

Esercizi di Algebra

Incontri Olimpici 2017 - Montecatini Terme

Esercizio 1. Sia $p(x)$ un polinomio a coefficienti interi tale che $p(1) = 7$ e $p(7) = 1$. Quali sono i possibili valori che può assumere $p(4)$?

Esercizio 2. Sia $p(x)$ un polinomio di grado 2016 tale che $p(i) = \frac{1}{i}$ per ogni $i \in \{1, 2, \dots, 2017\}$. Quanto vale $p(2018)$?

Esercizio 3. Il prodotto di due delle radici del polinomio

$$p(x) = x^4 - 18x^3 + kx^2 + 200x - 1984$$

è -32 . Quanto vale k ?

Esercizio 4. Consideriamo il polinomio

$$p(x) = \left(\frac{x^4 + x^2 + 1}{3} \right)^{2017} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{8068}x^{8068}.$$

Quanto vale la somma $a_1 + a_4 + a_7 + \dots + a_{3k+1} + \dots + a_{8068}$?

Esercizio 5. Consideriamo l'insieme $S = \{1, 2, \dots, 2017\}$. Per ogni sottoinsieme non vuoto $T \subseteq S$ si calcola il prodotto dei reciproci degli elementi contenuti in T . Quanto vale la somma di tutti i prodotti che si ottengono al variare di T ?

Esercizio 6. Sia m un intero positivo e sia a_0, a_1, \dots, a_m una successione di numeri reali tali che $a_0 = 37$, $a_1 = 72$ e $a_m = 0$. Sappiamo inoltre che

$$a_{k+1} = a_{k-1} - \frac{3}{a_k}$$

per ogni $k = 1, 2, \dots, m-1$. Trova quanto vale m .

Esercizio 7. Trovare tutte le funzioni $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tali che

$$f(f(x) + y) = f(x^2 - y) + 4f(x)y$$

per ogni $x, y \in \mathbb{R}$.