Titolo nota 16/10/2013

"La Matematica delle Olimpiadi" (La Scuola editrice)

GIOVANNI PAOLINI

http://uz.sns.it/~giove/lmdo.php

LMDO

1) Dati n punti, colorarli con 3 colori

$$\underset{3}{\bullet} \quad \underset{2}{\bullet} \quad \underset{2}{\bullet} \quad \cdots \qquad 3 \cdot 2^{n-1}$$

2) $f : \{0, \ldots, 2009\} \to \mathbb{N}$

Per ogni intero K (per cui ha senso ...)

(2) $f(2k) = f(2k+1) \rightsquigarrow f(\text{PARI}) = f(\text{SUCCESSIVO})$

PARI + 1

(3) $f(3k) = f(3k+1)$

(5) $f(5k) = f(5k+1)$

"-1"

$0 \to a$

$1 \to a$ (2)

$2 \to b$

$3 \to b$ (2)

$4 \to b$ (3)

$5 \to b$ (2)

$6 \to b$ (5)

$7 \to b$ (2)

8 → C
9 (2)
10 (3)
11 (2)
12

Ci interessano i numeri che <u>non</u> sono multipli di 2, 3 oppure 5

<u>MODO 1</u> Questo insieme di numeri è periodico modulo 30

1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 → 8 $= \varphi(30)$

In $\{0, \ldots, 2009\}$ questo periodo si ripete $\frac{2010}{30} = 67$ volte

Risposta: $8 \cdot 67 = 536$.

<u>MODO 2</u> Principio di inclusione - esclusione

Idea: passare alla domanda "complementare"

Quanti sono i numeri multipli di almeno uno tra 2, 3 o 5?

Risposta: $M2 + M3 + M5 - M6 - M10 - M15 + M30 =$

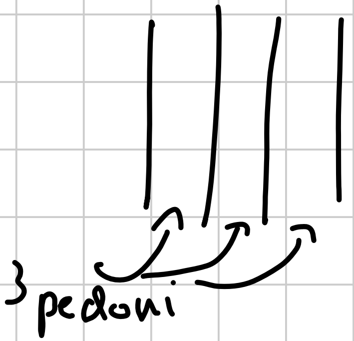
quanti sono i multipli di 2

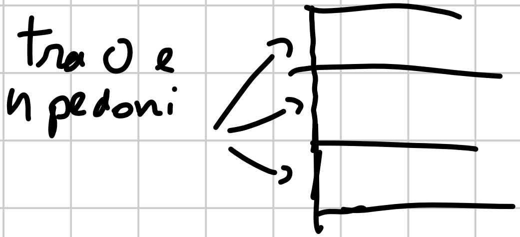
$$= \frac{2010}{2} + \frac{2010}{3} + \frac{2010}{5} - \frac{2010}{6} - \frac{2010}{10} - \frac{2010}{15} + \frac{2010}{30} = 1474$$

Vera risposta: $2010 - 1474 = 536$.

MODO 3: $\varphi(30) \cdot 67 = \underbrace{(1 \cdot 2 \cdot 4)}_{8} \cdot 67 = 536$

3) n RIGHE, $17n$ COLONNE





n righe, $n+1$ possibili valori del numero di pedoni sulla riga
$\{0, 1, \ldots, n\}$

IDEA 1: chiamiamo K il valore che viene saltato

IDEA 2: contare in due modi diversi il numero totale di pedoni

$$\text{TOT. PEDONI} = \begin{cases} 3 \cdot 17n = 51n & \text{(contando per colonne)} \\ 0+1+2+\ldots+n-K = \dfrac{n(n+1)}{2} - K & \text{(contando per righe)} \end{cases}$$

$$51n = \frac{n(n+1)}{2} - K$$

- n dispari

  $51n$ e' multiplo di n

  $\frac{n(n+1)}{2}$ e' multiplo di n

  $\Rightarrow$ K e' multiplo di n

  RICORDIAMO CHE $0 \leq K \leq n$

  $K=0 \rightarrow 51n = \frac{n(n+1)}{2} \Rightarrow 51 = \frac{n+1}{2} \Rightarrow n = 101$

  $K=n \rightarrow 51n = \frac{n(n+1)}{2} - n \Rightarrow n = 103$

- n pari $\quad n = 2m$

$$51 \cdot 2m = \frac{2m(2m+1)}{2} - k$$

$$102\,m = m(2m+1) - k$$

$\Rightarrow$ k è multiplo di $m = \frac{n}{2}$

$\Rightarrow$ $k = 0, \frac{n}{2}, n$

$k = m$

$$102m = m(2m+1) - m$$
$$= 2m^2$$

$102 = 2m \quad \Rightarrow \quad n = 102$

I valori possibili per n sono: 101, 102, 103.

