Incontri Olimpici 2013

Problemi di Geometria

Bologna, 13 ottobre 2013

Appunti redatti da Ercole Suppa

Sommario

In questo documento sono riportate le soluzioni dei problemi di geometria risolti da Samuele Mongodi.

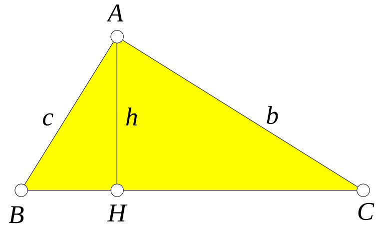
Problema 1. *Dato un triangolo avente i cateti di lunghezza b e c e l'altezza relativa all'ipotenusa lunga h, mostrare che*

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$$

Soluzione.

Indicata con a l'ipotenusa risulta $bc = ah$ ed applicando il teorema di Pitagora abbiamo che:

$$\frac{1}{h^2} = \frac{a^2}{b^2c^2} = \frac{b^2+c^2}{b^2c^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$$



□

Problema 2. *Dato un triangolo ABC, si prenda un punto P, esterno o interno al triangolo. Da P si conducano le perpendicolari ai lati AB, BC, CA del triangolo, in modo da incontrare i lati (o i loro prolungamenti) in F, E, D rispettivamente.*

(a) Dimostrare che $AF^2 + BE^2 + CD^2 = BF^2 + CE^2 + AD^2$.

(b) Sia ora ABC equilatero e P interno al triangolo. Dimostrare che, con questa ulteriore ipotesi, $AF + BE + CD = BF + CE + AD$.

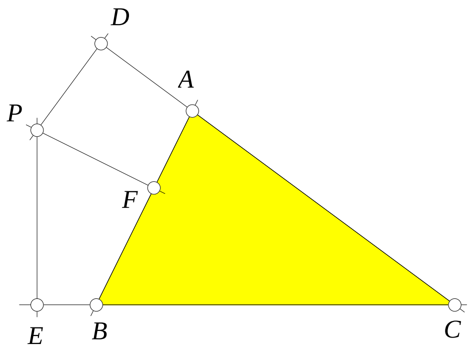
Soluzione.

(a) Dal teorema di Pitagora segue che:

$$PD^2 + DA^2 = PF^{+}AF^2 \qquad (1)$$
$$PF^2 + FB^2 = PE^{+}EB^2 \qquad (2)$$
$$PE^2 + EC^2 = PD^{+}DC^2 \qquad (3)$$

e sommando (1), (2) e (3) abbiamo

$$AF^2{+}BE^2{+}CD^2 = BF^2{+}CE^2{+}AD^2$$

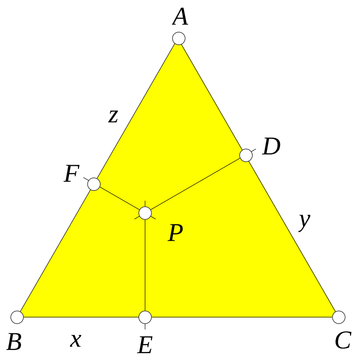


(b) Posto $AB = \ell$, $BE = x$, $CD = y$, $AF = z$ applicando la proprietà dimostrata in (a) abbiamo:

$$x^2 + y^2 + z^2 = (\ell - x)^2 + (\ell - y)^2 + (\ell - z)^2 \Rightarrow$$
$$2\ell(x + y + z) = 3\ell^2 \quad \Rightarrow$$
$$x + y + z = \frac{3}{2}\ell$$

da cui segue che

$$AF + BE + CD = BF + CE + AD$$



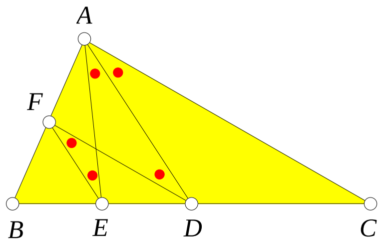
$\square$

Problema 3. *E' dato un triangolo ABC con $BC = 2 \cdot AB$. Indichiamo con D il punto medio di BC e con E il punto medio di BD. Dimostrare che AD biseca $C\widehat{A}E$.*

Soluzione.

Detto F il punto medio di AB, per il piccolo teorema di Talete, abbiamo $EF \parallel AB$. Poichè $AB = BD$ si ha che $AF = ED$, quindi $ADEF$ è un trapezio isoscele. Pertanto

$$E\widehat{A}D = A\widehat{D}F \qquad (1)$$



Dato che F è il punto medio di AB e D è il punto medio di BC si ha che $FD \parallel AC$ (piccolo teorema di Talete) , per cui

$$A\widehat{D}F = D\widehat{A}C \qquad (2)$$

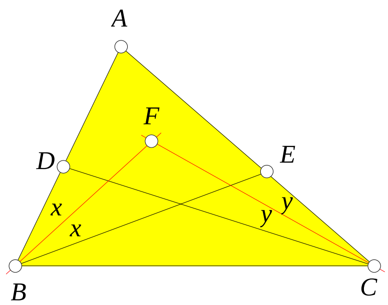
Da (1) e (2) segue che $E\widehat{A}D = D\widehat{A}C$. $\square$

Problema 4. *Dato un triangolo ABC, si prendano due punti D su AB ed E su AC. Indichiamo con F il punto di intersezione delle bisettrici degli angoli $A\widehat{B}E$ e $A\widehat{C}D$. Dimostrare che $B\widehat{D}C + B\widehat{E}C = 2 \cdot B\widehat{F}C$.*

Soluzione.

