \lambda p = 0, \quad \text{e} \quad q' - \frac{\lambda}{k}q = 0, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Le soluzioni generali delle equazioni per p e q sono

$$p(x) = c_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}x} \quad \text{e} \quad q(x) = d_1 e^{\frac{\lambda}{k}t}$$

rispettivamente, e su queste imponiamo le condizioni agli estremi:

$$\begin{cases} u(0, t) = p(0)q(t) = q(t)(c_1 + c_2) = 0 \\ u(L, t) = p(L)q(t) = q(t)(c_1 e^{\sqrt{\lambda}L} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}L}) = 0 \end{cases} \quad \text{per ogni } t \geq 0.$$

I valori di λ per cui esistono soluzioni non banali del sistema sono quelli tali che

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ e^{\sqrt{\lambda}L} & e^{-\sqrt{\lambda}L} \end{bmatrix} = 0, \quad \text{cioè} \quad \lambda = -\frac{\pi^2 n^2}{L^2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Inoltre $c_2 = -c_1$ e quindi

$$p(x) = c_1 (e^{i\frac{n\pi}{L}x} + c_2 e^{-i\frac{n\pi}{L}x}) = 2ic_1 \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right).$$

Come nel caso dell'equazione delle onde, ad ogni valore di n corrisponde una **soluzione fondamentale** dell'equazione del calore del tipo

$$u_n(x, t) = e^{-\frac{n^2 \pi^2}{L^2} kt} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right).$$

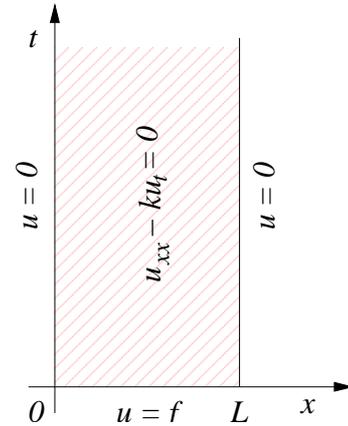


Figura 3.3

Generalizzando, sono ancora soluzioni dell'equazione (3.27) le combinazioni lineari delle u_n ed anche la serie

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-\frac{n^2 \pi^2}{L^2} kt} \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right).$$

Non abbiamo ancora imposto che sia soddisfatto il dato iniziale

$$u(x, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) = f(x).$$

Se la funzione f è in $L^2([0, L])$ gli a_n altro non sono che i coefficienti di Fourier di f sviluppata in serie di soli seni nell'intervallo $[0, L]$:

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx.$$

La trasformata di Fourier

4.1 La trasformata di Fourier come limite della serie di Fourier

Sia $f \in L^1(\mathbb{R})$. Sviluppiamo f in serie di Fourier nell'intervallo $(-\pi\ell, \pi\ell)$. Non possiamo dire nulla sulla convergenza della serie di Fourier così ottenuta (ad esempio, per la convergenza puntuale andrebbe richiesta la continuità della f) ma possiamo comunque definire i coefficienti di Fourier

$$c_n^{(\ell)} = \frac{1}{2\pi\ell} \int_{-\pi\ell}^{\pi\ell} f(\xi) e^{-in\frac{\xi}{\ell}} d\xi$$

Se poi indichiamo con $f_\ell(x)$ la somma della serie di Fourier di f si ha

$$f_\ell(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n^{(\ell)} e^{in\frac{x}{\ell}}. \quad (4.1)$$

A meno che la funzione f non sia periodica, niente è garantito sulla convergenza della serie ad f al di fuori dell'intervallo $(-\pi\ell, \pi\ell)$. Se abbiamo intenzione di utilizzare le serie di Fourier per rappresentare l'andamento della f su tutto \mathbb{R} , più grande scegliamo ℓ più grande sarà l'intervallo in cui la serie di Fourier segue l'andamento della funzione di partenza.

DEFINIZIONE 4.1 Si dice **supporto** di una funzione la chiusura dell'insieme in cui la funzione è non nulla. Il supporto di f solitamente si indica con $\text{sprt}(f)$.

Supponiamo per il momento che f sia a **supporto compatto** ovvero supponiamo che esista un valore $A > 0$ tale che $f(x) = 0$ per ogni x tale che $|x| > A$. Scegliamo ℓ abbastanza grande in modo che $\text{sprt}(f) \subset (-\pi\ell, \pi\ell)$. Poniamo

$$F(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ix\xi} dx.$$

Allora,

$$c_n^{(\ell)} = \frac{1}{2\pi\ell} \int_{-\pi\ell}^{\pi\ell} f(\xi) e^{-in\frac{\xi}{\ell}} d\xi = \frac{1}{2\pi\ell} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{-in\frac{\xi}{\ell}} d\xi = \frac{1}{\ell} F\left(\frac{n}{\ell}\right).$$

La serie di Fourier (4.1) può essere scritta come

$$f_\ell(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\ell} F\left(\frac{n}{\ell}\right) e^{i\frac{n}{\ell}x} \quad (4.2)$$

Quest'ultima può essere interpretata come *somma di Riemann* (approssimazione di un integrale come somma dell'area di rettangoli) dell'integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(\xi) e^{ix\xi} d\xi. \quad (4.3)$$

In altre parole la (4.3) è il limite per $\ell \rightarrow \infty$ della (4.2).

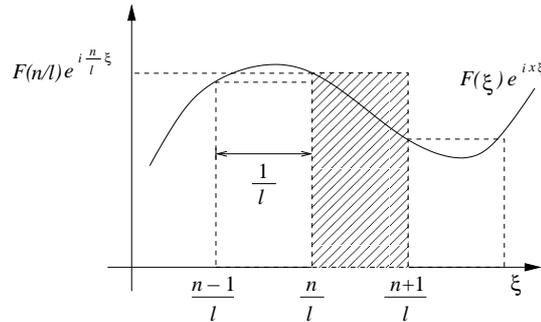


Figura 4.1 L'area del rettangolo ombreggiato è $\frac{1}{\ell} F\left(\frac{n}{\ell}\right) e^{i\frac{n}{\ell}x}$. Se $\xi = n/\ell$ e $d\xi = 1/\ell$, la (4.2) è la somma di Riemann dell'integrale (4.3).

In base a queste considerazioni possiamo ricavare una maniera per rappresentare tutte le funzioni integrabili su \mathbb{R} (anche se non periodiche) in maniera simile a quella, le serie di Fourier, utilizzata nel capitolo precedente per le funzioni periodiche.

DEFINIZIONE 4.2 Sia $f \in L^1(\mathbb{R})$, chiamiamo **trasformata di Fourier** di f la funzione

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ix\xi} dx.$$

Indichiamo inoltre con \mathcal{F} l'**operatore di trasformazione** che ad una funzione $f \in L^1(\mathbb{R})$ associa la sua trasformata di Fourier; in altre parole, $\mathcal{F}(f(x))(\xi) = \widehat{f}(\xi)$. Utilizzeremo anche la notazione $\mathcal{F}(f(x))(\xi) = (f)\widehat{(\xi)}$.

L'operatore \mathcal{F} è definito per tutte le funzioni $f \in L^1(\mathbb{R})$. Per quanto riguarda l'immagine di \mathcal{F} osserviamo che

$$\widehat{f}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \quad \text{e quindi} \quad |\widehat{f}(0)| \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R})}.$$

Inoltre, $|e^{-ix\xi} f(x)| = |f(x)|$ per ogni ξ , da cui

$$|\widehat{f}(\xi)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |e^{-ix\xi} f(x)| dx = \|f\|_{L^1(\mathbb{R})} \quad \forall \xi \in \mathbb{R}.$$

Quindi $\widehat{f}(\xi)$ è una funzione limitata. Inoltre, la trasformata di Fourier di una funzione integrabile gode di alcune proprietà di regolarità. Ad esempio, se $f(x)$ è regolare e a supporto compatto, si può verificare che $\widehat{f}(\xi)$ e la sua derivata $\widehat{f}'(\xi)$ sono continue ed integrabili.

4.2 Proprietà della trasformata di Fourier

Proposizione 4.1 (Linearità dell'operatore di trasformazione) *L'operatore di trasformazione è lineare: se $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, se $a, b \in \mathbb{R}$ si ha $\mathcal{F}(af + bg) = a\mathcal{F}(f) + b\mathcal{F}(g)$; in altri simboli, $(af + bg)\widehat{=} a\widehat{f} + b\widehat{g}$.*

Dimostrazione È una diretta conseguenza della linearità dell'integrale. \square

Proposizione 4.2 (Riscaldamento) *Sia $f \in L^1(\mathbb{R})$ e sia $c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$. Allora*

$$\mathcal{F}(f(cx))(\xi) = (f(cx))\widehat{=}(\xi) = \frac{1}{|c|} \widehat{f}(\xi/c). \quad (4.4)$$

Dimostrazione Sia $c > 0$. Poniamo $y = cx$ e cambiamo variabile nell'integrale che definisce la trasformata di f :

$$(f(cx))\widehat{=}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(cx) e^{-ix\xi} dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-iy\frac{\xi}{c}} \frac{1}{c} dy = \frac{1}{c} \widehat{f}(\xi/c).$$

Se $c < 0$, procedendo in modo analogo,

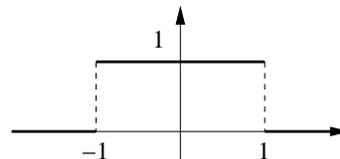
$$\begin{aligned} (f(cx))\widehat{=}(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(cx) e^{-ix\xi} dx = \int_{-\infty}^{-\infty} f(y) e^{-iy\frac{\xi}{c}} \frac{1}{c} dy = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-iy\frac{\xi}{c}} \frac{1}{-c} dy = \frac{1}{-c} \widehat{f}(\xi/c). \end{aligned}$$

In entrambi i casi il risultato ottenuto è quello della (4.4). \square

OSSERVAZIONE 4.1 L'integrabilità di f non garantisce l'integrabilità di \widehat{f} .

Infatti, se

$$f(x) = \chi_{[-1,1]}(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } |x| > 1 \\ 1 & \text{se } |x| \leq 1 \end{cases},$$



per $\xi \neq 0$, si ha:

Figura 4.2 La funzione $\chi_{[-1,1]}(x)$.

$$\begin{aligned} \widehat{f}(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{[-1,1]}(x) e^{-ix\xi} dx = \int_{-1}^1 e^{-ix\xi} dx = \\ &= -\frac{1}{i\xi} e^{-ix\xi} \Big|_{x=-1}^{x=1} = \frac{2}{\xi} \frac{e^{i\xi} - e^{-i\xi}}{2i} = \frac{2}{\xi} \sin(\xi). \end{aligned}$$

Si verifica immediatamente che $\widehat{f}(0) = 2$.

Si noti che mentre $f(x) \in L^1(\mathbb{R})$ altrettanto non si può dire di $\widehat{f}(\xi)$ dato che

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\sin(\xi)}{\xi} \right| d\xi = \infty.$$

Osserviamo infine che quanto descritto non è in contraddizione con le affermazioni fatte alla fine del paragrafo precedente dato che la funzione f non è continua.

OSSERVAZIONE 4.2 L'operatore di trasformazione \mathcal{F} è continuo come operatore da $L^1(\mathbb{R})$ in $L^\infty(\mathbb{R})$ (con $L^\infty(\mathbb{R})$ indichiamo lo spazio delle funzioni limitate per quasi tutti gli $x \in \mathbb{R}$). Questa proprietà è una conseguenza del fatto che l'operatore d'integrazione è continuo. In altri termini, se f_n è una successione di funzioni integrabili convergente ad una certa f nel senso di L^1 , ovvero tale che $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_{L^1(\mathbb{R})} = 0$, allora \widehat{f}_n converge ad \widehat{f} nel senso che $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\widehat{f}_n - \widehat{f}\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = 0$.

Stando attenti ad attribuire alla frase il significato appena precisato, possiamo affermare che "il limite delle trasformate di Fourier delle f_n è la trasformata del limite delle f_n ".

ESEMPIO 4.1 Calcoliamo la trasformata di Fourier della funzione $f(x) = \chi_{[a,b]}(x)$. Procedendo analogamente a quanto fatto nell'osservazione 4.1 si ha:

$$\widehat{f}(\xi) = \begin{cases} b - a & \text{se } \xi = 0 \\ \frac{1}{i\xi}(e^{-ia\xi} - e^{-ib\xi}) & \text{se } \xi \neq 0 \end{cases}.$$

Si noti che $\widehat{f}(\xi)$ è una funzione continua e tale che $\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} |\widehat{f}(\xi)| = 0$, infatti $|\widehat{f}(\xi)| < 2/|\xi|$ per $\xi \neq 0$.

Se $a = -b$, la trasformata di $f(x)$ è

$$\widehat{f}(\xi) = \begin{cases} 2b & \text{se } \xi = 0 \\ \frac{2}{\xi} \sin(b\xi) & \text{se } \xi \neq 0 \end{cases}.$$

A questo risultato saremo potuti arrivare anche in base alla proprietà di riscalamento (proposizione 4.2): osserviamo che $\chi_{[-a,a]}(x) = \chi_{[-1,1]}(x/a)$ e quindi

$$\left(\chi_{[-a,a]}(x)\right)^\wedge(\xi) = \left(\chi_{[-1,1]}(x/a)\right)^\wedge(\xi) = \frac{1}{a} \left(\chi_{[-1,1]}(x)\right)^\wedge(a\xi) = \begin{cases} 2a & \text{se } \xi = 0 \\ a \frac{2}{a\xi} \sin(a\xi) & \text{se } \xi \neq 0 \end{cases}$$

ovvero lo stesso risultato ottenuto precedentemente per via diretta.

ESEMPIO 4.2 Calcoliamo la trasformata di Fourier di $f(x) = e^{-|x|}$. Procedendo per via diretta, dalla definizione di trasformata segue

$$\begin{aligned} \widehat{f}(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|} e^{-ix\xi} dx = \\ &= \int_0^{\infty} e^{-x(1+i\xi)} dx + \int_{-\infty}^0 e^{x(1-i\xi)} dx = \\ &= \int_0^{\infty} e^{-x(1+i\xi)} + e^{-x(1-i\xi)} dx = \\ &= -\frac{1}{1+i\xi} e^{-x(1+i\xi)} \Big|_{x=0}^{x=+\infty} - \frac{1}{1-i\xi} e^{-x(1-i\xi)} \Big|_{x=0}^{x=+\infty} = \\ &= (-1) \left(-\frac{1}{1+i\xi}\right) + (-1) \left(\frac{1}{1-i\xi}\right) = \frac{2}{1+\xi^2}. \end{aligned}$$

Anche in questo caso avremo potuto procedere in maniera alternativa: siano

$$f_1(x) = \begin{cases} e^{-x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}, \quad f_2(x) = \begin{cases} 0 & x > 0 \\ e^x & x \leq 0 \end{cases}.$$

Allora, $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ inoltre $f_2(x) = f_1(-x)$. Possiamo calcolare per via diretta $\widehat{f}_1(\xi) = \frac{1}{1+i\xi}$. Sfruttando la linearità e la proprietà di riscaldamento,

$$\begin{aligned} \widehat{f}(\xi) &= \widehat{f}_1(\xi) + \widehat{f}_2(\xi) = \widehat{f}_1(\xi) + \frac{1}{|-1|} \widehat{f}_1\left(\frac{\xi}{-1}\right) = \\ &= \widehat{f}_1(\xi) + \widehat{f}_1(-\xi) = \frac{1}{1+i\xi} + \frac{1}{1-i\xi} = \frac{2}{1+\xi^2}. \end{aligned}$$

Proposizione 4.3 *Se $f \in L^1(\mathbb{R})$ allora \widehat{f} è continua ed infinitesima per $|\xi| \rightarrow \infty$, cioè $\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} \widehat{f}(\xi) = 0$.*

Dimostrazione Abbiamo visto (cfr. esempio 4.1) che la proprietà è vera per le funzioni caratteristiche degli intervalli. Per la linearità dell'operatore di trasformazione vale anche per tutte le loro combinazioni lineari. Se $f \in L^1(\mathbb{R})$, dalla definizione di integrale di Riemann sappiamo che possiamo approssimare f con funzioni a scalini. Sfruttando quanto detto nell'osservazione 4.2 segue l'enunciato. \square

Proposizione 4.4 *Sia $f \in L^1(\mathbb{R})$ e sia $\widehat{f}(\xi)$ la sua trasformata di Fourier. Allora:*

- i) Se $f(x)$ è pari allora $\widehat{f}(\xi)$ è reale.*
- ii) Se $f(x)$ è dispari allora $\widehat{f}(\xi)$ è immaginaria pura.*
- iii) Se $f(x)$ è reale allora $\widehat{f}(-\xi) = \overline{\widehat{f}(\xi)}$.*

Dimostrazione Dimostriamo la *i)*. Supponiamo che $f(x) = f(-x)$. Allora

$$\begin{aligned} \widehat{f}(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ix\xi} dx = \int_{-\infty}^0 f(x)e^{-ix\xi} dx + \int_0^{\infty} f(x)e^{-ix\xi} dx = \\ &= \int_0^{\infty} f(x)e^{ix\xi} dx + \int_0^{\infty} f(x)e^{-ix\xi} dx = \\ &= \int_0^{\infty} 2f(x) \frac{e^{ix\xi} + e^{-ix\xi}}{2} dx = 2 \int_0^{\infty} f(x) \cos(x\xi) dx \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

La *ii)* e la *iii)* si dimostrano procedendo in maniera analoga. I dettagli sono lasciati per esercizio. \square

Corollario 4.1 *Come banale conseguenza della proposizione precedente,*

- i) Se $f \in L^1(\mathbb{R})$ è reale e pari allora $\widehat{f}(\xi)$ è reale e pari.*
- ii) Se $f \in L^1(\mathbb{R})$ è reale e dispari allora $\widehat{f}(\xi)$ è immaginaria pura e dispari.*

OSSERVAZIONE 4.3 Data una funzione $\widehat{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ è sempre possibile individuare in modo unico due funzioni reali a e b tali che

$$\widehat{f}(\xi) = a(\xi) + ib(\xi).$$

Inoltre è sempre possibile scomporre una funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ nella somma di una funzione pari $f_P(x)$ e di una funzione dispari $f_D(x)$; anche tale scomposizione è unica.