(tecnicamente bisognerebbe verificare che si possono davvero disporre i pedoni!)

4) 16 carte (4 P, 4 C, 4 Q, 4 F)

si estraggono 6 carte

SOTTODOMANDA: prob. di ottenere esatt. 2 carte di P?

$\binom{4}{2}=6$, $\binom{12}{4} = \frac{\cancel{12}\cdot 11\cdot 10\cdot 9}{\cancel{4}\cdot \cancel{3}\cdot 2\cdot 1} = 495$.

CASI POSSIBILI: $\binom{16}{6} = \dots$

SOTTORISPOSTA: $\dfrac{495 \cdot 6}{\binom{16}{6}}$

Oss: il sottoproblema con le cuori si fa allo stesso modo.

P.I.E. $\longrightarrow$ RISPOSTA: $\dfrac{495 \cdot 6}{\binom{16}{6}} + \dfrac{495 \cdot 6}{\binom{16}{6}} - \dfrac{6 \cdot 6 \cdot 28}{\binom{16}{6}} = \dfrac{1233}{2002} \simeq 61\%$

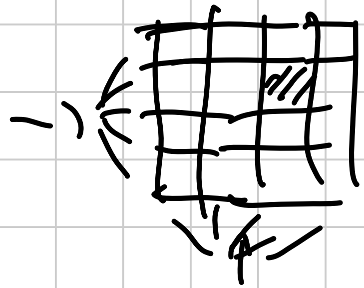
sottor. (P)   sottor. (C)

$\binom{4}{2}$ $\binom{4}{2}$ $\binom{8}{2}$

6 6 28

- EVENTI INDIPENDENTI

$$p(A \wedge B) = p(A) \cdot p(B)$$



- EVENTI INCOMPATIBILI $\left(p(A \wedge B) = 0\right)$

$$p(A \vee B) = p(A) + p(B)$$

EVENTI QUALUNQUE

$$p(A \vee B) = p(A) + p(B) - p(A \wedge B) \quad \text{(PIE)}$$

5) $A = \{1, 2, \dots, 10\}$

Quante sono le $f: A \to A$ tali che $f(f(x)) = x \quad \forall x$

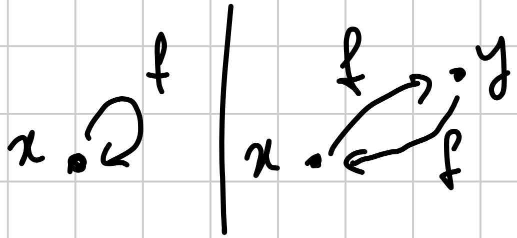
$$f \circ f = id_X$$

OSS. PRELIMINARE $\quad f$ è bigettiva (è una permutazione di A)

ogni $x \in A$ è immagine di $f(x)$

$\Rightarrow f$ è surgettiva

$\Rightarrow$ è anche iniettiva (perché A è finito)



ES: $(1)(2\ 3)(4\ 7)(5)(8\ 10)(9)(6)$

NO: $\underbrace{(1\ 4\ 7)}(2)\ \ldots$ —

RICORSIONE! Se a_n è la soluzione di questo problema con $A = \{1, \dots, n\}$ (a noi interessa a_{10})

$a_n = ?$

CASO 1

$n \xrightarrow{f} n$

numero di funzioni: a_{n-1}

CASO 2

$n-1$

numero di funzioni: a_{n-2}

$$a_n = \underbrace{a_{n-1}}_{\text{CASO 1}} + (n-1)\underbrace{a_{n-2}}_{\text{CASO 2}}$$

(ripetuto n-1 volte)

