ESERCITAZIONE DI ALGEBRA

Titolo nota 14/10/2013

9) VERSIONE CORRETTA.

DATO UN NATURALE $n \geq 1$ VALE LA SEGUENTE DISUGUAGLIANZA

$$\frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n} \leq \frac{3}{4}$$

10) UN PARALLELEPIPEDO HA LATI LUNGHI a, b, b, CON $a+b=1$. QUANTO VALE AL MASSIMO IL SUO VOLUME?

11) DATI $a, b, c > 0$ VALE LA SEGUENTE DISUGUAGLIANZA

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$$

1) $a_1, \dots, a_{10} > 0$ in progr. geometrica

$a_1 + a_3 + \dots + a_9 = 1 \qquad a_2 + a_4 + \dots = 2$

$a_i = r \cdot s^i$ per opportuni r, s

$a_2 = s a_1 \qquad a_4 = s a_3 \quad \dots \qquad a_{10} = s a_9$

$s(\underbrace{a_1 + \dots + a_9}_{1}) = \underbrace{a_2 + \dots + a_{10}}_{2} \qquad s = 2$

$a_1 + \dots + a_9 = r \cdot (2 + 2^3 + 2^5 + 2^7 + 2^9) = 1$

2) $x^2 - 4x + 2$ $\qquad 2 \pm \sqrt{2}$ radici del p.l.

$\alpha = 2 - \sqrt{2}$

STUDIARE $\quad \alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^{2013}$

$$\alpha \cdot \frac{1 - \alpha^{2013}}{1 - \alpha} = \frac{\alpha - \alpha^{2014}}{1 - \alpha} =$$

$$= \boxed{\frac{\alpha}{1-\alpha}} - \boxed{\frac{\alpha^{2014}}{1-\alpha}}$$

$$\sqrt{2}$$

$0 < 2 - \sqrt{2} < 0{,}6$

$0 < \alpha^{2014} < (0{,}6)^{2014}$

$\sqrt{2} = 1,\boxed{414}19$ $\qquad\qquad$ $\dfrac{\alpha^{2023}}{1-\alpha} < 0,0001$

---

3) $p(x) = x^{20} + a_{19}x^{19} + \dots + a_1 x + a_0$

$p(1) = 2 \qquad p(2) = 4 \qquad p(3) = 6 \quad \dots \quad p(20) = 40$

$p(k) = 2k$ per $k = 1 \dots 20$

Sia $q(x) = p(x) - 2x$ $\qquad$ q ha grado 20

$1, 2, \dots 20$ sono radici di q

q è monico

$$q(x) = \cdot (x-1)(x-2) \cdot \ldots \cdot (x-20)$$

$$p(x) = q(x) + 2x = (x-1)\cdot(x-2)\cdot\ldots(x-20) + 2x$$

$$\underbrace{20!}_{\text{TERMINA CON ALMENO 3 ZERI}} + 42$$

Le ultime 3 cifre di $p(21)$ sono 042

4) $$x^4 - 10x^3 + 15x - 3 = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta) =$$
$$= x^4 - (\alpha+\beta+\gamma+\delta)x^3 + (\alpha\beta+\alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma+\beta\delta+\gamma\delta)x^2 +$$
$$-(\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta)x + \alpha\beta\gamma\delta$$
$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\delta} = \frac{\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta}{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{-15}{-3} = 5$$

5) $$x^3 - 3x^2 + 2x - 1$$ α, β, γ zalici
$$(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma) = x^3 - (\alpha+\beta+\gamma)x^2 + (\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x - \alpha\beta\gamma$$

$\alpha+\beta+\gamma = +3$

$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha = 2$

$\alpha\beta\gamma = 1$

UN POL. LE CUI RADICI SIANO $\alpha\beta, \beta\gamma, \gamma\alpha$ È

$(x-\alpha\beta)(x-\beta\gamma)(x-\gamma\alpha) =$

$= x^3 - \underbrace{(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)}_{-2}x^2 + \underbrace{(\alpha\beta^2\gamma+\alpha^2\beta\gamma+\alpha\beta\gamma^2)}_{\underbrace{\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)}_{3}}x \underbrace{-\alpha^2\beta^2\gamma^2}_{-1}$

$x^3 - 2x^2 + 3x - 1$

2ª PARTE DEL 5 X CASA

6) INDUZIONE $\qquad \frac{1}{2} \leq \frac{3}{4} \qquad n=1$ la tesi è vera

$$S_n = \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n} \qquad S_n \leq \frac{3}{4}$$

$$S_n < S_{n+1}$$

$$S_{n+1} = S_n \underbrace{\boxed{- \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2}}}_{>0}$$

TESI PIÙ FORTE

$$S_n \le \frac{3}{4} - \frac{1}{4n}$$

IDEA: DIM. CHE $S_n \le T_n \le$ costante assegnata

$$S_1 = \frac{1}{2} \le \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = 1/2$$

$$S_{n+1} = S_n + \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} \le \frac{3}{4} \boxed{- \frac{1}{4n} + \frac{1}{(2n+1)(2n+2)}}$$

$$\boxed{\le -\frac{1}{4(n+1)}}$$

$$\boxed{-\frac{1}{4n}} + \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} \le -\frac{1}{4(n+1)}$$

$$\frac{1}{4}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) \geq \frac{1}{(2n+1)(2n+2)}$$

$$\frac{1}{4n(n+1)} \geq \frac{1}{4n^2+6n+2}$$

$$\frac{3}{4}-\varepsilon_n \geq S_n \qquad \varepsilon_n - \varepsilon_{n+1} \geq \frac{1}{(2n+1)(2n+2)}$$