Se \widehat{f} è la trasformata di Fourier di una funzione $f \in L^1(\mathbb{R})$, per il corollario precedente le trasformate di Fourier di $f_P(x)$ e $f_D(x)$ sono rispettivamente una funzione reale e una funzione immaginaria pura. Per l'unicità delle scomposizioni di f e di \widehat{f} risulta

$$\mathcal{F}[f_P(x)](\xi) = a(\xi) \quad \text{e} \quad \mathcal{F}[f_D(x)](\xi) = ib(\xi).$$

Le funzioni $f_P(x)$ e $f_D(x)$ prendono il nome di **parte pari** e **parte dispari** di f rispettivamente.

ESEMPIO 4.3 Consideriamo la funzione di Heaviside: $H(x) = \chi_{[0, \infty)}(x)$. Sia

$$g(x) = 2e^{-x}H(x) = \begin{cases} 2e^{-x} & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}.$$

Si verifica facilmente che $g_P(x) = e^{-|x|}$ e che $g_D(x) = \text{sgn}(x)e^{-|x|}$. Calcolare le trasformate di Fourier di g , g_D e g_P verificando che $\widehat{g}_P(\xi) \in \mathbb{R}$, che $\widehat{g}_D(\xi)$ è immaginaria pura e che $\widehat{g}(\xi) = \widehat{g}_P(\xi) + i\widehat{g}_D(\xi)$. Facendo i calcoli,

$$\widehat{g}(\xi) = 2 \int_0^{\infty} e^{-x} e^{-ix\xi} dx = -\frac{2}{1+i\xi} e^{-x(1+i\xi)} \Big|_{x=0}^{x=\infty} = \frac{2}{1+i\xi} = 2 \frac{1-i\xi}{1+\xi^2}.$$

In base all'osservazione 4.3 concludiamo che

$$\widehat{g}_P(\xi) = \text{Re}(\widehat{g}(\xi)) = \frac{2}{1+\xi^2}, \quad \widehat{g}_D(\xi) = i \text{Im}(\widehat{g}(\xi)) = -\frac{2i\xi}{1+\xi^2}.$$

La verifica di questo risultato per via diretta è lasciata al lettore.

Proposizione 4.5 (di traslazione o di ritardo) Sia $f \in L^1(\mathbb{R})$ e sia \widehat{f} la sua trasformata di Fourier. Se $x_0 \in \mathbb{R}$, la funzione $f(x - x_0)$ è trasformabile secondo Fourier ed ha come trasformata $e^{-ix_0\xi} \widehat{f}(\xi)$.

Dimostrazione Poniamo $y = x - x_0$; allora

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f(x - x_0)](\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} f(x - x_0) dx = e^{-ix_0\xi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(x-x_0)\xi} f(x - x_0) dx = \\ &= e^{-ix_0\xi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iy\xi} f(y) dy = e^{-ix_0\xi} \widehat{f}(\xi). \end{aligned}$$

□

ESEMPIO 4.4 Calcoliamo la trasformata di Fourier

di

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } -a \leq x < 0 \\ 1 & \text{se } 0 \leq x \leq a \end{cases}.$$

Scriviamo f (vedi figura 4.3) in una forma più conveniente:

$$\begin{aligned} f(x) &= -\chi_{[-a,0]}(x) + \chi_{[0,a]}(x) = \\ &= -\chi_{[-\frac{a}{2},\frac{a}{2}]}(x + \frac{a}{2}) + \chi_{[-\frac{a}{2},\frac{a}{2}]}(x - \frac{a}{2}). \end{aligned}$$

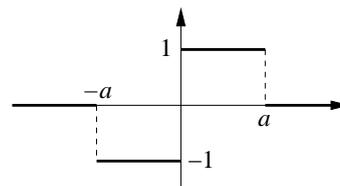


Figura 4.3

Dall'osservazione 4.1 sappiamo che, per $\xi \neq 0$, $[\chi_{[-1,1]}(x)]^\wedge(\xi) = 2 \frac{\sin(\xi)}{\xi}$.

$$\text{per la proposizione 4.2: } [\chi_{[-\frac{a}{2},\frac{a}{2}]}(x)]^\wedge(\xi) = [\chi_{[-1,1]}(\frac{2}{a}x)]^\wedge(\xi) = \frac{2}{\xi} \sin\left(\frac{a}{2}\xi\right)$$

$$\text{per la proposizione 4.5: } [\chi_{[-\frac{a}{2},\frac{a}{2}]}(x + \frac{a}{2})]^\wedge(\xi) = \frac{2}{\xi} e^{i\xi\frac{a}{2}} \sin\left(\frac{a}{2}\xi\right)$$

$$\text{ancora per la proposizione 4.5: } [\chi_{[-\frac{a}{2},\frac{a}{2}]}(x - \frac{a}{2})]^\wedge(\xi) = \frac{2}{\xi} e^{-i\xi\frac{a}{2}} \sin\left(\frac{a}{2}\xi\right)$$

Infine, sommando le ultime due espressioni:

$$\widehat{f}(\xi) = -\frac{2}{\xi} \sin\left(\frac{a}{2}\xi\right) \{e^{i\xi\frac{a}{2}} - e^{-i\xi\frac{a}{2}}\} = -\frac{4i}{\xi} \sin^2\left(\frac{a}{2}\xi\right),$$

da estendere con continuità per $\xi = 0$.

Proposizione 4.6 (modulazione) Sia $f \in L^1(\mathbb{R})$ e sia \widehat{f} la sua trasformata di Fourier. Per ogni $\xi_0 \in \mathbb{R}$ la funzione $e^{i\xi_0 x} f(x)$ è trasformabile secondo Fourier e la sua trasformata è $\widehat{f}(\xi - \xi_0)$.

Dimostrazione Osserviamo innanzitutto che $|e^{i\xi_0 x} f(x)| = |f(x)|$ e quindi che $e^{i\xi_0 x} f(x) \in L^1(\mathbb{R})$.

$$(e^{i\xi_0 x} f(x))^\wedge(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi_0 x} f(x) e^{-i\xi x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i x(\xi - \xi_0)} f(x) dx = \widehat{f}(\xi - \xi_0).$$

□

ESEMPIO 4.5 Possiamo sfruttare la 4.6 per calcolare le trasformate di Fourier di funzioni della forma $f(x) \cos(\xi_0 x)$ o della forma $g(x) = f(x) \sin(\xi_0 x)$.

Dalle formule di Eulero (1.11),

$$[f(x) \cos(\xi_0 x)]^\wedge(\xi) = \frac{1}{2} [(e^{i\xi_0 x} + e^{-i\xi_0 x})f(x)]^\wedge(\xi) = \frac{1}{2} (\widehat{f}(\xi - \xi_0) + \widehat{f}(\xi + \xi_0)).$$

Analogamente,

$$[f(x) \sin(\xi_0 x)]^\wedge(\xi) = \frac{1}{2i} [(e^{i\xi_0 x} - e^{-i\xi_0 x})f(x)]^\wedge(\xi) = \frac{1}{2i} (\widehat{f}(\xi - \xi_0) - \widehat{f}(\xi + \xi_0)).$$

4.3 Inversione della trasformata di Fourier

Quando abbiamo introdotto la trasformata di Fourier abbiamo definito la funzione

$$F(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ix\xi} dx$$

per poi scrivere la serie di Fourier di f come

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\ell} e^{i\frac{n}{\ell}x} F(n/\ell)$$

ed osservare che passando al limite per $\ell \rightarrow \infty$ assume la forma

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(\xi) e^{ix\xi} d\xi \quad (4.5)$$

Abbiamo poi definito la trasformata di Fourier mediante la formula $\widehat{f}(\xi) = 2\pi F(\xi)$. Questo procedimento suggerisce di utilizzare la (4.5) per ottenere una formula di inversione per la trasformata di Fourier. Dimostreremo che, in un certo senso,

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi.$$

Teorema 4.1 (formula di inversione della trasformata di Fourier) *Sia $f \in L^1(\mathbb{R})$ una funzione di classe C^1 a tratti, eventualmente modificata in modo che*

$$f(x) = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}.$$

Sia $\widehat{f}(\xi)$ la trasformata di Fourier di f . Allora

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi = \frac{1}{2\pi} \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{-\lambda}^{\lambda} \widehat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi. \quad (4.6)$$

Con v.p. abbiamo indicato il “valore principale” dell’integrale, definito dal limite che compare nella (4.6).

Dimostrazione Per prima cosa calcoliamo

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\lambda}^{\lambda} \widehat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\lambda}^{\lambda} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\xi t} dt \right\} e^{ix\xi} d\xi.$$

Per poter scambiare l’ordine di integrazione dobbiamo verificare che la funzione $(t, \xi) \mapsto f(t) e^{-i\xi(t-x)}$ sia $L^1(\mathbb{R})$. Questo però è vero poiché $|e^{-i\xi(t-x)}| = 1$ e $f \in L^1(\mathbb{R})$.

Quindi,

$$\begin{aligned} \int_{-\lambda}^{\lambda} \widehat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{1}{2\pi} \int_{-\lambda}^{\lambda} e^{-i\xi(t-x)} d\xi dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{\sin(\lambda(t-x))}{\pi(t-x)} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(x+t) \frac{\sin(\lambda t)}{\pi t} dt = \\ &= \int_{-\infty}^0 f(x+t) \frac{\sin(\lambda t)}{\pi t} dt + \int_0^{\infty} f(x+t) \frac{\sin(\lambda t)}{\pi t} dt. \end{aligned}$$

Facciamo vedere che quando $\lambda \rightarrow +\infty$ il primo integrale tende a $\frac{1}{2}f(x+0)$ mentre il secondo tende a $\frac{1}{2}f(x-0)$. Per far questo si osservi che

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(\lambda t)}{\pi t} dt = \int_{-\infty}^0 \frac{\sin(\lambda t)}{\pi t} dt = \frac{1}{2} \quad (4.7)$$

e che

$$I = \int_0^{\infty} f(x+t) \frac{\sin(\lambda t)}{\pi t} dt - \frac{1}{2}f(x+0) = \int_0^{\infty} [f(x+t) - f(x+0)] \frac{\sin(\lambda t)}{\pi t} dt.$$

Dimostreremo che quest'ultimo integrale tende a zero per $\lambda \rightarrow \infty$. Sia $T > 0$, scomponiamo I in tre parti nel modo seguente

$$I := \int_0^T \frac{f(x+t) - f(x+0)}{\pi t} \sin(\lambda t) dt + \int_T^{\infty} f(x+t) \frac{\sin(\lambda t)}{\pi t} dt - \int_T^{\infty} f(x+0) \frac{\sin(\lambda t)}{\pi t} dt. \quad (4.8)$$

Indichiamo con I_1, I_2, I_3 i tre addendi al secondo membro della (4.8); si ha

$$|I_2| \leq \frac{1}{\pi} \int_T^{\infty} |f(x+t)| dt, \quad |I_3| \leq |f(x+0)| \left| \int_T^{\infty} \frac{\sin(\lambda t)}{\pi t} dt \right|$$

poiché $f \in L^1(\mathbb{R})$ e per la (4.7), per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $T_\varepsilon > 0$ tale che per ogni $T > T_\varepsilon$, $|I_2| < \varepsilon$ e $|I_3| < \varepsilon$. Quindi,

$$|I| \leq 2\varepsilon + \left| \int_0^T \frac{f(x+t) - f(x+0)}{\pi t} \sin(\lambda t) dt \right|.$$

Per la regolarità di $f(x)$, la funzione $g(t) = \frac{f(x+t) - f(x+0)}{\pi t} \in L^1([0, T])$ e quindi, per il *lemma di Riemann-Lebesgue*¹, $|I_1| \rightarrow 0$ se $\lambda \rightarrow \infty$.

In definitiva, se fissiamo $T > T_\varepsilon$ e passiamo al limite per $\lambda \rightarrow \infty$ nella (4.8), $|I| \rightarrow 0$ ovvero

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} f(x+t) \frac{\sin(\lambda t)}{\pi t} dt = \frac{1}{2}f(x+0). \quad (4.9)$$

Procedendo in maniera del tutto analoga si dimostra che

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^0 f(x+t) \frac{\sin(\lambda t)}{\pi t} dt = \frac{1}{2}f(x-0). \quad (4.10)$$

Sommando la (4.9) e la (4.10) segue l'enunciato. \square

¹**Lemma 4.1 (di Riemann-Lebesgue)** Per ogni funzione $g \in L^1_{[a,b]}$ si ha:

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_a^b g(x) \sin(\lambda x) dx = 0, \quad \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_a^b g(x) \cos(\lambda x) dx = 0.$$

Per una dimostrazione, che omettiamo, del lemma di Riemann-Lebesgue si veda, ad esempio, *G.C. Barozzi, Matematica per l'Ingegneria dell'Informazione, Zanichelli*, proposizione 3.2-1.

Corollario 4.2 (formula di dualità) Sia $f \in L^1(\mathbb{R})$, di classe C^1 a tratti e sia \widehat{f} la sua trasformata di Fourier. Se $\widehat{f}(\xi)$ è tale che

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{\widehat{f}(\xi + 0) + \widehat{f}(\xi - 0)}{2}, \quad \text{allora } \mathcal{F}[\widehat{f}(\xi)](x) = 2\pi f(-x).$$

In altre parole, $\widehat{\widehat{f}}(x) = 2\pi f(-x)$.

Dimostrazione Dalla formula di inversione si ha:

$$2\pi f(-x) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) e^{i(-x)\xi} d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(-\xi) e^{ix\xi} d\xi = \widehat{\widehat{f}}(x).$$

□

ESEMPIO 4.6 La trasformata di Fourier di $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Usando la definizione, ci troviamo a calcolare l'integrale

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ix\xi}}{1+x^2} dx$$

per calcolare il quale non sono sufficienti tecniche elementari ed è necessario ricorrere alla teoria dei residui (cfr. §1.13). La formula di dualità ci permette di aggirare l'ostacolo e calcolare la trasformata di Fourier di f in maniera più semplice: nell'esempio 4.3 abbiamo visto che la trasformata di Fourier di $g_P(x) = e^{-|x|}$ è $\widehat{g}_P(\xi) = \frac{2}{1+\xi^2}$. Dalla formula di dualità,

$$\widehat{f}(\xi) = \left(\frac{1}{2} \widehat{g}_P(x) \right)^{\widehat{}}(\xi) = \frac{1}{2} \widehat{\widehat{g}_P}(\xi) = \pi g_P(-\xi) = \pi e^{-|\xi|}.$$

In definitiva, $\mathcal{F}\left(\frac{1}{1+x^2}\right)(\xi) = \pi e^{-|\xi|}$.