$a_0 = 1$

$a_1 = 1$

$a_2 = 2 \quad (1)(2)\,,\ (1\ 2)$

$a_3 = 2 + 2 \cdot 1 = 4 \quad \underline{(1)(2)(3)},\ \underline{(1\ 2)(3)},\ \underline{(1\ 3)(2)},\ \underline{(2\ 3)(1)}$

$a_4 = 4 + 3 \cdot 2 = 10$

$a_5 = 10 + 4 \cdot 4 = 26$

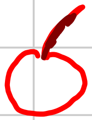
$a_6 = 26 + 5 \cdot 10 = 76$

$\vdots$

$a_{10} = \quad 9496 \quad$ (SUPERSICURO)

6) 4 mele & 7 arance $\longrightarrow$ 4 amici

<u>OSS</u>: mele e arance si distribuiscono indipendentemente

 MELE

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4$$ ← numero di mele

$$0 \leq x_i \left(\leq 4\right)$$

PARTIZIONARE $\overset{n}{4}$ COME SOMMA DI $\overset{k}{4}$ INTERI ≥ 0

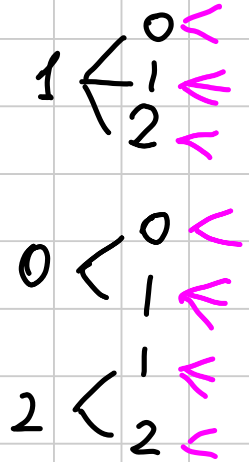
FORMULA: $\binom{n+k-1}{k-1}$

MELE: $\binom{4+4-1}{4-1} = \binom{7}{3} = 35$ modi

 ARANCE: $n = 7$ $\quad \binom{7+4-1}{4-1} = \binom{10}{3} = \frac{10 \cdot \cancelto{3}{9} \cdot \cancelto{4}{8}}{\cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 1} = 120$ modi

Per indipendenza: $35 \cdot 120 = 4200$.

7) Contare le stringhe (8 caratteri) 0, 1, 2



RICORSIONE

x_n = numero di stringhe di lungh. n
che cominciano con 1

y_n = ... con 0

= .... con 2

$$x_n = \underset{10\ldots}{y_{n-1}} + \underset{11\ldots}{x_{n-1}} + \underset{12\ldots}{y_{n-1}} = x_{n-1} + 2y_{n-1} \qquad (1)$$

$$y_n = \underset{00}{y_{n-1}} + \underset{01}{x_{n-1}} = x_{n-1} + y_{n-1} \qquad (2)$$

$x_1 = 1$
$y_1 = 1$

$x_2 = 1 + 2 \cdot 1 = 3$
$y_2 = 1 + 1 = 2$
etc.

POSSIBILITA' 1:

$$x_{n-1} = y_n - y_{n-1}$$

(2)

$$x_n = y_{n+1} - y_n$$

e sostituisco nella (1)

$$(y_{n+1} - y_n) = (y_n - y_{n-1}) + 2y_{n-1}$$

$$y_{n+1} = 2y_n + y_{n-1}$$

$y_1 = 1$ (0)

$y_2 = 2$ (01, 00)

$\vdots$

$y_8 = \dots$

$y_9 = \dots$

Per la (2)

$$x_8 = y_9 - y_8$$

8) Numeri di 7 cifre 1, 2, 3, 4 con numero disp. di cifre 1

MODO 1 Se uso k cifre 1 .... ?

$$\underbrace{\binom{7}{k}}_{\text{disposizione delle cifre 1}} \cdot \underbrace{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \ldots}_{7-k \text{ VOLTE}} = \binom{7}{k} \cdot 3^{7-k}$$

$$\sum_{\substack{1 \le k \le 7 \\ k \text{ dispari}}} \binom{7}{k} \cdot 3^{7-k}$$

$$\sum_{k=0}^{7} \binom{7}{k} 3^{7-k} = (1+3)^7$$

$$\sum_{k=0}^{7} \binom{7}{k} \cdot 3^{7-k} \cdot (-1)^k = (-1+3)^7$$

K PARI : si sommano

K DISPARI : si cancellano

SOTTRAENDO MEMBRO A MEMBRO

$$2\left(\sum \text{termini dispari}\right) = 4^7 - 2^7$$

SOL : $\dfrac{4^7 - 2^7}{2} = 8128$

MODO 2: Ricorsione

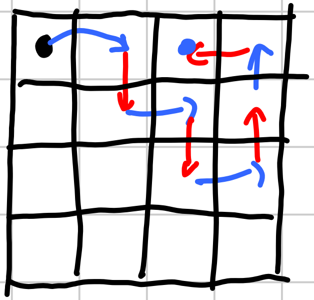
x_n = numero di numeri con n cifre
e un numero dispari di 1

y_n = - - - - pari di 1

ESERCIZIO: Concludere ...

