Funzioni continue e punti di discontinuità

Esercizio 1: Per ciascuna delle funzioni seguenti si determinino i valori dei parametri in modo che le funzioni risultino continue (se possibile)

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ \alpha, & x = 0 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x-1)}{|x-1|}, & x \neq 1 \\ \alpha, & x = 1 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)(x-\alpha)}{1-\cos x}, & x \in (0,\pi),\ x \neq \pi/2 \\ \alpha - 1, & x = \pi/2 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} 1 - \sin x, & x < \pi/3 \\ \alpha + \beta x, & x \geq \pi/3 \end{cases}$

e) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{4}{x^\alpha}(1-\cos x)^2, & x < 0 \\ x^\beta, & x \geq 0 \end{cases}$

f) $f(x) = \begin{cases} (x-1)(x+2), & \left|x+\frac{1}{2}\right| < \frac{3}{2} \\ \alpha(x-1), & x > 1 \\ \beta(x+2), & x < -2 \end{cases}$

Esercizio 2: Per ciascuna delle funzioni dell'esercizio precedente, dopo aver scelto il valore dei parametri in modo che siano continue, determinare se sono o meno derivabili.

Esercizio 3: Per ciascuna delle funzioni seguenti determinare i primi due termini della loro approssimazione a $+\infty$ mediante polinomi o potenze negative della x.

a) $f(x) = x + \sin \frac{1}{x}$

b) $f(x) = \sqrt{x^2+1}$

c) $f(x) = \sqrt{x^2+x+1}$

d) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1+x}}{x}$

e) $f(x) = \operatorname{arctg} x$

f) $f(x) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x$