Incontri Olimpici 2013

Problemi di combinatoria

Bologna, 16 ottobre 2013

Appunti redatti da Ercole Suppa

Sommario

In questo documento sono riportate le soluzioni dei problemi di combinatoria proposti e risolti da Giovanni Paolini.

Problema 1. *Dati n punti in fila, in quanti modi possono essere colorati di rosso, verde o blu facendo sì che due punti vicini abbiano colori diversi?*

Soluzione. Il primo punto può essere colorato in 3 modi, tutti gli altri punti possono essere colorati in 2 modi, quindi il numero di colorazioni possibili è

$$\boxed{3 \cdot 2^{n-1}}$$

□

Problema 2. *Sia $f : \{0, 1, 2, \ldots, 2009\} \to \mathbb{N}$ una funzione tale che, per ogni k,*

$$f(2k) = f(2k+1), \qquad f(3k) = f(3k+1), \qquad f(5k) = f(5k+1)$$

Quanti elementi può avere, al massimo, l'immagine di f?

Soluzione. Indicate rispettivamente con (1), (2), (3) le tre proprietà verificate dalla funzione f, abbiamo:

- $0 \mapsto a$
- $1 \mapsto a$, per (1)
- $2 \mapsto b$
- $3 \mapsto b$, per (1)
- $4 \mapsto b$, per (2)
- $5 \mapsto b$, per (1)
- $6 \mapsto b$, per (3)
- $7 \mapsto b$, per (1)
- $8 \mapsto c$
- $9 \mapsto c$, per (1)
- $10 \mapsto c$, per (2)
- $11 \mapsto c$, per (1)
- $12 \mapsto d$
- $13 \mapsto d$, per (1)
- $14 \mapsto e$
- $15 \mapsto e$, per (1)
- $16 \mapsto e$, per (3)
- $17 \mapsto e$, per (1)
- $18 \mapsto f$
- $19 \mapsto f$, per (1)
- $20 \mapsto g$
- $21 \mapsto g$, per (1)
- $22 \mapsto g$, per (2)
- $23 \mapsto g$, per (1)
- $24 \mapsto h$
- $25 \mapsto h$, per (1)
- $26 \mapsto h$, per (3)
- $27 \mapsto h$, per (1)
- $28 \mapsto h$, per (2)
- $29 \mapsto h$, per (1)

Dal precedente elenco si evince che il massimo numero di immagini distinte è dato dalla cardinalità dell'insieme Ω formato dai numeri che non sono multipli di 2, di 3 o di 5. Possiamo contare gli elementi di Ω in due modi:

(a) Con il **principio di inclusione-esclusione**: indicati rispettivamente con A, B, C gli insiemi dei numeri compresi tra 1 e 2009 che sono divisibili per 2, per 3 o per 5 abbiamo:

$$|A \cup B \cup C| = \sum_{\text{cyclic}} |A| - \sum_{\text{cyclic}} |A \cap B| + |A \cap B \cap C| =$$
$$= \left[\frac{2009}{2}\right] + \left[\frac{2009}{3}\right] + \left[\frac{2009}{5}\right] - \left[\frac{2009}{6}\right] - \left[\frac{2009}{10}\right] - \left[\frac{2009}{15}\right] + \left[\frac{2009}{30}\right] =$$
$$= 1004 + 669 + 401 - 334 - 200 - 133 + 66 = 1473$$

da cui segue che $|\Omega| = 2010 - 1474 = \boxed{536}$ (abbiamo tenuto conto anche di 0).

(b) Con **la funzione φ di Eulero**: in ogni insieme di 30 numeri consecutivi vi sono $\varphi(30) = 8$ numeri non divisibili per 2, per 3 o per 5. Dato che $2010/30 = 67$, la cardinalità di Ω è data da $67 \cdot 8 = \boxed{536}$

$\square$

Problema 3. *Una scacchiera ha n righe e $17n$ colonne. In ogni colonna ci sono esattamente 3 pedoni e in ogni riga c'é un numero diverso di pedoni, compreso tra 0 ed n (estremi inclusi). Quanto può valere n?*

Soluzione. Utilizziamo la tecnica del **double counting**: contando in due modi diversi (per colonne e per righe) i pedoni presenti sulla scacchiera abbiamo

$$3 \cdot 17n = 0 + 1 + 2 + \cdots + n - k$$
$$3 \cdot 17n = \frac{n(n+1)}{2} - k \qquad (*)$$

dove abbiamo indicato con k il valore che viene saltato. Distinguiamo due casi:

- Se n è dispari da (*) segue che k è multiplo di n. Essendo $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ ne segue che $k = 0$ oppure $k = n$ e sostituendo in (*) si trova che $n = 101$ oppure $n = 103$.