9)

A perde



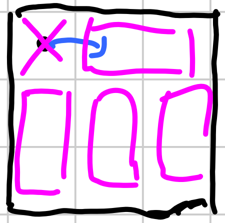
n PARI

B PERDE

B deve sempre iniziare una nuova tessera

A ha sempre mezza tessera ancora libera

n DISPARI $\quad n^2 - 1 \to$ PARI



B può sempre muovere

A perde.

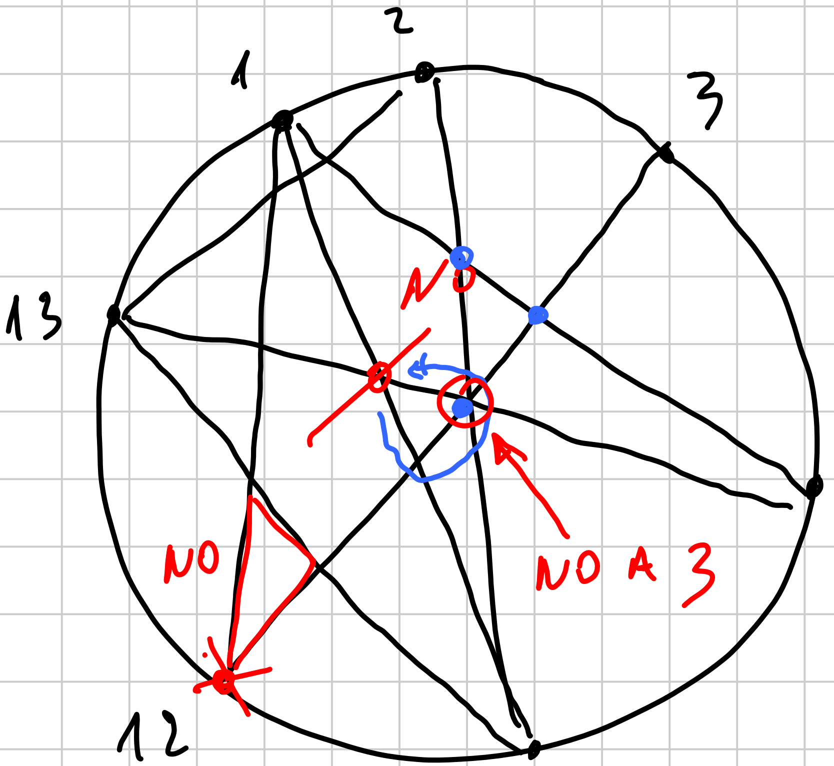
21. **Il palio di Bananopolis** Coppa Fermat 2007 **70 punti**

In epoca antica l'attuale Repubblica delle Banane era governata da sovrani autorevoli. Il fondatore circondò la capitale Bananopolis con possenti mura circolari nelle quali si aprivano 13 porte. Ogni coppia di porte era unita da una strada rettilinea. Tali strade erano dette "vie sacre". La disposizione delle porte faceva sì che in nessun incrocio confluissero 3 o più vie sacre.

