MARZIA TOSO

EQUAZIONI FUNZIONALI

Titolo nota 15/10/2017

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) \cdot f(y) = xy$

METODO di BASE

1) Controllare che cost o f lineari se verificano l'eq
2) opportune sostituzioni
   - x e/o y con numeri 0 e 1
   - $y = x$
   - $f(x+y)$ $\quad f(0)$ $\quad y = -x$
3) operare cambi di var $x \mapsto x+1$
   $x \mapsto 1 - \frac{1}{x}$

$x^2 = x$

4) dare un nome alle cost
5) Riconoscere e sfruttare l'iniettività e suriettività
6) in $\mathbb{Q}$ attraverso l'induzione generalizzare i risultati
7) Ricondursi alle eq. di Cauchy
   - $f(x+y) = f(x) + f(y)$
   - $f(xy) = f(x) \cdot f(y)$
   - $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$
   - $f(xy) = f(x) + f(y)$ $\quad x, y > 0$ $\quad f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$

$$f(x)\,f(y) = xy$$

$y = x$

$$f(x)\cdot f(x) = f^2(x)$$

$$xy = x^2$$

$$f^2(x) = x^2 \qquad\qquad f(x) = cx$$

$$c^2x^2 = x^2 \qquad c = \pm 1$$

$$f(x) = x \qquad f(x) = -x$$

$f(x) = cx$ nell' $f(x)\cdot f(y) = xy$ $\forall x$

$$cx\cdot(cy) = c^2xy = xy \qquad c^2 = 1$$

$$\Downarrow$$

$$c = \pm 1 \quad \forall x, y$$

uniche sol $f(x) = x \vee f(x) = -x$ $\forall x \in \mathbb{R}$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\longrightarrow f(xy) = (f(x) - 1)\,f(y) - x^2 + 1$$

$x = 0$ $\quad f(0) = (f(0) - 1)\,f(y) + 1$

$$f(0) - 1 = (f(0) - 1)\,f(y)$$

$$(f(0) - 1)(f(y) - 1) = 0$$

1) $f(y) - 1 = 0$ $\quad\vee\quad$ 2) $f(0) = 1$

$$\Downarrow$$

$f(y) = 1 = \text{cost}\ \forall y \in \mathbb{R}$

$$1 = (1 - 1)\cdot 1 - x^2 + 1$$

$x^2 = 0$ vera $x = 0$

2) $f(0) = 1$ se $y = 0$ l'eq iniziale

$$f(0) = (f(x) - 1)\cdot f(0) - x^2 + 1$$

$$\cancel{1} = (f(x)-1)\cdot 1 - x^2 + \cancel{1}$$

$$0 = f(x) - 1 - x^2$$

$$f(x) = x^2 + 1$$ potrebbe essere la nostra sol $\forall x$

$$f(xy) = (f(x)-1)\, f(y) - x^2 + 1$$

$$x^2y^2 + 1 \overset{?}{=} (x^2 + \cancel{1} - \cancel{1}) \cdot (y^2+1) - x^2 + 1$$

$$x^2y^2 + 1 = x^2y^2 \cancel{+x^2} \cancel{-x^2} + 1$$

$$f(x - f(y)) = 2f(x) + x + f(y)$$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è suriettiva

$\Rightarrow f(y)$ può assumere qualsiasi v. in $\mathbb{R}$ $\forall y \in \mathbb{R}$

se $f(y) = 0$

$$f(x - f(y)) = f(x) = 2f(x) + x + 0$$

$$f(x) = -x \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Sost: $f(x - f(y)) = f(x - (-y)) = f(x+y) = -x-y$

$$f(x - f(y)) = 2f(x) + x + f(y)$$

$$\overset{!}{=} 2(-x) + x + (-y)$$

$$= -x - y$$

$$f(x) + x \cdot f(1-x) = x^2 + 1 \qquad f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$x \longmapsto 1-x$