Posto $A\widehat{B}F = F\widehat{B}E = x$ ed $D\widehat{C}F = F\widehat{C}A = y$ abbiamo:

$$B\widehat{E}C = 180° - C - (B - 2x) = A + 2x \qquad (1)$$
$$B\widehat{D}C = 180° - B - (C - 2y) = A + 2y \qquad (2)$$



Sommando (1) e (2) otteniamo

$$B\widehat{E}C + B\widehat{D}C = 2(A + x + y) \qquad (3)$$

D'altra parte

$$BFC = 180° - (B - x) - (C - y) = A + x + y \quad (4)$$

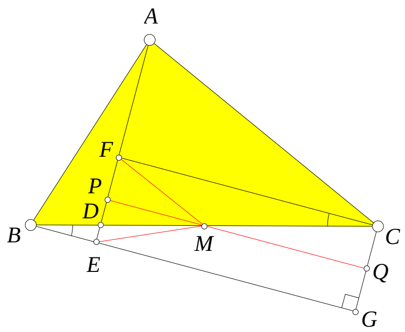
Da (3) e(4) segue che $B\widehat{D}C + B\widehat{E}C = 2 \cdot B\widehat{F}C$. $\square$

Problema 5. *Dato un triangolo ABC, si prenda un punto D su BC. Si costruiscano due segmenti BE e CF perpendicolari alla retta AD. Indichiamo con M il punto medio di BC. Dimostrare che $ME = MF$.*

Soluzione.

Sia G la proiezione ortogonale di C su BE e siano P, Q i punti di intersezione della parallela per M a BE con AE e CG rispettivamente. Dal piccolo teorema di Talete applicato al triangolo BCG segue che $CQ = QG$. Pertanto

$$FP = CQ = QG = PE \tag{1}$$



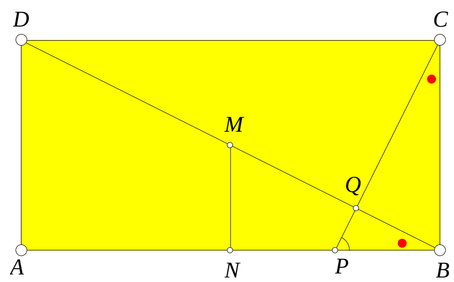
Dalla (1) segue che i triangoli $\triangle FPM$ e $\triangle EPM$ sono congruenti (per il primo criterio) per cui $MF = ME$. $\square$

Problema 6. *E' dato un rettangolo $ABCD$ con $AB = 2 \cdot BC$. Si prenda un punto P su AB tale che $BP = \frac{1}{4}AB$. Dimostrare che $BD \perp CP$.*

Soluzione.

Siano N, M i punti medi di AB e BD rispettivamente e sia $Q = BD \cap CP$. Essendo $MN = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{4}AB = BP$, $NB = \frac{1}{2}AB = BC$ e $M\widehat{N}B = P\widehat{B}C = 90°$ i triangoli $\triangle MNB$ e $\triangle PBC$ sono congruenti. Pertanto:

$$P\widehat{B}Q = N\widehat{B}M = P\widehat{C}B \quad \Rightarrow$$
$$Q\widehat{P}B + P\widehat{B}Q = Q\widehat{P}B + P\widehat{C}B = 90° \quad \Rightarrow$$
$$BD \perp CP$$

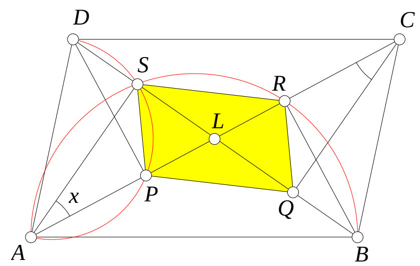


$\square$

Problema 7. *Dimostrare che le proiezioni dei vertici di un parallelogramma sulle sue diagonali sono i vertici di un parallelogramma simile al primo.*

Soluzione.

Si dimostra facilmente che:



(1) $\triangle ASL \cong \triangle CQL \Rightarrow SL = LQ$;

(2) $\triangle DPL \cong \triangle BRL \Rightarrow PL = LR$;

(3) da (1) e (2) segue che

$$\triangle SLP \cong \triangle QLR$$

per cui $PS = QR$ e

$$P\widehat{S}L = R\widehat{Q}L \Rightarrow PS \parallel QR$$

In modo analogo si prova che $PQ \parallel RS \Rightarrow PQRS$ è un parallelogramma.