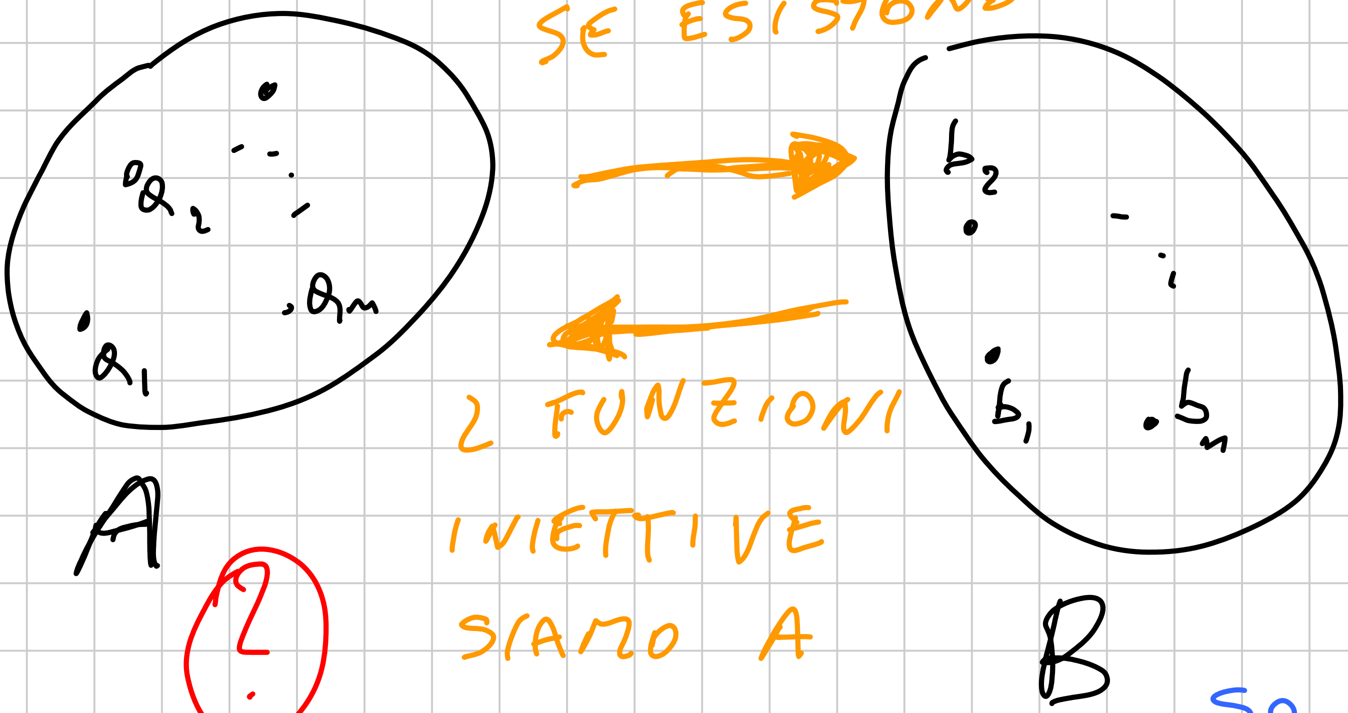
Dopo la costruzione della città l'oracolo disse che, per ingraziarsi il favore degli dei, ogni anno si sarebbe dovuto correre un palio. La pista su cui correre doveva essere un triangolo i cui lati erano tratti di vie sacre ed i cui vertici non erano in corrispondenza delle porte (intendendo come buoni anche i triangoli attraversati da altre vie sacre oltre a quelle su cui giacciono i lati). Ogni anno, inoltre, il palio si doveva correre su un tracciato diverso: finiti tutti i possibili tracciati, il regno sarebbe crollato.

Determinare quanti anni è durato questo antico regno.

R 1716



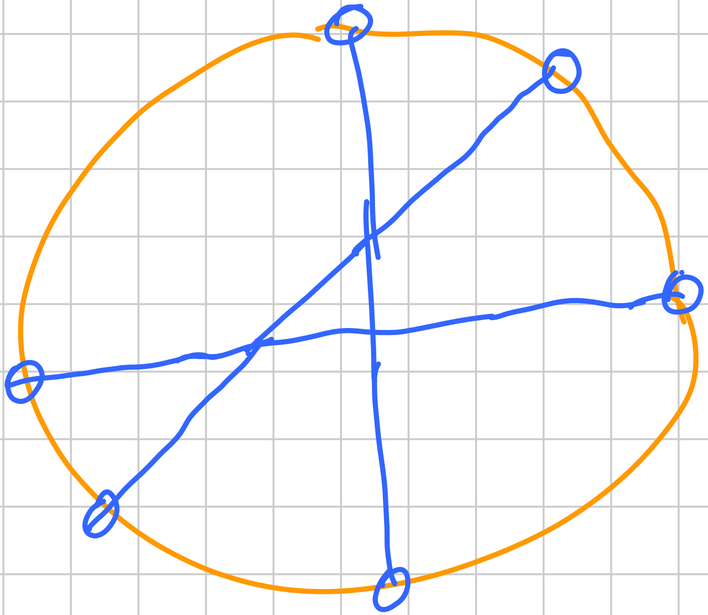
- 13 PUNTI SULLA CIRC
- MAI INTERSEZIONI A 3 TRA LE CORDE
- DETERMINARE IL N° DI TRINGOLI CON TUTTI E 3 I PUNTI DI VERTICE INTERNI ALLA CIRCONF.