4.4 Trasformate di Fourier e derivazione. Convoluzioni

Proposizione 4.7 (trasformata della derivata) Sia $f \in L^1(\mathbb{R})$ una funzione continua, derivabile e tale che $f' \in L^1(\mathbb{R})$. La funzione f' è trasformabile secondo Fourier e $\mathcal{F}[f'(x)](\xi) = i\xi \widehat{f}(\xi)$.

Dimostrazione Dalla definizione di trasformata, integrando per parti,

$$\mathcal{F}[f'(x)](\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} f'(x) dx = e^{-ix\xi} f(x) \Big|_{-\infty}^{\infty} + i\xi \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} f(x) dx.$$

Dalle ipotesi di regolarità di f (in particolare $f' \in L^1(\mathbb{R})$) il termine finito dell'integrazione per parti si annulla, quindi $\mathcal{F}[f'(x)](\xi) = i\xi \widehat{f}(\xi)$. □

OSSERVAZIONE 4.4 La proposizione 4.6 continua a valere anche nel caso di funzioni f con derivata soltanto continua a tratti.

ESEMPIO 4.7 Calcolare la trasformata di Fourier della funzione

$$g_a(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < -a \\ a+x & \text{se } -a \leq x < 0 \\ a-x & \text{se } 0 \leq x < a \\ 0 & \text{se } x \geq a \end{cases}$$

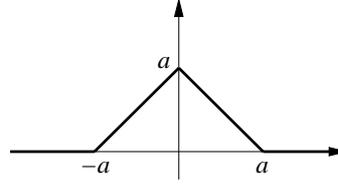


Figura 4.4 La funzione $g_a(x)$.

per $a > 0$.

La derivata di $g_a(x)$ è $g'_a(x) = \chi_{[-a,0]}(x) - \chi_{[0,a]}(x)$; a parte il segno si tratta proprio della funzione esaminata nell'esempio 4.4. Quindi, $(g'_a)\widehat{(\xi)} = \frac{4i}{\xi} \sin^2\left(\frac{a}{2}\xi\right)$.

Per scrivere la trasformata di Fourier di $g_a(x)$ è sufficiente, a questo punto, applicare la proposizione 4.7:

$$\widehat{g}_a(\xi) = \frac{1}{i\xi} (g'_a)\widehat{(\xi)} = \frac{4}{\xi^2} \sin^2\left(\frac{a}{2}\xi\right), \quad \xi \neq 0,$$

mentre $\widehat{g}_a(0) = a^2$.

Corollario 4.3 Se $f, f', f^{(n-1)}$ sono funzioni continue e integrabili su \mathbb{R} ed $f^{(n)}$ è continua a tratti ed integrabile su \mathbb{R} , allora $\mathcal{F}[f^{(n)}(x)](\xi) = (i\xi)^n \widehat{f}(\xi)$.

Inoltre, $\widehat{f}(\xi) = o(1/\xi^n)$ per $\xi \rightarrow \infty$.

Proposizione 4.8 (derivata della trasformata) Supponiamo che le funzioni $f(x)$ e $xf(x)$ siano integrabili su \mathbb{R} . Allora la trasformata di Fourier $\widehat{f}(\xi)$ di $f(x)$ è derivabile e si ha

$$\frac{d}{d\xi} \widehat{f}(\xi) = \mathcal{F}[(-ix)f(x)](\xi).$$

Dimostrazione

$$\frac{d}{d\xi} \widehat{f}(\xi) = \frac{d}{d\xi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} f(x) dx.$$

Con qualche calcolo si verifica che è possibile derivare sotto l'integrale. Quindi,

$$\frac{d}{d\xi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} (-ix) f(x) dx = \mathcal{F}[(-ix)f(x)](\xi).$$

□

Corollario 4.4 Supponiamo che la funzione $f(x) \in L^1(\mathbb{R})$ sia tale che $x^n f(x) \in L^1(\mathbb{R})$ (e quindi sia trasformabile secondo Fourier) per un certo $n > 0$. Allora la trasformata di Fourier $\widehat{f}(\xi)$ di $f(x)$ è derivabile n volte e si ha

$$\frac{d^n}{d\xi^n} \widehat{f}(\xi) = \mathcal{F}[(-ix)^n f(x)](\xi).$$

Se $x^n f(x) \in L^1(\mathbb{R})$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ allora $\widehat{f}(\xi) \in C^\infty(\mathbb{R})$.

ESEMPIO 4.8 Calcoliamo la trasformata di Fourier della gaussiana $f(x) = e^{-x^2}$.

Usando la definizione, dovremo calcolare $\widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2+ix\xi} dx$. Il calcolo di questo integrale, in generale, non è agevole; si verifica facilmente però che

$$\widehat{f}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = 2 \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

Osserviamo però che $f'(x) = -2xe^{-x^2} = -2xf(x)$; se passiamo alle trasformate di Fourier di entrambi i membri:

$$[f'(x)](\xi) = i\xi\widehat{f}(\xi)$$

$$[xf(x)](\xi) = i[(-ix)f(x)](\xi) = i\frac{d}{d\xi}\widehat{f}(\xi)$$

Di conseguenza, $\widehat{f}(\xi)$ è la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} g'(\xi) + \frac{\xi}{2}g(\xi) = 0 \\ g(0) = \sqrt{\pi} \end{cases}.$$

Facendo i calcoli, $\widehat{f}(\xi) = \sqrt{\pi}e^{-\xi^2/4}$ ovvero, la trasformata di Fourier di una gaussiana è ancora una gaussiana.

DEFINIZIONE 4.3 Siano f_1 ed f_2 due funzioni integrabili su \mathbb{R} . Chiamiamo **prodotto di convoluzione** di f_1 ed f_2 l'espressione

$$(f_1 * f_2)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)f_2(x-t) dt$$

Si può dimostrare (per la dimostrazione rimandiamo a testi più specifici) che se $f_1, f_2 \in L^1(\mathbb{R})$ anche $(f_1 * f_2) \in L^1(\mathbb{R})$. Ha quindi senso parlare di trasformata di Fourier di un prodotto di convoluzione.

Proposizione 4.9 (trasformata del prodotto di convoluzione) Siano $f_1, f_2 \in L^1(\mathbb{R})$ e sia $f = f_1 * f_2$ il loro prodotto di convoluzione. Allora

$$\widehat{f}(\xi) = (f_1 * f_2)\widehat{f}(\xi) = \widehat{f}_1(\xi)\widehat{f}_2(\xi).$$

Dimostrazione Dalla definizione di prodotto di convoluzione:

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f_1(s)f_2(x-s) ds \right\} dx.$$

Si verifica che valgono le ipotesi del teorema di Fubini e quindi che è possibile scambiare l'ordine di integrazione. Quindi,

$$\begin{aligned} \widehat{f}(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} f_2(x-s) dx \right\} f_1(s) ds = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixs} f_1(s) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(x-s)\xi} f_2(x-s) dx \right\} ds = \\ &= \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixs} f_1(s) ds \right\} \widehat{f}_2(\xi) = \widehat{f}_1(\xi)\widehat{f}_2(\xi). \end{aligned}$$

□

ESEMPIO 4.9 Consideriamo di nuovo la funzione “impulso triangolare” già vista nell'esempio 4.7. $g_a(x)$ può essere scritta anche in forma di convoluzione:

$$g_a(x) = \left(\chi_{[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}]} * \chi_{[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}]} \right) (x) = \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}]}(s) \chi_{[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}]}(x-s) ds.$$

Passando alle trasformate, posto $f_1(x) = \chi_{[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}]}(x)$, si ha:

$$\widehat{g}_a(\xi) = (f_1 * f_1)(x), \quad \text{e quindi} \quad \widehat{f}(\xi) = \left(\widehat{f}_1(\xi) \right)^2.$$

Ma $\widehat{f}_1(\xi) = \frac{2}{\xi} \sin\left(\frac{a}{2}\xi\right)$ e quindi $\widehat{f}(\xi) = \frac{4}{\xi^2} \sin^2\left(\frac{a}{2}\xi\right)$, come era già stato ricavato per altra via.

Corollario 4.5 Siano $f_1, f_2 \in L^1(\mathbb{R})$, di classe C^1 a tratti. Se $\widehat{f}_1, \widehat{f}_2 \in L^1(\mathbb{R})$, vale l'uguaglianza

$$\mathcal{F}[f_1(x)f_2(x)](\xi) = \frac{1}{2\pi} (\widehat{f}_1 * \widehat{f}_2)(\xi). \quad (4.11)$$

Dimostrazione Dalla proposizione 4.9 scritta per le trasformate di f_1 e f_2 e dalla formula di dualità (corollario 4.2),

$$\mathcal{F}[\widehat{f}_1(\xi) * \widehat{f}_2(\xi)](y) = \widehat{f}_1(y) \widehat{f}_2(y) = 4\pi^2 f_1(-y) f_2(-y).$$

Passiamo alle trasformate di entrambi i membri e poniamo $x = -y$:

$$\mathcal{F}[f_1(x)f_2(x)](\xi) = \frac{1}{4\pi^2} \left((\widehat{f}_1 * \widehat{f}_2)(-x) \right) \widehat{}(\xi).$$

Si osservi poi che $\mathcal{F}[f(x)](-\xi) = \mathcal{F}[f(-x)](\xi)$; applicando ancora la formula di dualità,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f_1(x)f_2(x)](\xi) &= \frac{1}{4\pi^2} \left((\widehat{f}_1 * \widehat{f}_2)(x) \right) \widehat{}(-\xi) = \\ &= \frac{1}{4\pi^2} (\widehat{f}_1 * \widehat{f}_2)(-\xi) = \frac{1}{2\pi} (\widehat{f}_1 * \widehat{f}_2)(\xi), \end{aligned}$$

cioè la (4.11). □

ESEMPIO 4.10 La trasformata di Fourier può essere utilizzata per determinare particolari soluzioni di equazioni differenziali ordinarie: data $g \in L^1(\mathbb{R}) \cap C^0(\mathbb{R})$, cerchiamo $f \in L^1(\mathbb{R})$ tale che

$$y''(x) - y(x) = g(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (4.12)$$

L'equazione ammette infinite soluzioni. Mediante le trasformate di Fourier siamo però in grado di determinare soltanto le soluzioni trasformabili, ovvero le eventuali $y(x) \in L^1(\mathbb{R})$ che soddisfano la (4.12). Supponiamo quindi $y(x) \in L^1(\mathbb{R})$; entrambi i membri della (4.12) sono trasformabili secondo Fourier. Passando alle trasformate e utilizzando il corollario 4.4,

$$\widehat{y}(\xi) = -\frac{1}{1+\xi^2} \cdot \widehat{g}(\xi).$$

Ricordiamo che (cfr. esempio 4.8) $\mathcal{F}[e^{-|x|}](\xi) = \frac{2}{1+\xi^2}$; utilizzando la proposizione 4.9 si ha:

$$y(x) = -\frac{e^{-|x|}}{2} * g(x) = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x-t|} g(t) dt.$$

4.5 Tavole riassuntive

$\mathcal{F}[f(cx)](\xi) = \frac{1}{ c } \mathcal{F}[f(x)]\left(\frac{\xi}{c}\right), \quad c \neq 0$
$\mathcal{F}[c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)](\xi) = c_1 \mathcal{F}[f_1(x)](\xi) + c_2 \mathcal{F}[f_2(x)](\xi)$
$\mathcal{F}[f(x - x_0)](\xi) = e^{-ix_0 \xi} \mathcal{F}[f](\xi)$
$\mathcal{F}[e^{i\xi_0 x} f(x)](\xi) = \mathcal{F}[f(x)](\xi - \xi_0)$
$\mathcal{F}[f(x) \cos(\xi_0 x)] = \frac{1}{2} (\mathcal{F}[f](\xi - \xi_0) + \mathcal{F}[f](\xi + \xi_0))$
$\mathcal{F}[f(x) \sin(\xi_0 x)] = \frac{1}{2} (\mathcal{F}[f](\xi - \xi_0) - \mathcal{F}[f](\xi + \xi_0))$
$\mathcal{F}[f^n(x)](\xi) = (i\xi)^n \mathcal{F}[f](\xi), \quad n \in \mathbb{N}$
$\mathcal{F}[x^n f(x)](\xi) = i^n \frac{d^n}{d\xi^n} \mathcal{F}[f](\xi), \quad n \in \mathbb{N}$
$f(x) = \frac{1}{2\pi} \text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}[f](\xi) e^{ix\xi} d\xi$
$\mathcal{F}[\mathcal{F}[f]](x) = 2\pi f(-x)$
$\mathcal{F}[(f_1 * f_2)(x)](\xi) = \mathcal{F}[f_1](s) \mathcal{F}[f_2](s)$

Tabella 4.1: Principali proprietà della trasformata di Fourier

$f(x)$	$\mathcal{F}[f](\xi)$
$\chi_{[-a,a]}(x)$	$\frac{2}{\xi} \sin(a\xi), \quad a > 0$
$e^{-a x }$	$\frac{2a}{a^2 + \xi^2}, \quad a > 0$
$\text{sgn}(x)e^{-a x }$	$-\frac{2i\xi}{a^2 + \xi^2}, \quad a > 0$
$\chi_{[0,a]}(x) - \chi_{[-a,0]}(x)$	$-\frac{4i}{\xi} \sin^2(a\xi), \quad a > 0$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\frac{\pi}{a} e^{-a \xi }, \quad a > 0$
$\text{tri}(x)^a$	$\frac{4}{\xi^2} \sin^2\left(\frac{\xi}{2}\right)$
e^{-x^2}	$\sqrt{\pi} e^{-\xi^2/4}$

^aCon $\text{tri}(x)$ si indica la funzione dell'esempio 4.7 per $a = 1$. Quindi $g_a(x) = a \text{tri}(x/a)$.

Tabella 4.2: Trasformata di Fourier di alcune funzioni elementari

CAPITOLO 5

La trasformata di Laplace

5.1 Definizioni e trasformate elementari

DEFINIZIONE 5.1 Sia $f: I \rightarrow \mathbb{C}$, definita su un dominio $I \subset \mathbb{R}$ contenuto nella semiretta $x > 0$. Diciamo che f è **trasformabile secondo Laplace** se esiste un $s \in \mathbb{C}$ tale che $f(x)e^{-sx} \in L^1(\mathbb{R}^+)$. In tal caso chiamiamo **integrale di Laplace** di f l'integrale

$$\int_0^{\infty} f(x)e^{-sx} dx.$$

Si vede subito che se l'integrale converge per un certo $s_0 \in \mathbb{C}$ converge per tutti gli $s \in \mathbb{C}$ tali che $\operatorname{Re} s > \operatorname{Re} s_0$, poiché $|e^{-sx}| = e^{-(\operatorname{Re} s)x}$.

DEFINIZIONE 5.2 L'insieme degli $s \in \mathbb{C}$ per cui l'integrale converge è dunque un semipiano destro di \mathbb{C} . È quindi possibile definire una quantità

$$\sigma[f] = \inf\{\operatorname{Re} s, s \in \mathbb{C} \text{ tali che l'integrale di Laplace converge}\}.$$

$\sigma[f]$ prende il nome di **ascissa di convergenza** di f .

DEFINIZIONE 5.3 Se $f: I \rightarrow \mathbb{C}$, $\mathbb{R}^+ \subseteq I$ è trasformabile secondo Laplace, per ogni $s \in \mathbb{C}$ tale che $\operatorname{Re} s > \sigma[f]$ definiamo la funzione

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(x)e^{-sx} dx.$$

$F(s)$ si dice **trasformata di Laplace** di $f(x)$ e la indicheremo con il simbolo $\mathcal{L}[f](s)$ o con $\hat{f}(s)$. Onde evitare confusione con la trasformata di Fourier privilegeremo la prima notazione.

