

Problemi di aritmetica

Bologna, 15/10/2013

1. Qual è il più piccolo numero intero positivo composto solo da cifre 5 e 7 che sia multiplo di 9?
2. Determinare tutti i numeri interi x tali che $x^4 \equiv 13 \pmod{17}$.
3. Determinare tutte le coppie (x, y) di numeri interi tali che

$$7x - 5y = 2.$$

4. Qual è il più piccolo intero positivo n tale che $n + 2$ sia multiplo di 11, $n + 4$ sia multiplo di 13 e $n + 6$ sia multiplo di 15?
5. Dimostrare il criterio di divisibilità per 7: un numero è multiplo di 7 se e solo se è multiplo di 7 il numero ottenuto rimuovendo la cifra delle unità e sottraendola due volte da ciò che rimane.
Per esempio, 182 è multiplo di 7 perché $18 - 2 \cdot 2 = 14$ lo è.
6. Qual è il più grande fattore primo del numero che in base 238 si scrive "143"?
7. Determinare tutte le coppie (x, y) di numeri naturali tali che

$$2^x + 1 = 3^y.$$

8. Dimostrare che l'equazione diofantea

$$y^2 = x^5 - 4$$

non ha soluzioni intere.

9. Dimostrare che per ogni primo p esistono infiniti numeri naturali n tali che

$$p \mid 2^n - n.$$