SE ESISTONO 2 FUNZIONI INIETTIVE SIAMO A POSTO

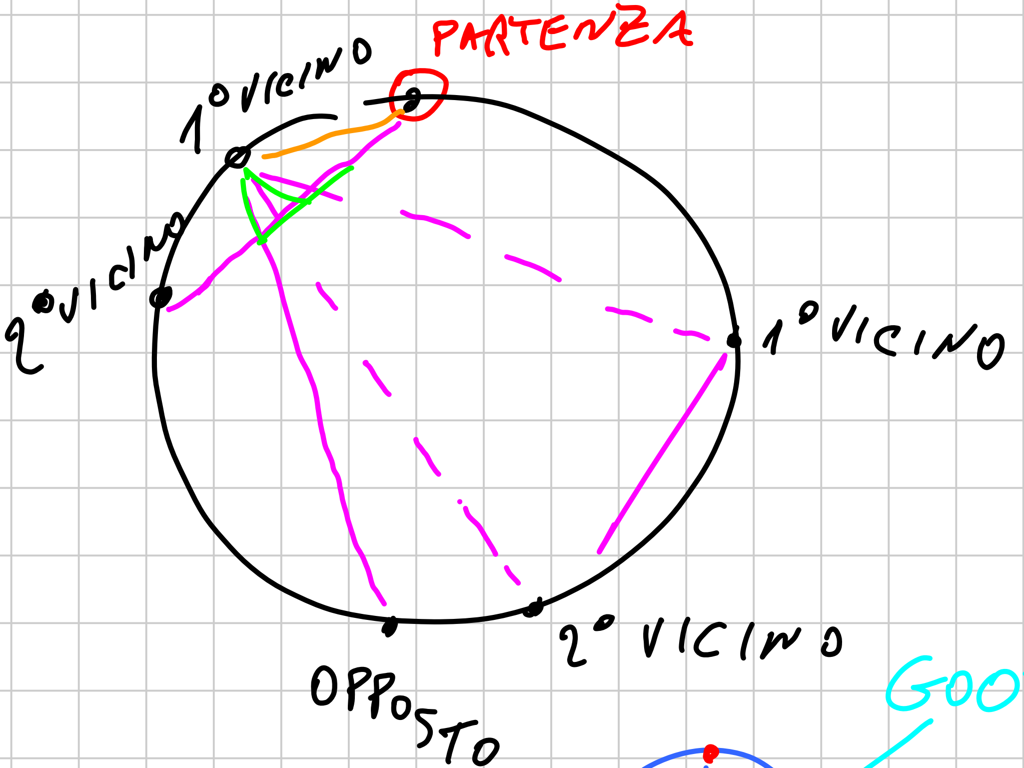
?

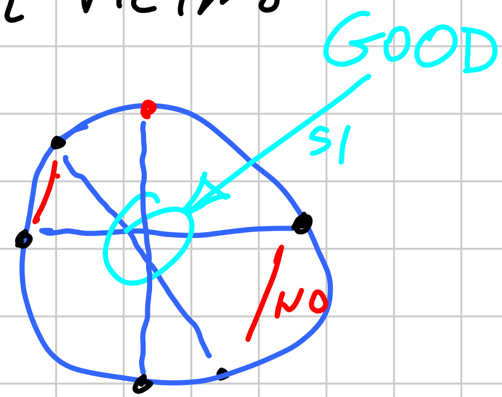
SO RISOLVERE IL PROBLEMA



1 TRIANGOLO "SI VEDE" CORRISPONDE A 6 PUNTI DISTINTI

$$\boxed{C_{13,6}} = \text{RISP}$$





1) NON HA SOL
CON VERTICI
DEL TRIANG
TUTTI INTERNO

2) 2 SOTTOCASI
SENZA SOLUZIONE

3) UN CASO NOBBUONO
UN CASO BUONO