DEFINIZIONE 5.4 Una funzione $f: I \rightarrow \mathbb{C}$ si dice di **ordine esponenziale** α se $|f(x)| \leq M e^{\alpha x}$ per un certo $M > 0$.

L'ordine esponenziale è strettamente legato all'ascissa di convergenza σ di una funzione. Se f è una funzione di ordine esponenziale α , allora

$$|e^{-sx} f(x)| \leq e^{-\sigma x} M e^{\alpha x} = M e^{-(\sigma-\alpha)x}.$$

Quindi $f(x)e^{-sx}$ è integrabile su \mathbb{R}^+ se $\sigma > \alpha$. Letto in termini di ascissa di convergenza, $\alpha \leq \sigma[f]$.

ESEMPIO 5.1 *Funzione di Heaviside*

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}.$$

Con una notazione più sintetica,

$$H(x) = \chi_{\mathbb{R}^+}(x).$$

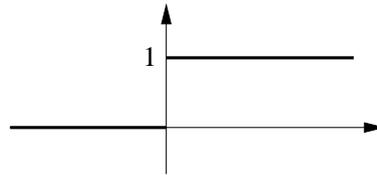


Figura 5.1

$H(x)$ è una funzione esponenziale di ordine zero: $H(x) \leq 1 \cdot e^{0x}$.

L'integrale di Lebesgue di H converge per $\operatorname{Re} s > 0$, $\sigma[H(x)] = 0$.

Calcoliamo la trasformata di Laplace di $H(x)$ utilizzando la definizione 5.3:

$$\mathcal{L}[H](s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} dx = -\frac{e^{-sx}}{s} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s}, \quad \operatorname{Re}(s) > 0.$$

ESEMPIO 5.2 *Funzioni esponenziali* $f(x) = e^{ax}$, con $a = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$.

La trasformata di Laplace di f è definita se $e^{(a-s)x}$ è integrabile per $x > 0$, ovvero per gli $s \in \mathbb{C}$ tali che $\operatorname{Re}(a-s) < 0$ cioè $\alpha < \operatorname{Re} s$. L'ascissa di convergenza di f è dunque α .

$$\mathcal{L}[f](s) = \int_0^{\infty} e^{-(s-a)x} dx = -\frac{e^{-(s-a)x}}{s-a} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s-a}.$$

Si osservi che per $a = 0$ si ritrova il risultato dell'esempio 5.1 per la funzione di Heaviside.

ESEMPIO 5.3 *Funzioni caratteristiche di intervalli*.

Calcoliamo la trasformata di Laplace della funzione caratteristica di un intervallo: $f(x) = \chi_{[0,h]}(t) = H(x) - H(x-h)$.

$$\text{Per } s \neq 0, \quad \mathcal{L}[f](s) = \int_0^h e^{-sx} dx = \frac{1 - e^{-hs}}{s};$$

$$\text{per } s = 0, \quad \mathcal{L}[f](0) = \int_0^h dx = h$$

Osserviamo che $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-hs}}{s} = h$; si osservi che la funzione $\mathcal{L}[f](s)$ è continua in $s = 0$. Per quanto riguarda l'ascissa di convergenza si noti che f è a supporto compatto. Lo stesso vale anche per $f(x)e^{-sx}$ che quindi è integrabile per qualsiasi valore di $s \in \mathbb{C}$: $\sigma[f] = -\infty$.

ESEMPIO 5.4 *Delta di Dirac*.

Consideriamo la funzione dell'esempio precedente e normalizziamo in modo da avere impulsi f_h di area unitaria qualunque sia il valore di $h > 0$, ovvero, $f_h(x) = \frac{1}{h} \chi_{[0,h]}(x)$. Passando alle trasformate,

$$\mathcal{L}[f_h](s) = \begin{cases} \frac{1 - e^{-hs}}{hs}, & s \neq 0 \\ 1, & s = 0 \end{cases}.$$

Sia $\delta(x) = \lim_{h \rightarrow 0} f_h(x)$; $\delta(x)$ prende il nome di **delta di Dirac**; passando al limite sulle trasformate, $\lim_{h \rightarrow 0} \mathcal{L}[f_h](s) \equiv 1$. Il candidato naturale ad essere la trasformata di Laplace della *delta* di Dirac è dunque la funzione identicamente uguale ad 1. Il procedimento seguito in questo esempio non costituisce però una dimostrazione di quale sia la trasformata della *delta* per almeno un paio di ragioni evidenti: non abbiamo dimostrato che la trasformata di Laplace del limite è il limite delle trasformate di Laplace; inoltre la *delta* non è una funzione bensì una distribuzione. L'argomento è più delicato di quanto possa apparire e andrebbe trattato con cura. Il risultato è comunque corretto e nel seguito ne faremo uso.

Proposizione 5.1 (Linearità dell'operatore \mathcal{L}) *Siano f_1 ed f_2 funzioni trasformabili secondo Laplace, con ascissa di convergenza $\sigma[f_1]$ e $\sigma[f_2]$ rispettivamente. La funzione $c_1 f_1 + c_2 f_2$ è trasformabile secondo Laplace per ogni $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ ed è definita almeno per gli $s \in \mathbb{C}$ tali che $\operatorname{Re}(s) \geq \max\{\sigma[f_1], \sigma[f_2]\}$. Inoltre,*

$$\mathcal{L}[c_1 f_1 + c_2 f_2](s) = c_1 \mathcal{L}[f_1] + c_2 \mathcal{L}[f_2], \quad \sigma[c_1 f_1 + c_2 f_2] \leq \max\{\sigma[f_1], \sigma[f_2]\}.$$

Dimostrazione È una diretta conseguenza della linearità dell'integrale. □

OSSERVAZIONE 5.1 Come conseguenza della proposizione 5.1, l'insieme delle funzioni che ammettono trasformata di Laplace formano uno spazio vettoriale.

ESEMPIO 5.5 *Trasformata delle funzioni trigonometriche*

Dall'esempio 5.2 sappiamo che la trasformata di Laplace di $f(x) = e^{\pm i\omega x}$, $\omega \in \mathbb{R}$, è $\frac{1}{s \pm i\omega}$, per $\operatorname{Re}(s) > 0$. Ricordando le formule di Eulero possiamo sfruttare questo risultato per ricavare le trasformate di Laplace delle funzioni trigonometriche:

$$\mathcal{L}[\sin(\omega x)](s) = \mathcal{L}\left[\frac{e^{i\omega x} - e^{-i\omega x}}{2i}\right] = \frac{1}{2i} \left\{ \frac{1}{s - i\omega} - \frac{1}{s + i\omega} \right\} = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}, \quad \operatorname{Re}(s) > 0,$$

$$\mathcal{L}[\cos(\omega x)](s) = \mathcal{L}\left[\frac{e^{i\omega x} + e^{-i\omega x}}{2}\right] = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{s - i\omega} + \frac{1}{s + i\omega} \right\} = \frac{s}{s^2 + \omega^2}, \quad \operatorname{Re}(s) > 0.$$

ESEMPIO 5.6 *Trasformata delle funzioni iperboliche*

Procedendo analogamente all'esempio 5.5, la trasformata di Laplace di $f(x) = e^{\omega x}$, $\omega \in \mathbb{R}$, è $\frac{1}{s - \omega}$, nel semipiano $\operatorname{Re}(s) > \omega$. Da questo risultato è facile dedurre la trasformata di Laplace di seno e coseno iperboliche:

$$\mathcal{L}[\sinh(\omega x)](s) = \mathcal{L}\left[\frac{e^{\omega x} - e^{-\omega x}}{2}\right] = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{s - \omega} - \frac{1}{s + \omega} \right\} = \frac{\omega}{s^2 - \omega^2}, \quad \operatorname{Re}(s) > |\omega|,$$

$$\mathcal{L}[\cosh(\omega x)](s) = \mathcal{L}\left[\frac{e^{\omega x} + e^{-\omega x}}{2}\right] = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{s - \omega} + \frac{1}{s + \omega} \right\} = \frac{s}{s^2 - \omega^2}, \quad \operatorname{Re}(s) > |\omega|.$$

OSSERVAZIONE 5.2 Il valore della trasformata di Laplace di una funzione $f(x)$ dipende soltanto dai valori che la funzione assume per $x \geq 0$. Questo significa che possiamo modificare la f a piacimento per gli $x < 0$ senza che la trasformata ne risenta.

Nel resto del capitolo, senza precisarlo di volta in volta, supporremo sempre $f(x)$ identicamente nulla per $x < 0$. Ad esempio, quando scriviamo $f(x) = x^n$ ci riferiremo in realtà alla funzione $f_+(x) = H(x)f(x)$. Le funzioni $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ nulle per $x < 0$ prendono il nome di **segnali**.

ESEMPIO 5.7 *Trasformate delle funzioni polinomiali*

Calcoliamo la trasformata di Laplace di $f(x) = x^n$. Procediamo per ricorsione:

$$\mathcal{L}[x^n](s) = \int_0^{\infty} x^n e^{-sx} dx = -\frac{e^{-sx}}{s} x^n \Big|_0^{\infty} + \frac{n}{s} \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-sx} dx = \frac{n}{s} \mathcal{L}[x^{n-1}](s),$$

dato che il termine finito si annulla in entrambi gli estremi. Nell'esempio 5.1 abbiamo già calcolato la trasformata della funzione di Heaviside:

$$\mathcal{L}[1](s) = \mathcal{L}[x^0](s) = \frac{1}{s}. \quad \text{Sostituendo,} \quad \mathcal{L}[x^n](s) = \frac{n!}{s^{n+1}}.$$

5.2 Proprietà della trasformata di Laplace

Prima di entrare nei dettagli vale la pena di osservare i legami tra la trasformata di Laplace e la trasformata di Fourier.

Teorema 5.1 *Sia f una funzione trasformabile secondo Laplace. Per ogni $\alpha > \sigma[f]$, la funzione $e^{-\alpha x} f(x) \in L^1(\mathbb{R})$ cioè è trasformabile secondo Fourier. Inoltre $\mathcal{L}[f](\alpha + i\beta)$ è la sua trasformata di Fourier, ovvero $\mathcal{L}[f](\alpha + i\beta) = \mathcal{F}[e^{-\alpha x} f(x)](\beta)$.*

Dimostrazione La dimostrazione è pressoché immediata e viene lasciata per esercizio. \square

La maggior parte delle proprietà della trasformata di Laplace potrebbero essere dedotte da quelle della trasformata di Fourier grazie al teorema 5.1. Data però la semplicità della maggior parte delle dimostrazioni preferiamo ottenerle direttamente. Si rifletta comunque sulle molte somiglianze tra i due tipi di trasformata.

Proposizione 5.2 *Sia f una funzione trasformabile secondo Laplace con ascissa di convergenza $\sigma[f]$ e sia $\alpha > \sigma[f]$. Valgono le affermazioni seguenti*

i) $\mathcal{L}[f](s)$ è limitata in modulo nel semipiano $\text{Re}(s) \geq \alpha$.

ii) $\lim_{\text{Re}(s) \rightarrow +\infty} \mathcal{L}[f](s) = 0$.

Dimostrazione Cominciamo dalla prima affermazione:

$$|\mathcal{L}[f](s)| \leq \int_0^{\infty} e^{-x \text{Re}(s)} |f(x)| dx \leq \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} |f(x)| dx$$

L'ultimo integrale è convergente per la definizione di ascissa di convergenza e non dipende da s . Segue quindi la i).

Per dimostrare la ii) consideriamo una successione $\{s_n\}$ tale che $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Re}(s_n) = \infty$ e $\text{Re}(s_n) > \alpha$ per ogni n . Per ogni n e per quasi ogni $t \geq 0$,

$$|e^{-s_n x} f(x)| = e^{-x \text{Re}(s_n)} |f(x)| \leq e^{-\alpha x} |f(x)|.$$

L'ultimo membro è integrabile e indipendente da n . Per il teorema di Lebesgue è possibile passare al limite sotto l'integrale. Poiché $\text{Re}(s_n) \rightarrow \infty$ segue subito la ii). \square

Proposizione 5.3 Sia f una funzione trasformabile secondo Laplace, nulla per $x < 0$, con ascissa di convergenza $\sigma[f]$. Allora:

$$\mathcal{L}[f(cx)](s) = \frac{1}{c} \mathcal{L}[f(x)]\left(\frac{s}{c}\right) \quad \text{per } c > 0, \quad \operatorname{Re}(s) > c\sigma[f] \quad (5.1)$$

$$\mathcal{L}[f(x - x_0)](s) = e^{-x_0 s} \mathcal{L}[f(x)](s) \quad \text{per } x_0 > 0, \quad \operatorname{Re}(s) > \sigma[f] \quad (5.2)$$

$$\mathcal{L}[e^{ax} f(x)](s) = \mathcal{L}[f(x)](s - a) \quad \text{per } a \in \mathbb{C}, \quad \operatorname{Re}(s) > \sigma[f] + \operatorname{Re}(a). \quad (5.3)$$

Dimostrazione La dimostrazione è del tutto analoga a quella delle corrispondenti proprietà enunciate nel paragrafo 4.2 nel caso delle trasformate di Fourier ed è quindi lasciata al lettore. \square

ESEMPIO 5.8 Nell'esempio 5.5 abbiamo calcolato la trasformata di Laplace delle funzioni trigonometriche. Questo risultato unito alla (5.3) ci permette di calcolare

$$\mathcal{L}[e^{ax} \sin(\omega x)](s) = \frac{\omega}{(s - a)^2 + \omega^2}, \quad \operatorname{Re}(s) > \operatorname{Re}(a)$$

$$\mathcal{L}[e^{ax} \cos(\omega x)](s) = \frac{s - a}{(s - a)^2 + \omega^2}, \quad \operatorname{Re}(s) > \operatorname{Re}(a).$$

Sempre come conseguenza della (5.3), per $\operatorname{Re}(s) > \sigma[f]$,

$$\mathcal{L}[f(x) \sin(\omega x)](s) = \mathcal{L}\left[f(x) \frac{e^{i\omega x} - e^{-i\omega x}}{2i}\right](s) = \frac{1}{2i} \left\{ \mathcal{L}[f](s - i\omega) - \mathcal{L}[f](s + i\omega) \right\},$$

$$\mathcal{L}[f(x) \cos(\omega x)](s) = \mathcal{L}\left[f(x) \frac{e^{i\omega x} + e^{-i\omega x}}{2}\right](s) = \frac{1}{2} \left\{ \mathcal{L}[f](s - i\omega) + \mathcal{L}[f](s + i\omega) \right\}.$$

Proposizione 5.4 Sia f un segnale periodico per $x \geq 0$ con periodo T , ovvero tale che $f(x + T) = f(x)$ per ogni $x \geq 0$. Supponiamo $f \in L^1(0, T)$. Per $\operatorname{Re}(s) > 0$, si ha

$$\mathcal{L}[f](s) = \frac{1}{1 - e^{-Ts}} \int_0^T e^{-sx} f(x) dx. \quad (5.4)$$

Dimostrazione

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f](s) &= \int_0^\infty e^{-sx} f(x) dx = \sum_{n=0}^\infty \int_{nT}^{(n+1)T} e^{-sx} f(x) dx = \\ &= \sum_{n=0}^\infty \left\{ \int_0^T e^{-sx - snT} f(x + nT) dx \right\} = \\ &= \sum_{n=0}^\infty e^{-snT} \left\{ \int_0^T e^{-sx} f(x) dx \right\} = \frac{1}{1 - e^{-Ts}} \int_0^T e^{-sx} f(x) dx, \end{aligned}$$

dove si è fatto uso della (5.2). \square

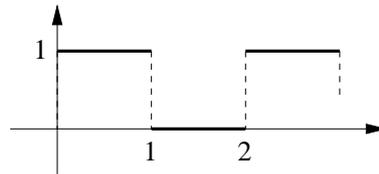
OSSERVAZIONE 5.3 Proponiamo anche una dimostrazione alternativa della proposizione 5.4. Osserviamo che

$$\begin{aligned} \int_0^T e^{-sx} f(x) dx &= \int_0^\infty e^{-sx} f(x) dx - \int_T^\infty e^{-sx} f(x) dx = \\ &= \int_0^\infty e^{-sx} f(x) dx - \int_0^\infty e^{-s(x+T)} f(x+T) dx = \\ &= (1 - e^{-sT}) \int_0^\infty e^{-sx} f(x) dx. \end{aligned}$$

Dividendo entrambi i membri per $1 - e^{-sT}$ segue subito la (5.4).