- Se n è pari da (*) segue che $n = 2m$ per un opportuno intero m e sostituendo in (*) abbiamo

$$51 \cdot 2m = \frac{2m(2m+1)}{2} - k \quad \Rightarrow$$
$$102 \cdot m = m(2m+1) - k \quad \Rightarrow$$
$$k \text{ è multiplo di } m = \frac{n}{2} \quad \Rightarrow$$
$$k \in \left\{0, \frac{n}{2}, n\right\}$$

  Se $k = n/2$ otteniamo che $n = 102$

I possibili valori di n sono 101,102,103. $\square$

Problema 4. *Pippo ha in mano 16 carte: 4 di picche, 4 di cuori, 4 di quadri e 4 di fiori. Estrae a caso 6 carte; qual é la probabilità che, tra queste 6, ve ne siano esattamente 2 di picche oppure esattamente 2 di cuori?*

Soluzione. Consideriamo gli eventi

$$A = \text{"Esattamente due carte di picche"}$$
$$B = \text{"Esattamente due carte di cuori"}$$

Dal teorema della probabilità totale segue che

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{2\binom{4}{2}\binom{12}{4} - \binom{4}{2}\binom{4}{2}\binom{8}{2}}{\binom{16}{6}} = \frac{1233}{2002} \approx 0.6158$$

$\square$

Problema 5. *Sia $A = \{1, 2, \ldots, 10\}$. Quante sono le funzioni $f : A \to A$ tali che $f(f(x)) = x$ per ogni $x \in A$?*

Soluzione. Generalizziamo il problema con $A = \{1, 2, \ldots, n\}$: sia a_n il numero di funzioni $f : A \to A$ tali che $f(f(x)) = x$ per ogni $x \in A$. Osserviamo che una funzione tale che $f(f(x)) = x$ per ogni $x \in A$ è bigettiva. Si tratta allora di contare quante sono le permutazioni di A la cui decomposizione in cicli contiene solo cicli di lunghezze 1 e 2. Osserviamo che:

- vi sono a_{n-1} funzioni $f : A \to A$ con $f(n) = n$
- vi sono $(n-1)a_{n-2}$ funzioni $f : A \to A$ con $f(n) \neq n$ (si noti che se $f(n) = a$ allora $f(a) = n$)

Pertanto la successione a_n soddisfa la seguente ricorrenza

$$a_n = a_{n-1} + (n-1)a_{n-2}, \qquad a_1 = 1, a_2 = 2$$

Con un semplice calcolo si trova che i primi 10 termini della successione a_n sono

$$1, 2, 4, 10, 26, 76, 232, 764, 2620, 9496$$

Pertanto il numero di funzioni richieste è $\boxed{9496}$ $\square$

Problema 6. *Ho 4 mele e 7 aranci. In quanti modi posso regalarle a 4 amici? (Le mele e le arance sono indistinguibili tra loro, conta solo quante mele e quante arance vengono date a ciascun amico. Alcuni amici potrebbero anche non ricevere alcun frutto).*

Soluzione. Le soluzioni dell'equazione diofantea

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = k, \quad \text{con } x_i \geq 0 \tag{*}$$

sono in corrispondenza biunivoca con le *parole binarie* (sequenze di 0-1) di lunghezza $n + k - 1$ contenenti k simboli 0 e $n - 1$ simboli 1.

Pertanto (*) ammette

$$\binom{n+k-1}{k}$$

soluzioni. Il problema proposto si risolve contando il numero di soluzioni delle equazioni $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4$ ed $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7$ e moltiplicando i due numeri ottenuti

$$\binom{4+4-1}{4}\binom{4+7-1}{7} = \binom{7}{4}\binom{10}{7} = 35 \cdot 120 = \boxed{4200}$$

$\square$

Problema 7. *Quante sono le stringhe formate da 8 caratteri 0,1 e 2 tali che due cifre consecutive differiscano al massimo di 1?*

Soluzione. Indichiamo con

- x_n il numero di stringhe formate da n caratteri 0,1,2 aventi la proprietà richiesta che iniziano con 1
- y_n il numero di stringhe formate da n caratteri 0,1,2 aventi la proprietà richiesta che iniziano con 0 (con 2)