$1-(1-x)$

$$f(1-x) + (1-x)\, f(x) = (1-x)^2 + 1$$

$$\Downarrow$$

$$f(1-x) = (1-x)^2 + 1 - (1-x)\cdot f(x)$$

Sost nell' eq. iniziale

$$f(x) + x \cdot \underbrace{\left[(1-x)^2 + 1 - (1-x)\cdot f(x)\right]}_{f(1-x)} = x^2+1 \quad \forall x$$

$$f(x) + x(1-x)^2 + x - x(1-x)\cdot f(x) = x^2+1 \quad \forall x$$

$$f(x)\left(1 - x(1-x)\right) = x^2+1-x(1-x)^2 - x$$

$$f(x) = \frac{-x^3+3x^2-2x+1}{x^2-x+1}$$

$$f(x+y) = f(x)+f(y)$$

$$f: \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$$

Come proporre le sol:

1. enunciare il risultato ottenuto
- verificare le sol ottenute
- esporre con ordine tutte "manipolazioni algebriche"

L' eq. di Cauchy:

(1) le sol sono tutte e sole le funzioni (lineari) del tipo $f(x) = kx$, $\forall x \in \mathbb{Q}$

(2) Verifichiamole:

$$f(x+y) = k(x+y)$$

$$f(x)+f(y) = kx+ky$$

$$\Rightarrow k(x+y) = k(x+y)$$

(3) Dim che tutte le sol $f(x)=kx$ $\quad f: \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ mostrando le manipolazioni alg.

- Passo 1 $\quad f(0) = ?$

$$x=y=0 \Rightarrow \underbrace{f(0+0)}_{f(0)+f(0)} = f(0) \quad \longmapsto \quad f(0) = 2f(0)$$

$$\Downarrow$$

$$\Downarrow$$
$$f(0)=0$$

• <u>Passo 2</u> $f(-q) = -f(q)$ $\Leftarrow$ da dim

$x=q \qquad y=-q$

$$\Downarrow$$
$$f(x+y) = f(q-q) = f(0) = 0 \text{ per passo } 1$$
$$f(x)+f(y) = f(q) + f(-q)$$
$$f(q)+f(-q)=0 \quad \Rightarrow \quad f(-q) = -f(q)$$

Poniamo $K = f(1)$

• <u>Passo 3</u> $f(n) = kn \quad \forall n \in \mathbb{N}$

<u>base induzione</u> se $n=0 \Rightarrow f(0)=0$

<u>passo induttivo</u> $n+1 = x+y$ se $x=n$ e $y=1$

$$f(n+1) = f(n) + f(1) = kn + k = k(n+1)$$

• <u>Passo 4</u> $f(nx) = nf(x) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{Q}$

base dell' ind. se $n=0$ $f(nx) = f(0) = 0$

passo dell' induz.

$$f((n+1)x) = f(\overset{y}{nx}+x) = f(nx)+f(x) = nf(x)+f(x)$$
$$= f(x)(n+1) = (n+1)f(x)$$

• <u>passo 5</u> $f(x) = kx \quad \forall x \in \mathbb{Q}$

$$x = \frac{m}{n}$$

passo 3

$$\downarrow$$

passo 4: $nf(x) = f(nx) = f\left(\cancel{n} \cdot \frac{m}{\cancel{n}}\right) = f(m)$

$$= km$$

$$nf(x) = km \Rightarrow f(x) = k \cdot \frac{m}{n} = kx \quad \forall x \in \mathbb{Q}$$

Esercizio 1: COPPA GALILEO 2013 Un'altra delle funzioni che il comandante dei Guardiani della Notte utilizza è una funzione $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ razionale di variabile razionale tale che

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

per ogni x e y numeri razionali. Il comandante sa che $f\left(\frac{7}{8}\right) = \frac{8}{7}$ e calcola $f\left(\frac{49}{2}\right)$. Che risultato trova?

$$f(x) = kx$$

$$f\left(\frac{7}{8}\right) = k \cdot \frac{7}{8} = \frac{8}{7} \Rightarrow k = \frac{64}{49}$$

$$f\left(\frac{49}{2}\right) = \underbrace{\frac{64}{49}}_{k} \cdot \underbrace{\frac{49}{2}}_{x} = 32$$

Esercizio 2: GARA A SQUADRE SMC 2017 UDINE Una delle più strepitose invenzioni del Prof. Farnsworth è la scatola del multi universo. Questa scatola ha un funzionamento semplice: la si può assimilare ad una funzione f definita sui reali tale che soddisfi, per ogni x, y reale, $f(xy) = xf(y) + yf(x)$ e $f(x+y) = f(x^{2017}) + f(y^{2017})$. Per evitare danni all'universo il Prof. chiude la scatola nella vasca delle ostriche giganti, il cui codice di apertura è la somma di tutti i possibili valori assumibili da $f(\sqrt{3753})$. Determinarlo.