ESEMPIO 5.9 Calcoliamo la trasformata di Laplace dell'onda quadra:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } 2n \leq x \leq 2n+1, \quad n \in \mathbb{N} \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$



L'onda quadra $f(x)$ è un segnale periodico di periodo 2.

Utilizziamo la proposizione 5.4 per calcolarne la trasformata.

Figura 5.2

$$\int_0^2 f(x) e^{-sx} dx = \int_0^1 e^{-sx} dx = -\frac{e^{-sx}}{s} \Big|_0^1 = \frac{1 - e^{-s}}{s}.$$

Quindi,

$$\mathcal{L}[f](s) = \frac{1 - e^{-s}}{s} \frac{1}{1 - e^{-2s}} = \frac{1}{s(1 + e^{-s})}.$$

ESEMPIO 5.10 Calcoliamo la trasformata di Laplace del segnale periodico

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } 2n \leq x \leq 2n+1, \quad n \in \mathbb{N} \\ -1, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Anche in questo caso abbiamo a che fare con un segnale periodico di periodo 2.

Procedendo in maniera analoga all'esempio 5.9,

$$\begin{aligned} \int_0^2 f(x) e^{-sx} dx &= \int_0^1 e^{-sx} dx - \int_1^2 e^{-sx} dx = \\ &= \frac{1}{s} (e^{-2s} - 2e^{-s} + 1) = \frac{(1 - e^{-s})^2}{s}. \end{aligned}$$

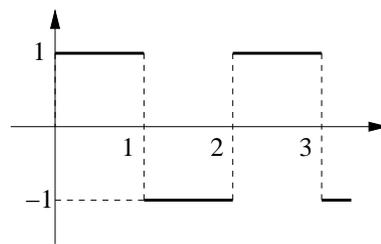


Figura 5.3

Di conseguenza,

$$\mathcal{L}[f](s) = \frac{(1 - e^{-s})^2}{1 - e^{-2s}} \frac{1}{s} = \frac{1}{s} \tanh\left(\frac{s}{2}\right).$$

5.3 Teoremi di derivazione, convoluzioni

Proposizione 5.5 Sia f trasformabile secondo Laplace con ascissa di convergenza $\sigma[f]$. Allora la funzione $F(s) = \mathcal{L}[f](s)$ è olomorfa nel semipiano $\operatorname{Re}(s) > \sigma[f]$. Inoltre, la funzione $g(x) = xf(x)$ è ancora trasformabile secondo Laplace, sempre con ascissa di convergenza $\sigma[f]$, e si ha:

$$\frac{d}{ds} \int_0^\infty e^{-sx} f(x) dx = \int_0^\infty e^{-sx} (-xf(x)) dx,$$

ovvero

$$F'(s) = \frac{d}{ds} \mathcal{L}[f](s) = \mathcal{L}[-xf(x)](s). \quad (5.5)$$

Dimostrazione Calcoliamo la derivata a primo membro come limite del rapporto incrementale:

$$\frac{\mathcal{L}[f](s+h) - \mathcal{L}[f](s)}{h} = \int_0^\infty \frac{e^{-hx} - 1}{h} e^{-sx} f(x) dx, \quad h \in \mathbb{C}. \quad (5.6)$$

Mediante una serie di calcoli, che per brevità omettiamo, possiamo maggiorare l'integranda con una funzione integrabile e non dipendente da h . Possiamo passare al limite sotto l'integrale nella (5.6). Di conseguenza,

- il limite del rapporto incrementale esiste ovvero la funzione $\mathcal{L}[f](s)$ è derivabile in senso complesso;
- l'integrale a secondo membro nella (5.6) converge per $\operatorname{Re}(s) > \sigma[f]$ cioè $g(s)$ è trasformabile ed ha la stessa ascissa di convergenza di f ;
- ricordando che $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{-hx} - 1}{h} = -x$ segue la (5.5). □

La proposizione 5.5 può essere generalizzata alle derivate di ordine superiore:

Corollario 5.1 Sia f trasformabile secondo Laplace con ascissa di convergenza $\sigma[f]$. Inoltre, la funzione $g(x) = x^n f(x)$ è ancora trasformabile secondo Laplace, sempre con ascissa di convergenza $\sigma[f]$, e si ha:

$$\frac{d^n}{ds^n} \int_0^\infty e^{-sx} f(x) dx = \int_0^\infty e^{-sx} (-1)^n x^n f(x) dx,$$

ovvero

$$F^{(n)}(s) = \frac{d^n}{ds^n} \mathcal{L}[f](s) = (-1)^n \mathcal{L}[x^n f(x)](s).$$

Dimostrazione È sufficiente applicare più volte la proposizione 5.5. □

Proposizione 5.6 Se la funzione $f(x)/x$ è trasformabile secondo Laplace, allora

$$\mathcal{L} \left[\frac{f(x)}{x} \right] (s) = \int_s^\infty \mathcal{L}[f](\tau) d\tau, \quad \operatorname{Re}(s) > \sigma[f]. \quad (5.7)$$

Prima di procedere con la dimostrazione vera e propria si rifletta sul significato dell'integrale che compare nella (5.7): si tratta di un integrale esteso ad un cammino nel piano complesso. Dalla proposizione 5.5 sappiamo che $\mathcal{L}[f](s)$ è olomorfa nel semipiano

di convergenza e ha limite zero all'infinito. L'integrale non dipende quindi dal particolare cammino scelto; ecco perché possiamo scrivere semplicemente \int_s^∞ .

Dimostrazione La funzione $g(x) = f(x)/x$ è trasformabile. Dalla proposizione 5.5 applicata a $g(x)$:

$$\mathcal{L}[xg(x)](s) = -\frac{d}{ds} \mathcal{L}[g](s),$$

cioè

$$\mathcal{L}\left[\frac{f}{x}\right](s) = c - \int_\lambda^s \mathcal{L}[f](t) dt \quad \text{per } \operatorname{Re}(\lambda) > \sigma[f].$$

Poiché $\frac{f(x)}{x}$ è trasformabile, $\lim_{|s| \rightarrow \infty} \mathcal{L}\left[\frac{f}{x}\right](s) = 0$ e quindi $\int_\lambda^\infty \mathcal{L}[f](t) dt = c$.

Di conseguenza

$$\mathcal{L}\left[\frac{f}{x}\right](s) = \int_\lambda^\infty \mathcal{L}[f](t) dt - \int_\lambda^s \mathcal{L}[f](t) dt = \int_s^\infty \mathcal{L}[f](t) dt.$$

□

Proposizione 5.7 *Sia f una funzione definita per $x > 0$ continua, di classe C^1 a tratti e trasformabile secondo Laplace. Allora $\forall s$, con $\operatorname{Re}(s) > \max\{\sigma[f], \sigma[f']\}$ si ha:*

$$\mathcal{L}[f'](s) = s \mathcal{L}[f](s) - f(0_+). \quad (5.8)$$

Dimostrazione Si ha che

$$e^{-sx} f'(x) = (e^{-sx} f(x))' + s e^{-sx} f(x).$$

Quindi,

$$\mathcal{L}[f'](s) = \int_0^\infty e^{-sx} f'(x) dx = [e^{-sx} f(x)]_0^\infty + s \int_0^\infty e^{-sx} f(x) dx. \quad (5.9)$$

Per $\operatorname{Re}(s) > \sigma[f]$, $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-sx} f(x) = 0$. Di conseguenza, $\mathcal{L}[f'](s) = s \mathcal{L}[f](s) - f(0_+)$.

Si osservi infine che per la convergenza dell'integrale a secondo membro della (5.9) dobbiamo richiedere che $\operatorname{Re}(s) > \sigma[f']$ e quindi la (5.8) ha senso soltanto per $\operatorname{Re}(s) > \max\{\sigma[f], \sigma[f']\}$. □

OSSERVAZIONE 5.4 La proposizione 5.7 può essere estesa alle derivate di ordine superiore al primo. Applicando due volte la proposizione 5.7 si dimostra ad esempio che

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f''](s) &= s \mathcal{L}[f'](s) - f'(0_+) = s(s \mathcal{L}[f](s) - f(0_+)) - f'(0_+) = \\ &= s^2 \mathcal{L}[f](s) - s f(0_+) - f'(0_+). \end{aligned}$$

Generalizzando,

$$\mathcal{L}[f^{(n)}](s) = s^n \mathcal{L}[f](s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-1-k} f^{(k)}(0_+).$$

Anche nel caso delle trasformate di Laplace vale un risultato sulla trasformata della convoluzione di due funzioni trasformabili del tutto analogo a quello della proposizione 4.9:

Proposizione 5.8 *Siano f e g due segnali trasformabili, con ascissa di convergenza $\sigma[f]$ e $\sigma[g]$ rispettivamente.*

*La funzione $f * g$ è trasformabile nel semipiano $\operatorname{Re}(s) > \max\{\sigma[f], \sigma[g]\}$ e si ha:*

$$\mathcal{L}[f * g](s) = \mathcal{L}[f](s) \cdot \mathcal{L}[g](s). \quad (5.10)$$

Dimostrazione Per dimostrare la (5.10) si procede in modo del tutto analogo a quello usato nella proposizione 4.9. Per quanto riguarda l'ascissa di convergenza di $f * g$, si verifica facilmente che

$$e^{-sx}(f * g)(x) = (e^{-sx}f(x)) * (e^{-sx}g(x)).$$

Se $\operatorname{Re}(s) > \max\{\sigma[f], \sigma[g]\}$ entrambe le funzioni a secondo membro sono integrabili. Inoltre la convoluzione di due funzioni L^1 è ancora una funzione L^1 , quindi $e^{-sx}(f * g)(x)$ è integrabile per $\operatorname{Re}(s) > \max\{\sigma[f], \sigma[g]\}$. Segue $\sigma[f * g] = \max\{\sigma[f], \sigma[g]\}$. \square

Corollario 5.2 *Sia $f(x)$ una funzione trasformabile secondo Laplace. Anche la funzione $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ è trasformabile secondo Laplace e si ha:*

$$\mathcal{L}[F](s) = \frac{\mathcal{L}[f](s)}{s}, \quad \operatorname{Re}(s) > \max\{\sigma[f], 0\}.$$

Dimostrazione Una volta osservato che $F(x) = (f * H)(x)$, dove H è la funzione di Heaviside (cfr. esempio 5.1), l'enunciato segue immediatamente dalla proposizione 5.8. \square

ESEMPIO 5.11 Le trasformate di Laplace delle funzioni trigonometriche possono essere dedotte l'una dall'altra utilizzando il corollario 5.2:

$$\sin(\omega x) = \omega \int_0^x \cos(\omega t) dt, \quad \text{quindi,} \quad \mathcal{L}[\sin(\omega x)](s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{\omega s}{s^2 + \omega^2} = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}.$$

Si faccia attenzione però che

$$\cos(\omega x) - \cos(0) = \omega \int_0^x -\sin(\omega t) dt, \quad \text{da cui} \quad \mathcal{L}[\cos(\omega x)](s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{-\omega^2}{s^2 + \omega^2} + \mathcal{L}[1](s),$$

da cui svolgendo i calcoli ritroviamo il risultato già ottenuto nell'esempio 5.5.

Sempre sfruttando il corollario 5.2 si possono dedurre l'una dall'altra le trasformate di Laplace delle funzioni iperboliche o le trasformate delle funzioni polinomiali. La verifica è lasciata per esercizio.

5.4 L'inversione della trasformata di Laplace

Come nel caso della trasformata di Fourier è interessante il problema dell'inversione della trasformata: data una funzione $g(s): \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ olomorfa per $\operatorname{Re}(s) > \sigma$ vogliamo determinare un segnale $f(x)$ tale che $\mathcal{L}[f] = g$.

Si osservi che non tutte le funzioni g olomorfe in un semipiano sono la trasformata di Laplace di una funzione. Ad esempio, $g(s) = 1$ pur essendo olomorfa su tutto \mathbb{C} non soddisfa la seconda ipotesi della proposizione 5.2 e quindi non può essere la trasformata di Laplace di una funzione. D'altra parte sappiamo (cfr. esempio 5.4) che g è la trasformata della delta di Dirac che non è una funzione ma una distribuzione. Perché una funzione olomorfa $g(s)$ sia la trasformata di Laplace di una funzione è necessario che $|g(s)|$ tenda a zero abbastanza velocemente per $|s| \rightarrow \infty$.

Teorema 5.2 Sia $g(s)$ una funzione analitica nel semipiano complesso $\operatorname{Re}(s) > \sigma$ e tale che $|g(s)| = O(1/s^k)$ per $|s| \rightarrow \infty$, con $k > 1$. Allora, per ogni $t > \sigma$ la funzione f definita da

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{t-i\infty}^{t+i\infty} e^{sx} g(s) ds \quad (5.11)$$

è un segnale continuo su \mathbb{R} indipendente da t tale che $\mathcal{L}[f(x)](s) = g(s)$. La (5.11) prende il nome di formula di Riemann-Fourier.

Traccia della dimostrazione La condizione di decrescenza rapida all'infinito ci assicura la convergenza dell'integrale (5.11). L'integrale di $e^{sx}g(s)$ sul cammino in figura 5.4 è nullo dato che l'integranda è olomorfa per $\operatorname{Re}(s) > \sigma$. Per la condizione di decrescenza all'infinito l'integrale sui tratti orizzontali tende a zero per $R \rightarrow \infty$, quindi

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{t-i\infty}^{t+i\infty} e^{sx} g(s) ds = \frac{1}{2\pi i} \int_{t_1-i\infty}^{t_1+i\infty} e^{sx} g(s) ds.$$

Utilizzando il teorema dei residui (teorema 1.7) si verifica facilmente che la (5.11) definisce una funzione $f(x)$ nulla per $x < 0$. La dimostrazione si completa verificando per via diretta che la trasformata di Laplace di $f(x)$ è effettivamente $g(s)$. \square

OSSERVAZIONE 5.5 Se partiamo dall'ipotesi che esista una f trasformabile secondo Laplace tale che $g(s) = \mathcal{L}[f(x)](s)$ con $f(x)$ continua, il problema di determinare f può essere risolto utilizzando il teorema 5.1 e la formula di inversione per la trasformata di Fourier,

$$\mathcal{F}[e^{-xt}f(x)](y) = \mathcal{L}[f](t+iy) \quad \text{e quindi} \quad e^{-xt}f(x) = \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{L}[f](t+iy)].$$

Sia $s = t + iy$ tale che $t = \operatorname{Re}(s) > \sigma$. Allora

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{xt} [e^{-xt}f(x)] = e^{xt} \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{L}[f](t+iy)] = \\ &= e^{xt} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iyx} g(t+iy) dy = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(t+iy)x} g(t+iy) dy \end{aligned}$$

L'ultimo integrale può essere interpretato come l'integrale complesso sul cammino $y \mapsto t + iy$ per $y \in \mathbb{R}$ che ha come supporto una retta verticale passante per il punto $(t, 0)$. Vale quindi la formula (5.11).

OSSERVAZIONE 5.6 Se f è un segnale soltanto regolare a tratti, con trasformata $g(s)$ ed ascissa di convergenza $\sigma[f]$, si può dimostrare che per ogni $t > \sigma[f]$ si ha:

$$\frac{1}{2\pi i} \text{v.p.} \int_{t-i\infty}^{t+i\infty} e^{sx} g(s) ds = \frac{1}{2} (f(x+0) + f(x-0)).$$

In questo caso $g(s) = O(1/s)$ per $|s| \rightarrow \infty$ (si pensi ad esempio alle funzioni di dell'esempio 5.3).