Delle stringhe di lunghezza n che iniziano 1 ve ne sono

- y_{n-1} che iniziano con 10
- x_{n-1} che iniziano con 11
- y_{n-1} che iniziano con 12

quindi

$$x_n = x_{n-1} + 2y_{n-1} \tag{1}$$

Delle stringhe di lunghezza n che iniziano 0 ve ne sono

- y_{n-1} che iniziano con 00
- x_{n-1} che iniziano con 01

quindi

$$y_n = x_{n-1} + y_{n-1} \tag{2}$$

Da (1) e (2) si ottiene

$$x_{n-1} = y_n - y_{n-1} \quad \Rightarrow \quad y_{n+1} = 2y_n + y_{n-1} \tag{3}$$

Dalla (3), essendo $y_1 = 1$ ed $y_2 = 2$, abbiamo

$$y_3 = 5,\ y_4 = 12,\ y_5 = 29,\ y_6 = 70,\ y_7 = 169,\ y_8 = 408,\ y_9 = 985 \quad \Rightarrow$$

$$x_8 = y_9 - y_8 = 985 - 408 = 577$$

Il numero di stringhe aventi la proprietà richiesta è $x_8 + 2y_8 = \boxed{1393}$

□

Problema 8. *Quanti sono i numeri di 7 cifre, composti solo da cifre 1,2,3 o 4 con un numero dispari di cifre 1?*

Prima soluzione. I numeri del tipo richiesto sono complessivamente:

$$S = \sum_{k \equiv 1 \pmod 2} \binom{7}{k} 3^{7-k} = \binom{7}{1} \cdot 3^6 + \binom{7}{3} \cdot 3^4 + \binom{7}{5} \cdot 3^2 + \binom{7}{7} = \boxed{8128}$$

□

Seconda soluzione. Dalla formula del binomio di Newton abbiamo

$$\sum_{k=0}^{7} \binom{7}{k} 3^{7-k} = (1+3)^7 = 4^7 \tag{1}$$

$$\sum_{k=0}^{7} \binom{7}{k} 3^{7-k}(-1)^k = (-1+3)^7 = 2^7 \tag{2}$$

Sottraendo membro a membro la (1) e la (2) otteniamo

$$2S = 4^7 - 2^7 \quad \Rightarrow \quad S = \frac{4^7 - 2^7}{2} = \boxed{8128}$$

□

Terza soluzione. Indichiamo rispettivamenti con x_n ed y_n il numero degli interi di n cifre aventi un numero dispari o un numero pari di cifre 1.

Osserviamo che

$$x_n + y_n = 4^n$$
$$x_n = 3x_{n-1} + y_{n-1}$$

da cui eliminando y_n si ottiene la ricorrenza

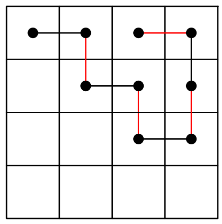
$$x_n = 2x_{n-1} + 4^{n-1}, \quad x_1 = 1 \tag{*}$$

Dalla (*) si ricava che i primi 7 termini della successione x_n sono

$$1, 6, 28, 120, 496, 2016, \boxed{8128}$$

□

Problema 9. *Abelardo e Brunilla fanno il seguente gioco: su una griglia $n \times n$ posizionano in una casella d'angolo una pedina a turno e la muovono, potendola spostare solo dalla casella su cui si trova in una adiacente che non sia già stata visitata. Abelardo muove per primo; perde chi non può più muovere. Esempio di partita su una scacchiera 4×4*

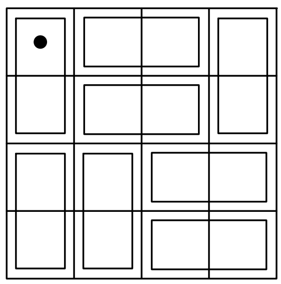


Il giocatore A perde

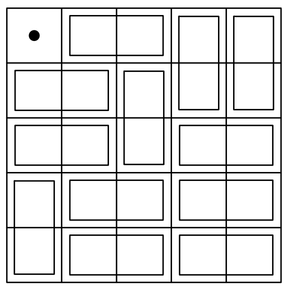
Dire, in funzione di n, quale dei due giocatori ha la strategia vincente.

Soluzione.
La stategia vincente è basata su una tassellazione con domini 2×1.

- Se n è pari il primo giocatore vince con la seguente strategia: tasselliamo tutta la scacchiera, scegliamo il domino contenente la pedina e spostiamo la pedina nell'altra casella del domino scelto (quella vuota).



- Se n è dispari il secondo giocatore vince con la seguente strategia: tasselliamo tutta la scacchiera eccetto la casella d'angolo; dopo che il primo giocatore ha eseguito la mossa, scegliamo il domino contenente la pedina e spostiamo la pedina nell'altra casella del domino scelto (quella vuota).



$\square$