(1) $f(xy) = x f(y) + y f(x)$

(2) $f(x+y) = f(x^{2017}) + f(y^{2017})$

Nella (1) sost $x = 0$ e $y = 2$

$$f(0) = 2 f(0) \Rightarrow f(0) = 0$$

Nella (1) $x = y = 1$

$$f(1) = f(1) + f(1) \Rightarrow f(1) = 0$$

(2) $f(x+y) = f(x^{2017}) + f(y^{2017})$

$f(x^{2017}) = f(x)$, $f(y^{2017}) = f(y)$

$y = 0$

$$f(x) = f(x^{2017}) + f(0) \rightarrow f(x) = f(x^{2017}) \ \forall x$$

Allora la 2 può essere riscritta:

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Imponiamo $y = 1$

$$f(x+1) = f(x) + f(1) = f(x)$$
$$\Downarrow$$
$$f(x+1) = f(x) \quad \forall x$$

Dim $f(n) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

- se $n = 0$ $f(0) = 0$
- $n+1$: $f(n+1) = f(n) + f(1) = f(n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Vogliamo calcolare $f(\sqrt{3753})$:

$x = y = \sqrt{n}$

dall' eq 1 $\quad f(xy) = x f(y) + y f(x)$

$$f(n) = f(\sqrt{n} \cdot \sqrt{n}) = \sqrt{n} \cdot f(\sqrt{n}) + \sqrt{n} \cdot f(\sqrt{n}) = 2\sqrt{n} \cdot f(\sqrt{n})$$

$$\Downarrow$$

$$0 = f(n) = 2\sqrt{n} \cdot f(\sqrt{n})$$

$$2\sqrt{n} \cdot f(\sqrt{n}) = 0 \quad \forall n \Rightarrow f(\sqrt{n}) = 0$$

Esercizio 3: GARA A SQUADRE 2011 - Semifinale c - Parabolix ha il sospetto che, ancora una volta, alcuni Romani si siano travestiti da Galli e si siano intrufolati nel villaggio. Sapendo la superiorità dei Galli sui Romani in matematica (non per nulla è stato lui a insegnarla al villaggio), per individuarli prova a sottoporre a tutti il seguente quesito. Sia f una funzione tale che $f(x)+f\left(\frac{1}{1-x}\right)=x$, con $x \neq 0,1$. Determinare $f(10)$. Rispondere con la somma del numeratore e del denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.

(A) $$f(x)+f\left(\frac{1}{1-x}\right)=x$$

$$x \longmapsto \frac{1}{1-x}$$

$$f\left(\frac{1}{1-x}\right)+f\left(\frac{1}{1-\left(\frac{1}{1-x}\right)}\right)=\frac{1}{1-x}$$

(B) $$f\left(\frac{1}{1-x}\right)+f\left(1-\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{1-x}$$

$$x \longmapsto 1-\frac{1}{x}$$

$$f\left(1-\frac{1}{x}\right)+f\left(\frac{1}{1-\left(1-\frac{1}{x}\right)}\right)=1-\frac{1}{x}$$

(C) $$f\left(1-\frac{1}{x}\right)+f(x)=1-\frac{1}{x}$$

$$2f(x)=x-\frac{1}{1-x}+1-\frac{1}{x}$$

$$f(x)=\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{1-x}+1-\frac{1}{x}\right) \qquad f(10)=\frac{991}{180}$$

$$\Downarrow$$

$$991+180=1171$$

Esercizio 4: GARA A SQUADRE CESENATICO 2000 Una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ verifica l'uguaglianza

$$f\left((x-y)^2\right) = (f(x))^2 - 2xf(y) + y^2$$

per ogni coppia di numeri reali x e y. Calcolare la somma di tutti i valori che può assumere $f(2000)$.