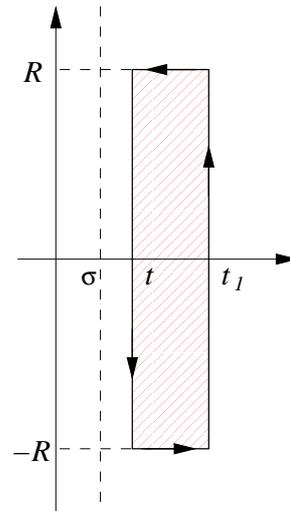


Figura 5.4

5.4.1 Inversione nel caso delle funzioni razionali fratte

Nel caso in cui la trasformata $g(s)$ sia una funzione razionale fratta non è necessario ricorrere alla formula 5.11 per antirasformare. Supponiamo

$$g(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = T(s) + \frac{R(s)}{Q(s)}$$

dove $P(s)$, $Q(s)$, $R(s)$, $T(s)$ sono polinomi e $R(s)$ ha grado minore di quello di $Q(s)$. Supponiamo inoltre che $R(s)$ e $Q(s)$ non abbiano zeri in comune. Osserviamo innanzitutto che se $T(s) \neq 0$ viene a mancare la condizione di decrescenza all'infinito. L'antitrasformata di $g(s)$ in questo caso non è una funzione ma una distribuzione. Ci limiteremo al caso $T(s) = 0$ ovvero al caso in cui la funzione razionale sia propria.

Dalla teoria sull'integrazione delle funzioni razionali fratte sappiamo che $R(s)/Q(s)$ può essere scomposta in fratti semplici. Nel caso in cui gli zeri s_1, s_2, \dots, s_k di $Q(s)$ siano tutti semplici possiamo scrivere

$$\frac{R(s)}{Q(s)} = \sum_{i=1}^k \frac{A_i}{s - s_i} \quad \text{dove} \quad A_i = \lim_{s \rightarrow s_i} (s - s_i) \frac{R(s)}{Q(s)} = \lim_{s \rightarrow s_i} \frac{R(s)}{Q'(s)}.$$

Ricordando l'esempio 5.2, segue immediatamente che $\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{R(s)}{Q(s)} \right] (x) = \sum_{i=1}^k A_i e^{s_i x}$. Nel caso in cui sia presente uno zero s_0 di molteplicità $n > 1$, ad esso, nello sviluppo in fratti semplici, corrisponderanno n termini del tipo $\frac{B_i}{(s - s_0)^i}$ per $i = 1, \dots, n$ con B_i costanti opportune. Utilizzando il risultato dell'esempio 5.7 e la (5.1),

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{B_i}{(s - s_0)^i} \right] = \frac{B_i}{(i-1)!} e^{s_0 x} x^{i-1}.$$

ESEMPIO 5.12 Calcoliamo l'antitrasformata $f(x)$ di $g(s) = \frac{1}{s(s-1)}$. La frazione è propria, quindi $f(x)$ è una funzione. Il denominatore si annulla per $s = 0$ ed $s = 1$, entrambi zeri semplici. Decomponendo in fratti semplici,

$$g(s) = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s}, \quad \text{da cui} \quad f(x) = \mathcal{L}^{-1}[g] = H(x)e^x - H(x) = H(x)(e^x - 1).$$

ESEMPIO 5.13 Calcoliamo l'antitrasformata di $g(s) = \frac{s+2}{s^3 - s^2}$.

Per prima cosa scriviamo $g(s)$ come somma di fratti semplici: il denominatore ha uno zero semplice $s_1 = 1$ ed uno doppio $s_2 = 0$. Determiniamo A_1 , B_1 e B_2 costanti tali che

$$\frac{s+2}{s^2(s-1)} = \frac{A_1}{s-1} + \frac{B_1}{s} + \frac{B_2}{s^2}.$$

Dai calcoli,

$$A_1 = \lim_{s \rightarrow 1} \frac{s+2}{\frac{d}{ds}(s^3 - s^2)} = 3, \quad B_2 = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 g(s) = -2,$$

$$B_1 = \lim_{s \rightarrow 0} s \left(g(s) - \frac{B_2}{s^2} \right) = 1.$$

Quindi, $g(s) = \frac{3}{s-1} - \frac{2}{s^2} + \frac{1}{s}$ e la sua antitrasformata è $\mathcal{L}^{-1}[g](x) = (3e^x - x + 1)H(x)$.

5.5 Applicazioni a equazioni differenziali ed integrali

5.5.1 Equazioni ordinarie a coefficienti costanti

Ci occuperemo dell'utilizzo della trasformata di Laplace per la soluzione di problemi di Cauchy per equazioni ordinarie a coefficienti costanti. I segnali trasformabili sono definiti per valori positivi, parleremo quindi di problemi di Cauchy in avanti intendendo la soluzione definita soltanto per valori di t non negativi.

Per fissare le idee consideriamo il generico problema di Cauchy per equazioni del secondo ordine:

$$\begin{cases} y'' + ay' + by = f(x) \\ y(0) = y_0, \quad y'(0) = y_1 \end{cases} \quad (5.12)$$

Supponiamo che il segnale $f(x)$ sia trasformabile e passiamo alla trasformata di Laplace di entrambi i membri dell'equazione (5.12). Sia $\widehat{y}(s)$ la trasformata di $y(x)$.

Dalla proposizione 5.7,

$$(s^2\widehat{y}(s) - sy_0 - y_1) + a(s\widehat{y}(s) - y_0) + b\widehat{y}(s) = \widehat{f}(s)$$

cioè

$$\widehat{y}(s) = \frac{\widehat{f}(s) + sy_0 + y_1 + ay_0}{s^2 + as + b}. \quad (5.13)$$

Il problema è ricondotto a determinare l'antitrasformata della (5.13). Nel caso in cui $\widehat{f}(s)$ sia una funzione razionale fratta si possono applicare le tecniche del paragrafo 5.4.1.

ESEMPIO 5.14 Consideriamo, per $x > 0$, il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' - 4y' + 3y = 1 \\ y(0) = 2, \quad y'(0) = -1 \end{cases}.$$

Passando alle trasformate,

$$s^2\widehat{y}(s) - 2s + 1 - 4(s\widehat{y}(s) - 2) + 3\widehat{y}(s) = \frac{1}{s},$$

Semplificando e scomponendo in fratti semplici,

$$\widehat{y}(s) = \frac{2s^2 - 9s - 1}{s(s^2 - 4s + 3)} = -\frac{1/3}{s} + \frac{4}{s-1} - \frac{5/3}{s-3}.$$

La soluzione del problema di Cauchy è allora

$$y(x) = \mathcal{L}^{-1}[\widehat{y}(s)](x) = -\frac{1}{3} + 4e^x - \frac{5}{3}e^{3x}, \quad x > 0.$$

ESEMPIO 5.15 Consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + 4y = \sin(x) \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 1 \end{cases}.$$

Passando alle trasformate,

$$s^2\widehat{y}(s) - s - 1 + 4\widehat{y}(s) = \frac{1}{s^2 + 1} \quad \text{e} \quad \widehat{y}(s) = \frac{s^3 + s^2 + s + 2}{(s^2 + 1)(s^2 + 4)}.$$

Il denominatore ha quattro zeri semplici. Potremo procedere come nell'esempio precedente scomponendo nella somma di quattro fratti semplici.

La presenza di coppie di zeri complessi coniugati offre però una possibile alternativa. Sappiamo calcolare elementarmente l'antitrasformata di frazioni del tipo

$$g(s) = \frac{a(s - s_0) + b}{(s - s_0)^2 + c^2}, \quad a, b, c, s_0 \in \mathbb{R}, \quad c \neq 0.$$

Ricordando le trasformate di Laplace delle funzioni trigonometriche (cfr. esempi 5.5 e 5.8),

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}[g(s)] &= \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{b}{c} \frac{c}{(s - s_0)^2 + c^2} + a \frac{s - s_0}{(s - s_0)^2 + c^2} \right] = \\ &= \left(\frac{b}{c} \sin(cx) + a \cos(cx) \right) e^{s_0 x}. \end{aligned}$$

In generale, nel caso di una coppia di zeri semplici complessi coniugati $s = s_0 \pm i$, due fratti semplici relativi a tali zeri possono essere sostituiti nella decomposizione da una frazione del tipo di $g(s)$ con a e b costanti reali opportune determinabili con le stesse tecniche usate per l'integrazione delle funzioni razionali. Nel nostro caso $s_0 = 0$; facendo i calcoli,

$$\hat{y}(s) = \frac{s^3 + s^2 + s + 2}{(s^2 + 1)(s^2 + 4)} = \frac{s + 2/3}{s^2 + 4} + \frac{1/3}{s^2 + 1}.$$

In base alle considerazioni precedenti infine

$$y(x) = \frac{1}{3} \sin(2x) + \cos(2x) + \frac{1}{3} \sin(x).$$

ESEMPIO 5.16 Funzione di trasferimento di un circuito

Per studiare un circuito RCL solitamente si studia un'equazione differenziale in cui l'incognita è la carica q del condensatore. Se R , C ed L sono rispettivamente i valori di resistenza, capacità e induttanza e $V(t)$ rappresenta la f.e.m., eventualmente variabile con il tempo, giungiamo ad una equazione differenziale del secondo ordine a coefficienti costanti

$$Lq''(t) + Rq'(t) + \frac{1}{C}q(t) = V(t). \quad (5.14)$$

Nello studio dei circuiti RCL non ha grande interesse lo studio del *transitorio* cioè del comportamento per tempi piccoli. Interessa invece il comportamento *a regime*, per tempi grandi. Letta in termini matematici, questa affermazione significa che non hanno grande interesse le condizioni iniziali del problema di Cauchy per la (5.14). Per semplicità possiamo supporre $q(0) = q'(0) = 0$. Se $\hat{q} = \mathcal{L}[q]$, procedendo come negli esempi precedenti,

$$\hat{q}(s) = \frac{\hat{V}(s)}{Ls^2 + Rs + \frac{1}{C}}, \quad \text{dove } \hat{V}(s) = \mathcal{L}[V](s).$$

Si osservi che al variare del termine noto \hat{V} il denominatore non cambia. La funzione

$$T(s) = \frac{1}{Ls^2 + Rs + \frac{1}{C}}$$

è quindi una caratteristica intrinseca del circuito e prende il nome di **funzione di trasferimento** del circuito. La funzione di trasferimento è la risposta del circuito quando

$\widehat{V}(s) = 1$, ovvero quando $V(t)$ è la *delta* di Dirac. Una volta nota $T(s)$ siamo in grado di ricavare il comportamento del circuito relativamente a tutte le $V(t)$ trasformabili secondo Laplace; se q è la soluzione della (5.14) con condizioni iniziali nulle,

$$\widehat{q}(s) = T(s)\widehat{V}(s) \quad \text{e quindi} \quad q(t) = (\mathcal{L}^{-1}[T] * V)(t).$$

5.5.2 Equazioni integro-differenziali di tipo convolutorio

Le equazioni integrali di tipo convolutorio sono equazioni del tipo $K * u = f$ dove K ed f sono funzioni trasformabili assegnate mentre u è l'incognita. K è detta **nucleo di convoluzione**. Esplicitando il significato della convoluzione, l'equazione assume la forma

$$\int_0^t K(t-\tau)u(\tau) d\tau = f(t), \quad t > 0. \quad (5.15)$$

Passando alle trasformate di Laplace, l'equazione (5.15) assume la forma

$$\mathcal{L}[K] \cdot \mathcal{L}[u] = \mathcal{L}[f], \quad \text{da cui} \quad u(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{\mathcal{L}[f]}{\mathcal{L}[K]} \right] (t).$$

La soluzione della (5.15) si riduce in pratica al calcolo di una antitrasformata.

Non c'è nessun motivo a priori per cui $\mathcal{L}[f]/\mathcal{L}[K]$ debba essere la trasformata di Laplace di una funzione. Ad esempio, se $K(t) = H(t-1)$ ed $f(t) = H(t)$ abbiamo $\mathcal{L}[u](s) = e^s$. Viene a mancare la condizione di decrescenza rapida richiesta nel teorema 5.2; quindi u non è una funzione. In questo caso diciamo che l'equazione 5.15 non ammette nessuna soluzione trasformabile.

ESEMPIO 5.17 Risolviamo l'equazione

$$\int_0^t e^{t-\tau} u(\tau) d\tau = t^2, \quad t > 0.$$

In questo caso, $K(t) = e^t$ e $f(t) = t^2$. Passando alle trasformate, $\mathcal{L}[K](s) = \frac{1}{s-1}$, $\mathcal{L}[f](s) = \frac{2}{s^3}$; di conseguenza, $\mathcal{L}[u](s) = 2\frac{s-1}{s^3}$. L'antitrasformata può essere calcolata con le tecniche del paragrafo 5.4.1: determinando A_1, A_2, A_3 , reali, tali che

$$\widehat{u}(s) = 2\frac{s-1}{s^3} = \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{s^2} + \frac{A_3}{s^3}.$$

Data la particolare forma di $\widehat{u}(s)$ è però evidente, senza necessità di ulteriori calcoli che

$$A_1 = 0, \quad A_2 = 2, \quad A_3 = -2.$$

Quindi

$$u(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^3} \right] (t) = 2t - t^2.$$

Il metodo descritto può essere esteso ad equazioni, sempre in forma di convoluzione, riconducibili al tipo (5.15) dopo aver utilizzato opportune proprietà della trasformata di Laplace.

ESEMPIO 5.18 Risolviamo il problema

$$\begin{cases} \int_0^t (t-\tau)(u'(\tau) - 2u(\tau)) d\tau = t & , \quad t > 0. \\ u(0) = 1 \end{cases} \quad (5.16)$$

Osserviamo innanzitutto che $\mathcal{L}[u'(t) - 2u(t)] = (s-2)\hat{u} - u(0)$. Senza la condizione iniziale $u(0) = 1$ saremo in grado solo di scrivere la soluzione generale del problema, similmente a quanto avviene per le equazioni differenziali del primo ordine.

A questo punto possiamo procedere come nell'esempio 5.17:

$$\mathcal{L}[t](s) \cdot ((s-2)\hat{u}(s) - 1) = \mathcal{L}[t](s), \quad \text{cioè} \quad \hat{u}(s) = \frac{2}{s-2}.$$

La soluzione del problema (5.16) è $u(t) = 2e^{2t}$.

