Incontri olimpici 2013

Andrea Bianchi

14 ottobre 2013

Esercizio 1. *Abbiamo una sequenza di numeri reali positivi* $a_1, a_2, \cdots, a_{10}$ *in progressione geometrica. Sappiamo che* $a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9 = 1$*, mentre* $a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + a_{10} = 2$*. Quanto vale* a_5*?*

Esercizio 2. *Sia* α *la più piccola delle due radici reali del polinomio* $x^2 - 4x + 2 = 0$*. Determinare le prime tre cifre dopo la virgola nella scrittura (in base 10) del numero*

$$\alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^{2013}$$

Esercizio 3. *Sia* $p(x) = x^{20} + a_{19}x^{19} + a_{18}x^{18} + \cdots + a_1 x + a_0$ *un polinomio monico a coefficienti interi. Sappiamo che per tutti gli interi* k *tali che* $1 \leq k \leq 20$ *si ha* $p(k) = 2k$*. Quali sono le ultime* 3 *cifre (in base* 10*) di* $p(21)$*?*

Esercizio 4. *Siano* $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ *le radici del polinomio* $x^4 - 10x^3 + 15x - 3$*. Calcolare il valore di*

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\delta}$$

Esercizio 5. *Siano* α, β, γ *le radici del polinomio* $x^3 - 3x^2 + 2x - 1$*. Trovare un polinomio le cui radici sono* $\alpha\beta, \beta\gamma, \alpha\gamma$*, e un altro polinomio le cui radici sono* $\alpha^2, \beta^2, \gamma^2$*.*

Esercizio 6. *Dimostrare la seguente disuguaglianza, per ogni* $n \geq 1$ *intero positivo*

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} \leq \frac{3}{4}$$

Esercizio 7. *Siano* $a \geq b \geq c \geq d \geq e \geq f \geq g$ *numeri reali. Dimostrare che vale la seguente disuguaglianza*

$$a^2 - b^2 + c^2 - d^2 + e^2 - f^2 + g^2 \geq (a - b + c - d + e - f + g)^2$$

Esercizio 8. *Siano* a, b *numeri reali positivi tali che*

$$a^{2011} + b^{2011} = a^{2013} + b^{2013}$$

Dimostrare che $a^2 + b^2 \leq 2$*.*

Esercizio 9. *Siano* x, y, z *numeri reali. Dimostrare che vale la seguente disuguaglianza*

$$\left(x^2 + 2\right)\left(y^2 + 2\right)\left(z^2 + 2\right) \geq 3\left(x + y + z\right)^2$$