---

7) $a \geq b \geq c \geq d \geq e \geq f \geq g$

$$a^2-b^2+\ldots+g^2 \geq (a-b+\ldots\ldots+g)^2$$

$a^2+b^2+\ldots+g^2+$ altra roba doppi prodotti

$a \geq b \geq c$

$$a^2 - b^2 + c^2 \overset{?}{\geq} (a - b + c)^2$$

$$a^2 - b^2 \overset{?}{\geq} (a - b + c)^2 - c^2$$

$$(a-b)(a+b) \geq (a-b)(a-b+2c) \qquad \text{OK}$$

$$a+b \qquad a-b+2c \qquad 2b-2c \geq 0$$

$$a \geq b \geq c \geq d \geq e$$

$$\underbrace{a^2 - b^2 + c^2}\, - d^2 + e^2 \overset{?}{\geq} (a-b+c-d+e)^2$$

$$\vee|$$

$$(a-b+c)^2 - d^2 + e^2 \overset{?}{\geq} \left((a-b+c) - d + e\right)^2$$

È VERO CHE $a - b + c \geq d \geq e$

SÌ SÌ

PERCHÉ $c \geq d$

$a - b \geq 0$

IL CASO CON 7 (O CON 9) È UGUALE.

10) $a + b = 1$, $a, b > 0$. MASSIMIZZARE ab^2.

1ª SOL NON OLIMPICA

$a = 1 - b$

MASSIMIZZARE $(1-b)b^2$ $b \in (0,1)$ DERIVO E PONGO DERIVATA $= 0$

2ª SOLUZIONE

$ab^2 \leq K$ PRODOTTO $\leq$ QUALCOSA $\Rightarrow$ PROVIAMO AM-GM

$$\sqrt[3]{ab^2} \leq \frac{a+2b}{3}$$

$$ab^2 \leq \left(\frac{a+2b}{3}\right)^3 = \left(\frac{1+b}{3}\right)^3 \underset{b\leq 1}{\leq} \left(\frac{2}{3}\right)^3$$

QUI USO $a+b=1$

È IN REALTÀ
UNA DISUGUAGLIANZA STRETTA

CONSIDERO $\left(a, \frac{1}{2}b, \frac{1}{2}b\right)$

$$\sqrt[3]{\frac{ab^2}{4}} \leq \frac{a+\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}b}{3} = \boxed{\frac{1}{3}}$$

$$\frac{ab^2}{4} \leq \frac{1}{27} \qquad ab^2 \leq \frac{4}{27} \qquad a=\frac{1}{3} \quad b=\frac{2}{3}$$

ES. $\left(a, \frac{1}{4}b, \frac{3}{4}b\right)$

$$\sqrt[3]{\frac{3}{16}ab^2} \leq \frac{a+b}{3} = \frac{1}{3}$$

8) $a, b > 0$ $\qquad a^{2011} + b^{2011} = a^{2013} + b^{2013}$

ALLORA $\quad a^2 + b^2 \leq 2 \qquad\qquad a \geq b$

$$(a^2, b^2) \qquad (a^{2011}, b^{2011})$$

$$2\left(a^{2013} + b^{2013}\right) \geq \boxed{(a^2+b^2)\left(a^{2011}+b^{2011}\right)}$$

$$(a^2+b^2)\left(a^{2011}+b^{2011}\right) = \boxed{a^{2013} + b^{2013}} + \underbrace{a^2 b^{2011} + b^2 a^{2011}}_{\leq a^{2013} + b^{2013}}$$

11) $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}\geq\dfrac{3}{2}$

CASI DI $=$

$a=b=c$

$$\frac{a}{b+c}+1=\frac{\boxed{a+b+c}}{b+c}$$

$$\frac{a+b+c}{b+c}+\frac{a+b+c}{c+a}+\frac{a+b+c}{a+b}\geq\frac{9}{2}$$

$$(a+b+c)\underbrace{\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right)}_{3}\geq\frac{\cancel{9}^{\,3}}{2}$$

$$\underbrace{\hspace{6cm}}_{AM \geq HM}$$

$$\left(\frac{1}{b+c} \, , \, \frac{1}{c+a} \, , \, \frac{1}{a+b} \right)$$

$$AM = \frac{\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b}}{3}$$

$$HM = \frac{3}{2a+2b+2c}$$

MI RIMANE

$$(a+b+c) \cdot \frac{3}{2a+2b+2c} \overset{=}{\geq} \frac{3}{2}$$

ABBIAMO FINITO

4) <u>1^ DIM</u> $ax^2+bx+c \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \Delta \leq 0$

$(x^2+2)(y^2+2)(z^2+2)-3(x+y+z)^2$ è di 2° grado in x

$\Delta_x \leq 0$ MA Δ_x DIPENDE SOLO DA y E z

ED È ANCORA DI 2° GRADO

<u>2^ DIM</u> QUALI SONO I CASI DI $=$?

$x=y=z=1$

(x^2+2) $\qquad 2=1+1$

$(x^2+1+1)(y^2+1+1)(z^2+1+1) \geq \sim$

$(x^2, 1, 1) \quad (y^2, 1, 1)$

x^2y^2+1+1 OPPURE x^2+y^2+1

x^2, y^2, z^2 SONO 3 NUMERI

PER PIGEONHOLE CE NE SONO 2 "DALLA STESSA PARTE RISPETTO A 1"

$$(x^2+1+1)(y^2+1+1) \geq 3(x^2+y^2+1)$$

$$(x^2+2)(y^2+2)(z^2+2) \geq \cancel{3}(x^2+y^2+1)(1+1+z^2) \geq \cancel{3}(x+y+z)^2$$

CAUCHY

$$\big((x,y,1)\cdot(1,1,z)\big)^2 \leq \|(x,y,1)\|^2 \cdot \|(1,1,z)\|^2$$