5.6 Tavole riassuntive

$\mathcal{L}[f(cx)](s) = \frac{1}{c} \mathcal{L}[f(x)]\left(\frac{s}{c}\right)$	$c > 0, \operatorname{Re}(s) > c\sigma[f]$
$\mathcal{L}[c_1 f_1 + c_2 f_2](s) = c_1 \mathcal{L}[f_1](s) + c_2 \mathcal{L}[f_2](s)$	$\operatorname{Re}(s) > \max\{\sigma[f_1], \sigma[f_2]\}$
$\mathcal{L}[f(x - x_0)](s) = e^{-x_0 s} \mathcal{L}[f](s)$	$x_0 > 0, \operatorname{Re}(s) > \sigma[f]$
$\mathcal{L}[e^{ax} f(x)](s) = \mathcal{L}[f(x)](s - a)$	$a \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(s) > \sigma[f] + \operatorname{Re}(a)$
$\mathcal{L}[x^n f(x)](s) = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} \mathcal{L}[f](s)$	$n \in \mathbb{N}, \operatorname{Re}(s) > \sigma[f]$
$\mathcal{L}\left[\frac{f(x)}{x}\right](s) = \int_s^\infty \mathcal{L}[f](\tau) d\tau$	$\operatorname{Re}(s) > \sigma[f]$
$\mathcal{L}[f'(x)](s) = s \mathcal{L}[f](s) - f(0^+)$	$\operatorname{Re}(s) > \max\{\sigma[f], \sigma[f']\}$
$\mathcal{L}[f''(x)](s) = s^2 \mathcal{L}[f](s) - sf(0^+) - f'(0^+)$	$\operatorname{Re}(s) > \max\{\sigma[f], \sigma[f'']\}$
$\mathcal{L}[(f_1 * f_2)(x)](s) = \mathcal{L}[f_1](s) \mathcal{L}[f_2](s)$	$\operatorname{Re}(s) > \max\{\sigma[f_1], \sigma[f_2]\}$
$\mathcal{L}\left[\int_0^x f(t) dt\right](s) = \frac{\mathcal{L}[f](s)}{s}$	$\operatorname{Re}(s) > \max\{\sigma[f], 0\}$
$\mathcal{L}[f](s) = \frac{1}{1 - e^{-Ts}} \int_0^T e^{-sx} f(x) dx$	f periodica di periodo $T, \operatorname{Re}(s) > 0$

Tabella 5.1: Principali proprietà della trasformata di Laplace

$u(x)$	$\mathcal{L}[u](s)$	$\sigma(u)$	$u(x)$	$\mathcal{L}[u](s)$	$\sigma(u)$
$H(x)$	$1/s$	0	$\sin \omega x, \omega \in \mathbb{R}$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$	0
$x^n H(x), n \in \mathbb{N}$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	0	$\cos \omega x, \omega \in \mathbb{R}$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$	0
$e^{\omega x}, \omega \in \mathbb{C}$	$\frac{1}{s - \omega}$	ω	$\sinh \omega x, \omega \in \mathbb{R}$	$\frac{\omega}{s^2 - \omega^2}$	$ \omega $
$\delta(x)$	1	$-\infty$	$\cosh \omega x, \omega \in \mathbb{R}$	$\frac{s}{s^2 - \omega^2}$	$ \omega $

Tabella 5.2: Trasformata di Laplace di alcune funzioni elementari

6.1 Distribuzioni

Riprendiamo la funzione dell'esempio 5.3 di pagina 84. Normalizziamo in modo da avere impulsi di area unitaria qualunque sia il valore di $h > 0$: poniamo

$$f_h(x) = \frac{1}{h} \chi_{[0,h)}(x). \quad (6.1)$$

Consideriamo le trasformate di Laplace delle funzioni f_h ,

$$\mathcal{L}[f_h(x)](s) = \begin{cases} \frac{1 - e^{-hs}}{hs}, & s \neq 0 \\ 1, & s = 0 \end{cases}. \quad (6.2)$$

Se passiamo al limite sulle trasformate, $\lim_{h \rightarrow 0} \mathcal{L}[f_h](s) \equiv 1$. Viene da chiedersi se esista o meno una funzione f di cui 1 sia la trasformata di Laplace e se questa sia effettivamente la trasformata del $\lim_{h \rightarrow 0} f_h(x)$.

La risposta alla prima domanda è negativa: abbiamo visto nella proposizione 5.2 che le trasformate di Laplace di funzioni hanno tutte limite zero quando $\text{Re}(s) \rightarrow \infty$ ed è evidente che questa condizione non è soddisfatta dalla funzione che vale identicamente 1.

Indichiamo con

$$\delta(x) = \lim_{h \rightarrow 0} f_h(x) \quad (6.3)$$

Calcolato puntualmente, il limite nella 6.3 vale 0 per tutti gli $x \neq 0$ e $+\infty$ per $x = 0$. Dal punto di vista di $L^1(\mathbb{R})$ la delta coincide dunque con la funzione identicamente nulla; ci aspetteremo allora che la sua trasformata di Laplace sia la funzione nulla.

Se vogliamo comunque identificare un oggetto a cui poter associare 1 come trasformata di Laplace dobbiamo in un certo senso cambiare filosofia e introdurre oggetti, le **distribuzioni**, più generali delle funzioni. Una descrizione rigorosa ed organica delle distribuzioni richiederebbe maggior spazio e l'introduzione di nozioni che esulano dal tipo di trattazione che si intende fare. Per essa si rimanda dunque ad altri testi quali ad esempio [Bar01] oppure [Gil94]. e distribuzioni saranno utilizzate soltanto come comodo strumento di calcolo. Per i nostri scopi è sufficiente pensare ad una distribuzione come ad un oggetto del quale non siamo in grado di calcolare direttamente i valori ma che sappiamo valutare solo in maniera indiretta valutando il suo effetto sulle funzioni $C_0^\infty(\mathbb{R})$ (funzioni $C^\infty(\mathbb{R})$ a supporto compatto):

DEFINIZIONE 6.1 Si dice **distribuzione** un funzionale lineare \mathcal{J} continuo su $C_0^\infty(\mathbb{R})$, ovvero tale che se φ_k è una successione in $C_0^\infty(\mathbb{R})$ e

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k = \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}) \quad \text{si ha} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{J}\varphi_k = \mathcal{J}\varphi.$$

Indicheremo con $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ lo spazio delle distribuzioni.

Le funzioni di $C_0^\infty(\mathbb{R})$ sono utilizzate per osservare, per testare, i valori assunti da una distribuzione. In alcuni testi ci si riferisce ad esse indicandole come **funzioni test** e indicando $C_0^\infty(\mathbb{R})$ come spazio delle funzioni test. Per i funzionali lineari continui vale il seguente

Teorema 6.1 (di rappresentazione di Riesz)¹ Sia \mathcal{J} un funzionale lineare continuo definito su $C_0^\infty(\mathbb{R})$, allora esiste un'unica distribuzione u tale che

$$\mathcal{J}[\varphi] = \int_{\mathbb{R}} u\varphi dx.$$

Utilizzeremo spesso la notazione

$$\langle u, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} u(x) \cdot \varphi(x) dx.$$

per indicare il funzionale \mathcal{J} valutato su φ . La simbologia utilizzata può far pensare che si tratti di un prodotto scalare. Non è così: u e φ non sono elementi di uno stesso spazio di Hilbert.

ESEMPIO 6.1 Consideriamo la distribuzione u tale che per ogni $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$

$$\langle u, \varphi \rangle = \int_0^{\infty} \varphi(x) dx.$$

È facile rendersi conto che u è anche una funzione e coincide con la funzione di Heaviside.

DEFINIZIONE 6.2 Una funzione $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ si dice **localmente integrabile**, e si scrive $u \in L_{loc}^1$, se per ogni compatto K di \mathbb{R} ,

$$\int_K |u(x)| dx < \infty.$$

Una funzione localmente integrabile è anche una distribuzione ma non tutte le distribuzioni sono funzioni localmente integrabili (vedi esempio 6.2).

Le distribuzioni su \mathbb{R} formano uno spazio vettoriale che di solito si indica con $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ ed è uno spazio completo:

Teorema 6.2 (di completezza) Sia $\{u_k\}$ una successione di distribuzioni tale che il limite $\lim_{k \rightarrow \infty} \langle u_k, v \rangle$ esista finito per ogni $v \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Allora esiste una distribuzione u alla quale la successione u_k converge nel senso delle distribuzioni, ovvero una distribuzione u tale che

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \langle u_k, v \rangle = \langle u, v \rangle \quad \text{per ogni } v \in C_0^\infty(\mathbb{R}).$$

¹Il teorema di rappresentazione può essere enunciato in maniera molto più generale non limitandosi ai funzionali di $C_0^\infty(\mathbb{R})$. Per l'enunciato nel caso generale e per la dimostrazione del teorema si veda ad esempio – VERIFICARE –. Sul Rudin Real and complex non c'è!

ESERCIZIO 6.1 Procedendo in maniera analoga a quanto fatto nell'esempio 6.1 mostrare che le funzioni $f_h(x)$ definite dalla (6.1) sono distribuzioni.

ESEMPIO 6.2 La "delta" di Dirac. In base al teorema 6.2, il limite (6.3) ha significato se letto nel senso delle distribuzioni. Questo significa che, per la completezza, la δ è una distribuzione.

Valutiamola sulle funzioni test. Sia $v \in C_0^\infty$,

$$\begin{aligned} \langle \delta(x), v(x) \rangle &= \lim_{h \rightarrow \infty} \left\langle \frac{1}{h} \chi_{[0,h]}(x), v(x) \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{h} \chi_{[0,h]}(x) v(x) dx = \\ &= \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{1}{h} \int_0^h v(x) dx = \lim_{h \rightarrow \infty} v(x_h) = v(0), \end{aligned}$$

dove si è utilizzato il teorema del valor medio e $x_h \in [0, h]$ è tale che $h v(x_h) = \int_0^h v(x) dx$.

ESERCIZIO 6.2 Mostrare che $\alpha(x)$ tale che $\langle \alpha(x), f(x) \rangle = f(x_0)$ è una distribuzione. Si utilizzi il teorema 6.2.

ESERCIZIO 6.3 Quello che è stato utilizzato all'inizio del paragrafo non è l'unico modo di definire la δ . La definizione può essere data a partire da una qualunque successione di funzioni $f_n(x) = n f(nx)$ con $f(x)$ localmente integrabili e tale che $\|f(x)\|_{L^1(\mathbb{R})} = 1$. Se, ad esempio, scegliamo come $f(x)$ le funzioni

$$a(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \cos(x), & x \in [-\pi/2, \pi/2] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \quad \text{oppure} \quad b(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & x \in [-1, 1] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases},$$

otteniamo le successioni

$$a_n(x) = \begin{cases} \frac{n}{2} \cos(nx) & \text{per } x \in \left[-\frac{\pi}{2n}, \frac{\pi}{2n}\right], \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}, \quad b_n(x) = \begin{cases} n - n^2|x| & \text{per } |x| < 1/n \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}.$$

Verificare che il limite nel senso delle distribuzioni delle successioni $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ è ancora la delta di Dirac.

ESERCIZIO 6.4 Calcolare la trasformata di Fourier della delta di Dirac.

DEFINIZIONE 6.3 Siano f_k funzioni trasformabili secondo Fourier tali che la successione f_k ha come limite la distribuzione u . Definiamo trasformata di Fourier della distribuzione u la distribuzione

$$\hat{u} = \lim_{k \rightarrow \infty} \hat{f}_k.$$

In maniera analoga è possibile definire la trasformata di Laplace di una distribuzione.

ESERCIZIO 6.5 Verificare, utilizzando la definizione 6.3, che la trasformata di Fourier di $\alpha(x) = \delta(x - x_0)$, $x_0 \in \mathbb{R}$ è $\hat{\alpha}(x) = e^{ix_0\xi}$.

Quanto detto fin'ora fa pensare che le proprietà delle trasformate di Fourier e di Laplace continuino a valere anche quando si parla di distribuzioni. Questo è vero soltanto in parte: valgono ancora le proprietà di riscalamento, ritardo, modulazione e convoluzione e di derivazione della trasformata. Un discorso a parte va fatto per le estensioni alle distribuzioni delle proposizioni 4.7 e 5.7 in cui compaiono le derivate della funzione da trasformare.

6.2 Derivate deboli

Nell'osservazione 4.1 a pagina 71 è stata calcolata la trasformata di Fourier della funzione $f(x) = \chi_{[-1,1]}(x)$. Abbiamo visto che

$$\mathcal{F}[\chi_{[-1,1]}](\xi) = \begin{cases} \frac{2 \sin(\xi)}{\xi}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

Ovvero, per $x \neq 0$,

$$\hat{f}(\xi) = \frac{2}{\xi} \left(\frac{e^{i\xi} - e^{-i\xi}}{2i} \right) = \frac{1}{i\xi} (e^{i\xi} - e^{-i\xi}). \quad (6.4)$$

In base all'esercizio 6.5 e alla linearità della trasformata di Fourier,

$$\mathcal{F}[\delta(x-1) - \delta(x+1)](\xi) = e^{i\xi} - e^{-i\xi} = i\xi \mathcal{F}[\chi_{[-1,1]}](\xi).$$

Se fosse possibile applicare la proposizione 4.7 potremo concludere che

$$\delta(x-1) - \delta(x+1) = \frac{d}{dx} \chi_{[-1,1]}(x). \quad (6.5)$$

La funzione a secondo membro però non solo non è derivabile, ma non è neppure continua! L'apparente consistenza dell'uguaglianza 6.5 ha spinto all'introduzione di un "surrogato" del concetto di derivata applicabile alle distribuzioni e che generalizzi il concetto classico di derivata (cioè che per le distribuzioni che sono anche funzioni coincida con la derivata in senso classico) e allo sviluppo della teoria relativa.

Una delle possibili strade da seguire per estendere il concetto di derivata è partire dalla formula di integrazione per parti. Sia $\varphi(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$; se la funzione u è derivabile vale l'uguaglianza

$$\int_{\mathbb{R}} u' \varphi dx = (u\varphi) \Big|_{x \rightarrow -\infty}^{x \rightarrow \infty} - \int_{\mathbb{R}} u \varphi' dx,$$

ovvero, tenendo conto che φ è a supporto compatto,

$$\int_{\mathbb{R}} u' \varphi dx = - \int_{\mathbb{R}} u \varphi' dx, \quad (6.6)$$

Il secondo membro della 6.6 è un funzionale lineare continuo. In base al teorema di Riesz esiste una distribuzione v tale che

$$\int_{\mathbb{R}} v \varphi dx = - \int_{\mathbb{R}} u \varphi' dx \quad \text{per ogni } \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}).$$

Inoltre, se u è derivabile, per la 6.6 v è proprio la derivata della u . Possiamo finalmente estendere il concetto di derivata alle distribuzioni:

DEFINIZIONE 6.4 Sia u una distribuzione. Definiamo **derivata in senso debole** o **derivata nel senso delle distribuzioni** di u la distribuzione v tale che

$$\langle v, \varphi \rangle = - \langle u, \varphi' \rangle \quad \text{per ogni } \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}).$$

Alle derivate in senso debole si possono estendere le principali proprietà delle derivate classiche (linearità, prodotto, ecc. ecc.)

ESEMPIO 6.3 Calcoliamo la derivata in senso debole della funzione di Heaviside. In base alla definizione 6.4 si tratta di determinare una distribuzione v tale che $\langle v, \varphi \rangle = - \langle H, \varphi' \rangle$. La funzione φ è a supporto compatto. Sia, M tale che $|\varphi(x)| = 0$ per $|x| > M$. Si ha:

$$\langle H, \varphi' \rangle = \int_{\mathbb{R}} H(x) \varphi'(x) dx = \int_0^M \varphi'(x) dx = \varphi(0).$$

La derivata debole della $H(x)$ è quindi la distribuzione v tale che $\langle v, \varphi \rangle = \varphi(0)$. Abbiamo già incontrato una tale distribuzione nell'esempio 6.2: si tratta della delta di Dirac. Quindi, in senso debole,

$$\frac{d}{dx} H(x) = \delta(x).$$

ESEMPIO 6.4 Per calcolare la derivata in senso debole di $\chi_{[-1,1]}(x)$ è sufficiente tenere presente l'esempio 6.3 e tenere conto delle proprietà di linearità della derivazione:

$$\frac{d}{dx} \chi_{[-1,1]}(x) = \frac{d}{dx} H(x) - \frac{d}{dx} H(x+1) = \delta(x-1) - \delta(x+1).$$

La formula 6.5 ha dunque senso interpretando le derivate in senso debole.

6.3 Trasformate di Fourier e di Laplace delle distribuzioni

Nel capitolo 4 (crf. teorema 4.1) è stata dimostrata la formula di inversione per le trasformate di Fourier. Tale formula suggerirebbe di definire l'operatore

$$\mathcal{F}^{-1}[u(\xi)](x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi} u(\xi) d\xi \quad (6.7)$$

e di riferirsi ad esso come inverso dell'operatore \mathcal{F} di trasformazione. Questo non è possibile (ed infatti nel capitolo 4 abbiamo evitato di riferirci ad esso come tale) perché l'uguaglianza $\mathcal{F}^{-1} \mathcal{F} u = u$ non vale per tutte le funzioni $L^1(\mathbb{R})$ (cfr. enunciato del teorema 4.1) ma solo per una classe particolare.