$f(x) = x \quad$ e $\quad f(x) = x+1$

$x = y = 0$

$$f(0) = f^2(0) - 2 \cdot 0 \cdot f(0) + 0$$

$$f^2(0) - f(0) = 0$$

$\rightarrow f(0) = 0 \quad \vee \quad f(0) = 1 \leftarrow$

$$f\left((x-y)^2\right) = f\left((y-x)^2\right)$$

$$\boxed{f^2(x) - 2xf(y) + y^2 = f^2(y) - 2yf(x) + x^2}$$

$y = 0$

$$f^2(x) - 2x \cdot f(0) = f^2(0) - 2 \cdot 0 \cdot f(x) + x^2$$

$$f^2(x) - 2x\,f(0) = f^2(0) + x^2 \quad (*)$$

se $f(0) = 0 \Rightarrow (*) \quad f^2(x) = x^2$

$f(x) = \pm x \Rightarrow \underline{f(x) = x}$

Scartiamo $f(x) = -x$

$$-(x-y)^2 \neq x^2 + 2xy + y^2$$

Se $f(0) = 1 \Rightarrow (*) \quad f^2(x) - 2x = 1 + x^2$

$$f^2(x) = x^2 + 1 + 2x$$

$$f^2(x) = (x+1)^2$$

$f(x) = \pm (x+1)$

$\underline{f(x) = x+1}$ non acc $f(x) = -x-1$

se $f(x) = x \Rightarrow f(2000) = 2000$ +

se $f(x) = x+1 \Rightarrow f(2000) = 2001$

4001

Esercizio 5: STAGE SENIOR 2014 Determinare quante sono le funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tali che

$$f(xf(y)) = xf(y) + yf(x). \qquad (10)$$

Tutte e sole le funzioni del tipo $f(x) = cx$ $\forall x \in \mathbb{R}$ $c \in \mathbb{R}$

$c = 0$ o $c = 2$

1° membro $f(x \cdot cy) = f(cxy) = c(cxy) = c^2xy$

2° membro $x f(y) + y f(x) = x \cdot cy + y \cdot cx = 2cxy$

$c^2xy = 2cxy$

$c^2 - 2c = 0$ se $c = 0$ v $c = 2$

Caso $x = 0$

se $c = 0$ la sol $f(x) = 0$ $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x \cdot 0) = f(0) =$

$= 0 \cdot f(y) + y \cdot f(0) = 0$

se $c = 2$ cioè se la $f(x) = 2x$ $\forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow f(x \cdot 2y) = 2 \cdot (2xy) = 4xy = x \cdot (2y) + y(2x) = 4xy$

$\boxed{1° \text{ dim}}$

$y = 1$ $\quad f(x \cdot \underbrace{f(1)}_{= c \in \mathbb{R}}) = x f(1) + 1 \cdot f(x)$

$f(cx) = cx + f(x)$

imponiamo che $f(x) = cx$

$f(cx) = cx + cx = 2cx$

se $c = 0$ $\quad f(0) = 0$

se $c \neq 0$ $\quad cx = y$ $\quad f(y) = 2y$ $\quad \forall y \in \mathbb{R}$

$\boxed{2° \text{ dim}}$ $\quad f(x f(y)) = f(y f(x))$ $\quad \forall x, y \in \mathbb{R}$

- se f fosse iniettiva

$f(x_1) = f(x_2)$ solo se $x_1 = x_2$

x la simmetria $\quad x f(y) = y f(x)$

$y = 1 \Rightarrow x f(1) = 1 \cdot f(x)$

$$f(x) = f(1) \cdot x \Rightarrow f(x) = cx \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$c \in \mathbb{R}$

$$f(x f(y)) = x f(y) + y f(x) = x \cdot (cy) + y \cdot (cx) = 2cxy \quad \forall x$$

$$\| \; f(x \cdot cy) = f(c\,xy) = c(cxy) = c^2 xy$$

$$c^2 xy = 2cxy \qquad c = 0 \vee c = 2$$

se f non è iniettiva

$\exists\, y_1 \neq y_2$ t.c. $f(y_1) = f(y_2)$

$$f(y_1) = \underline{x f(y_1) + y_1 f(x)}$$

$$f(y_2) = x f(y_2) + y_2 f(x) = \underline{x f(y_1) + y_2 f(x)}$$

$$\cancel{x f(y_1)} + y_1 f(x) = \cancel{x f(y_1)} + y_2 f(x)$$

$$y_1 f(x) = y_2 f(x)$$

$$(y_1 - y_2) f(x) = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

se $y_1 = y_2$ no

$f(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Esercizio 7: IMO 2015 Determinare tutte le funzioni $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tali che

$$f(x - f(y)) = f\left(f(x)\right) - f(y) - 1.$$