Se vogliamo che l'operatore definito dalla 6.7 sia effettivamente l'inverso di \mathcal{F} dobbiamo individuare una coppia di spazi tali che uno sia esattamente l'immagine dell'altro mediante l'operatore \mathcal{F} oppure introdurre delle classi funzionali più adatte al nostro scopo in cui valgano contemporaneamente una proprietà e la sua duale. Una tale generalizzazione è possibile e si realizza passando dalle funzioni sommabili alle distribuzioni. Per le trasformate delle funzioni $L^1(\mathbb{R})$ vale la proprietà seguente:

Lemma 6.1 Siano $u, v \in L^1(\mathbb{R})$, allora vale la formula

$$\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{uv} dx = \int_{-\infty}^{\infty} u \widehat{v} dx. \quad (6.8)$$

Dimostrazione È sufficiente osservare che \hat{u} e \hat{v} appartengono a $L^\infty(\mathbb{R})$ utilizzare la definizione di trasformata di Fourier e scambiare l'ordine di integrazione. \square

Cercheremo di definire la trasformata di Fourier di una distribuzione in modo che la proprietà 6.8 continui a valere. È possibile costruire dei controesempi che mostrano che la proprietà 6.8 non vale per tutte le distribuzioni. Lo spazio giusto in cui operare è lo spazio \mathcal{S} delle funzioni regolari a decrescenza rapida, uno spazio intermedio tra $C_0^\infty(\mathbb{R})$ e $C^\infty(\mathbb{R})$:

DEFINIZIONE 6.5 Con $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ indichiamo lo spazio delle funzioni $u \in C^\infty(\mathbb{R})$ tali che

$$\frac{d^n v}{dx^n} = o(|x|^{-n}) \quad \text{per } |x| \rightarrow \infty.$$

Lo spazio $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ prende il nome di spazio di Schwartz.

Si verifica facilmente che se $v \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ anche tutte le derivate di v sono in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Per le funzioni di $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ valgono ancora le proposizioni 4.5, 4.6, 4.8 e la formula di inversione vale senza nessuna ipotesi aggiuntiva su v : gli operatori $\mathcal{F}^{-1}: \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R})$ e $\mathcal{F}: \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R})$ trasformano lo spazio $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ in sé, ovvero sono effettivamente uno l'inverso dell'altro.

DEFINIZIONE 6.6 Indichiamo con $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ lo spazio delle distribuzioni associate allo spazio di Schwartz, ovvero lo spazio delle distribuzioni u per cui l'integrale

$$\int_{\mathbb{R}} uv \, dx. \tag{6.9}$$

ha senso per ogni $v \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Gli elementi di $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ si dicono distribuzioni temperate.

A volte ci si riferisce alle distribuzioni temperate come *distribuzioni a crescita lenta*. Per poter ingrandire lo spazio delle funzioni test, perché la (6.9) continui ad avere senso è necessario richiedere un comportamento controllato delle distribuzioni quando $x \rightarrow \infty$.

Non tutte le distribuzioni sono temperate: ad esempio non lo è la funzione esponenziale che all'infinito ha un ordine superiore a quello di una qualunque potenza della x .

DEFINIZIONE 6.7 Sia $\{u_k\}$ una successione di distribuzioni temperate e sia $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Diciamo che la successione u_k converge ad u nel senso delle distribuzioni temperate se

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} u_k v \, dx = \int_{\mathbb{R}} uv \, dx$$

per ogni $v \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

DEFINIZIONE 6.8 Sia u una distribuzione temperata e sia $\{u_k\}$ una successione in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ convergente a u nel senso delle distribuzioni temperate. Si definisce trasformata di Fourier di u la distribuzione

$$\hat{u} = \lim_{k \rightarrow \infty} \hat{u}_k.$$

Il procedimento utilizzato per definire la delta di Dirac e per calcolarne la trasformata di Fourier può essere esteso a una qualsiasi distribuzione temperata.

Facendo uso delle derivate deboli è possibile finalmente enunciare l'estensione alle distribuzioni delle proprietà 4.7 e 5.7 alle distribuzioni temperate.

Proposizione 6.1 Sia $f(x)$ una distribuzione temperata. Allora

$$\mathcal{F}[f'(x)](\xi) = i\xi \mathcal{F}[f(x)](\xi).$$

Nella dimostrazione della 6.1 utilizzeremo il seguente

Lemma 6.2 S $u, v \in L^1(\mathbb{R})$ allora $\int_{\mathbb{R}} \widehat{u}v \, dx = \int_{\mathbb{R}} u\widehat{v} \, dx$.

Dimostrazione. È sufficiente scrivere esplicitamente le espressioni per le trasformate e scambiare l'ordine di integrazione. \square

Dimostrazione della proposizione 6.1. Mostriamo che l'uguaglianza

$$\langle \mathcal{F}[f'(x)](\xi), \varphi(\xi) \rangle = \langle i\xi \mathcal{F}[f(x)](\xi), \varphi(\xi) \rangle$$

vale per ogni funzione test φ . Si ha:

$$\langle \mathcal{F}[f'(x)](\xi), \varphi(\xi) \rangle = \langle f'(x), \mathcal{F}[\varphi(\xi)](x) \rangle = - \left\langle f(x), \frac{d}{dx} \mathcal{F}[\varphi(\xi)](x) \right\rangle.$$

La derivata che compare nell'ultimo passaggio è una derivata classica. Possiamo utilizzare la proposizione 4.7:

$$\begin{aligned} - \left\langle f(x), \frac{d}{dx} \mathcal{F}[\varphi(\xi)](x) \right\rangle &= - \langle f(x), \mathcal{F}[-i\xi\varphi(\xi)](x) \rangle = \\ &= \langle \mathcal{F}[f(x)](\xi), i\xi\varphi(\xi) \rangle = \langle i\xi \mathcal{F}[f(x)](\xi), \varphi(\xi) \rangle. \end{aligned}$$

\square

ESERCIZIO 6.6 Procedendo in maniera analoga a quanto fatto nella dimostrazione della proposizione 6.1 si possono dimostrare nel caso delle distribuzioni tutte le principali proprietà delle trasformate di Fourier. Per esercizio si dimostri che valgono le estensioni delle proposizioni 4.2, 4.5, 4.6, 4.8.

Proposizione 6.2 Sia u una distribuzione. Allora u è trasformabile secondo Laplace se e solo se lo è u' . In caso di trasformabilità vale la disuguaglianza $\sigma[u'] \leq \sigma[u]$ e si ha:

$$\mathcal{L}[u'](s) = s\mathcal{L}[u](s). \quad (6.10)$$

OSSERVAZIONE 6.1 Le funzioni non sono altro che un tipo particolare di distribuzioni. Apparentemente, la proposizione 6.2 è in contraddizione con la 5.7 in cui è presente anche il termine “ $-f(0^+)$ ”.

La contraddizione ovviamente è solo apparente: nel caso in cui la funzione u sia continua su tutto \mathbb{R} e non solo per $x > 0$ (cfr. proposizione 5.7) allora necessariamente $u(0^+) = u(0^-) = 0$ e in questo caso le (5.9) e (6.10) coincidono.

Sia ora u nulla per $x \leq 0$, tale che soddisfi le ipotesi della proposizione 5.7 ma con un salto per $x = 0$. Indichiamo con u' la sua derivata nel senso delle distribuzioni e con v la funzione che coincide con la derivata in senso classico di u ove questa esiste e che vale zero altrove. Si ha:

$$u'(x) = v(x) + (u(0^+) - u(0^-))\delta(x) = v(x) + u(0^+)\delta(x).$$

Applicando la proposizione 6.2 alla distribuzione $v(x) = u'(x) - u(0^+) \delta(x)$, si ha

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[u'(x)](s) &= \mathcal{L}[v(x)](s) - \mathcal{L}[u(0^+) \delta(x)](s) = \\ &= s \mathcal{L}[u(x)](s) - u(0^+) \mathcal{L}[\delta(x)](s) = s \mathcal{L}[u(x)](s) - u(0^+), \end{aligned}$$

coerentemente con la proposizione 5.7.

6.4 Applicazioni al calcolo delle trasformate di Fourier e di Laplace

Le distribuzioni, e in particolar modo la delta di Dirac, sono uno strumento efficace per semplificare il calcolo delle trasformate di Fourier e di Laplace. Vediamo qualche esempio:

ESEMPIO 6.5 Il calcolo della trasformata di Fourier della Funzione $f(x)$ in figura 6.1 è notevolmente semplificato dall'uso della delta di Dirac.

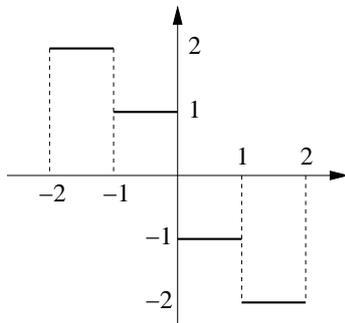


Figura 6.1

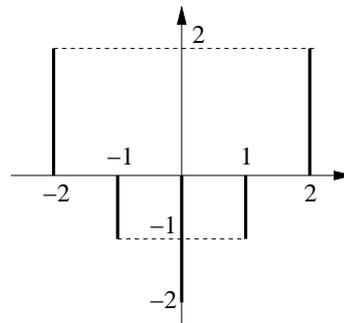


Figura 6.2

La derivata nel senso delle distribuzioni di $f(x)$ è rappresentata in figura 6.2. Si tenga presente che i grafici nelle figure 6.2 e 6.4 sono del tutto convenzionali. L'altezza del segmento verticale esprime l'area dell'impulso che ha originato la delta e non una vera e propria ordinata. Analiticamente,

$$f'(x) = 2 \delta(x + 2) - \delta(x + 1) - 2 \delta(x) - \delta(x - 1) + 2 \delta(x - 2).$$

In base alle considerazioni e agli esempi precedenti,

$$\mathcal{F}[f'(x)](\xi) = 2 e^{2i\xi} - e^{i\xi} - 2 - e^{-i\xi} + 2 e^{-2i\xi}.$$

Infine, in base alla proposizione 6.1,

$$\mathcal{F}[f(x)](\xi) = \frac{1}{i\xi} (2 e^{2i\xi} - e^{i\xi} - 2 - e^{-i\xi} + 2 e^{-2i\xi}) = \frac{4i}{\xi} (2 \sin^2 \xi - \sin^2(\xi/2)).$$

ESEMPIO 6.6 Calcoliamo la trasformata di Fourier della funzione $g(x)$ in figura 6.3. Come nell'esempio precedente, scriviamo la trasformata della sua derivata (figura 6.4):

$$\mathcal{F}[g'(x)](\xi) = \frac{1}{i\xi} (e^{i\xi} - 1) - 2 e^{-i\xi} - \frac{1}{i\xi} (e^{-i\xi} - e^{-3i\xi}) + 2 e^{-3i\xi}.$$

Di conseguenza,

$$\mathcal{F}[g(x)](\xi) = -\frac{1}{\xi^2} ((e^{i\xi} - 1) - 2i\xi e^{-i\xi} - (e^{-i\xi} - e^{-3i\xi}) + 2i\xi e^{-3i\xi}).$$

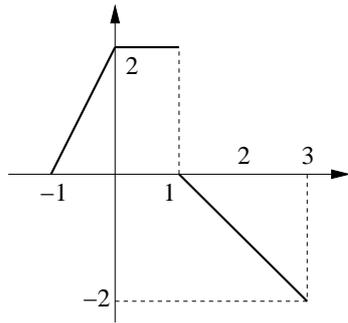


Figura 6.3

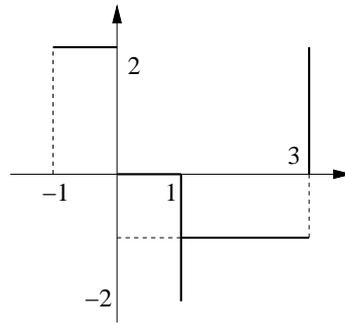


Figura 6.4

ESERCIZIO 6.7 Negli esempi si è fatto riferimento alle trasformate di Fourier ma i ragionamenti fatti sono validi anche nel caso delle trasformate di Laplace. Per esercizio si calcolino le trasformate di Laplace delle funzioni nelle figure 6.1-6.4 moltiplicate per $H(x)$.

6.5 Trasformate di Fourier in L^2

Teorema di Plancherel, Identità di Parseval.

LETTURE CONSIGLIATE

- [Bar01] G. C. Barozzi. *Matematica per l'Ingegneria dell'Informazione*. Zanichelli, 2001.
- [Ber68] D. Bernard. *Techniques d'analyse mathématique*. Masson, 1968.
- [BPS00] M. Bramanti, C. D. Pagani, and S. Salsa. *Matematica. Calcolo infinitesimale e Algebra lineare*. Zanichelli, 2000.
- [CAS01] F. Conti, P. Acquistapace, and A. Savojni. *Analisi Matematica, teoria ed applicazioni*. Mc Graw Hill, 2001.
- [CM04] G. Crasta and A. Malusa. *Matematica 2, teoria ed esercizi*. Pitagora Editrice Bologna, 2004.
- [Con93] F. Conti. *Analisi Matematica*. Mc Graw Hill, 1993.
- [Gil94] G. Gilardi. *Analisi tre*. Mc Graw Hill, 1994.
- [Giu85] E. Giusti. *Analisi matematica*. Boringhieri, 1985.
- [Mar99] M. Marini. *Metodi Matematici per lo studio delle Reti Elettriche*. CEDAM, 1999.
- [PT63] H. Pollard and M. Tenenbaum. *Ordinary differential equations*. Harper & Row, 1963.

INDICE

1	Analisi complessa	1
1.1	Introduzione	1
1.2	Soluzione delle equazioni algebriche di terzo grado	1
1.3	Aritmetica complessa	2
1.4	Rappresentazioni cartesiane e polare	4
1.5	Radici di un numero complesso	6
1.6	Funzioni trascendenti di un numero complesso	6
1.6.1	Esponenziale e logaritmo in \mathbb{C}	6
1.6.2	Funzioni trigonometriche e iperboliche in \mathbb{C}	8
1.7	Funzioni olomorfe	8
1.8	Serie di potenze	11
1.9	Funzioni analitiche complesse	15
1.10	Integrazione nel campo complesso	16
1.11	Primitive	18
1.12	Teorema di Cauchy e sue conseguenze	20
1.13	Singularità e teorema dei residui	25
2	Equazioni differenziali ordinarie	29
2.1	Generalità e definizioni	29
2.2	Equazioni a variabili separabili	31
2.3	Equazioni omogenee	33
2.4	Equazioni lineari	34
2.4.1	Equazioni lineari del primo ordine	36
2.4.2	Equazioni omogenee a coefficienti costanti	38
2.4.3	Equazioni non omogenee a coefficienti costanti	41
2.5	Equazione di Bernoulli	45
3	Serie di Fourier	47
3.1	Spazi di Hilbert	47
3.2	Il metodo dei minimi quadrati in \mathbb{R}^n	51
3.3	Lo spazio $L^2(\Omega)$	52
3.3.1	Lo spazio $L^2([-\pi, \pi])$	53
3.4	Serie di Fourier in $L^2([-\pi, \pi])$	56
3.5	Teoremi di convergenza delle serie di Fourier	60

3.6	Altre proprietà delle serie di Fourier	61
3.7	Serie di Fourier in $L^2([-l, l])$ e serie speciali	62
3.8	L'equazione delle onde	64
3.8.1	Corda vibrante di lunghezza finita con estremi bloccati	64
3.9	L'equazione del calore	66
3.9.1	Equazione del calore per una sbarretta omogenea	66
4	La trasformata di Fourier	69
4.1	La trasformata di Fourier come limite della serie di Fourier	69
4.2	Proprietà della trasformata di Fourier	71
4.3	Inversione della trasformata di Fourier	76
4.4	Trasformate di Fourier e derivazione. Convolutioni	78
4.5	Tavole riassuntive	82
5	La trasformata di Laplace	83
5.1	Definizioni e trasformate elementari	83
5.2	Proprietà della trasformata di Laplace	86
5.3	Teoremi di derivazione, convolutioni	89
5.4	L'inversione della trasformata di Laplace	91
5.4.1	Inversione nel caso delle funzioni razionali fratte	93
5.5	Applicazioni a equazioni differenziali ed integrali	94
5.5.1	Equazioni ordinarie a coefficienti costanti	94
5.5.2	Equazioni integro-differenziali di tipo convolutorio	96
5.6	Tavole riassuntive	98
6	Complementi	99
6.1	Distribuzioni	99
6.2	Derivate deboli	102
6.3	Trasformate di Fourier e di Laplace delle distribuzioni	103
6.4	Applicazioni al calcolo delle trasformate di Fourier e di Laplace	106
6.5	Trasformate di Fourier in L^2	107

[Bar01, Ber68, BPS00, CAS01, Con93, CM04, Gil94, Giu85, Mar99, PT63]