Posto $S\widehat{A}B = x$, dai quadrilateri ciclici $APSD$, $ASRB$ e dal teorema della corda segue che:

$$\frac{SP}{SR} = \frac{AD \cdot \sin x}{AB \cdot \sin x} = \frac{AD}{AB} \tag{4}$$

$$P\widehat{S}R = P\widehat{S}Q + Q\widehat{S}R = D\widehat{A}P + B\widehat{A}R = A\widehat{D}B \tag{5}$$

$$S\widehat{P}Q = 180^\circ - P\widehat{S}R = 180^\circ - A\widehat{D}B = D\widehat{A}B \tag{6}$$

Da (4),(5) e (6) segue che $ABCD \sim PQRS$. $\square$

Problema 8. *Sia $ABCD$ un parallelogramma. Sia r una generica retta passante per A, e siano E, F, G i piedi delle perpendicolari ad r condotte da B, C, D rispettivamente. Dimostrare che:*

(a) Se r è esterna al parallelogramma, allora $CF = BE + DG$.

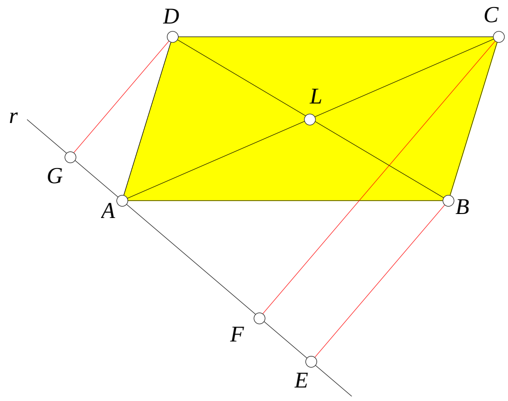
(b) Se r taglia il parallelogramma, allora $CF = |BE - DG|$.

Soluzione.

Sia $L = AC \cap BD$ e sia M la proiezione ortogonale di L sulla retta r.

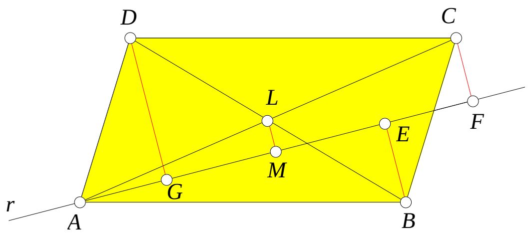
(a) Poiché $AL = LG$ per il teorema di Talete $LM = \frac{1}{2}CF$ e $GM = ME$. Nel trapezio $DGBE$ la corda LM congiunge i punti medi dei lati obliqui BD, GE quindi, per una nota proprietà $LM = \frac{1}{2}(BE + DG)$. Pertanto:

$$\frac{1}{2}CF = \frac{1}{2}(BE + DG) \quad \Rightarrow$$
$$CF = BE + DG$$



(b) Assumiamo WLOG che $DG > BE$. Poiche $AL = LG$ per il teorema di Talete $LM = \frac{1}{2}CF$. Inoltre nel trapezio $DGBE$ per una nota proprietà il segmento LM che congiunge i punti medi delle diagonali è uguale alla semidifferenza delle basi (dimostrarlo!), quindi $LM = \frac{1}{2}(DG - BE)$. Pertanto:

$$\frac{1}{2}CF = \frac{1}{2}(DG - BE) \quad \Rightarrow$$
$$CF = DG - BE = |BE - DG|$$



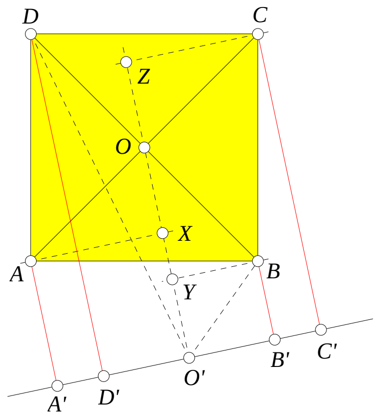
$\square$

Problema 9. *Sia $ABCD$ un quadrato di area S ed r una retta esterna al quadrato. Indichiamo con A', B', C', D' i piedi delle perpendicolari ad r condotte dai vertici A, B, C, D rispettivamente. Dimostrare che:*

$$A'A^2 + C'C^2 - 2 \cdot B'B \cdot D'D = B'B^2 + D'D^2 - 2 \cdot A'A \cdot C'C = S$$

Soluzione.

Sia $O = AC \cap BD$, sia O' la prioezione ortogonale di O sulla retta r e siano X, Y, Z le proiezioni di A, B, C su OO'.



Poichè O è il punto medio di AC e BD abbiamo $AA' + CC' = BB' + DD' = 2 \cdot OO'$.

Pertanto

$$(AA' + CC')^2 = (BB' + DD')^2$$

da cui, sviluppando i quadrati, otteniamo

$$A'A^2 + C'C^2 - 2 \cdot BB' \cdot DD' = B'B^2 + D'D^2 - 2 \cdot AA' \cdot CC'$$

D'altra parte, mediante l'identità $x^2 + y^2 = 2\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{x-y}{2}\right)^2$, abbiamo

$$A'A^2 + C'C^2 = 2 \cdot O'O^2 + 2 \cdot OX^2 \tag{1}$$

mentre usando l'identità $xy = \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 + \left(\frac{x-y}{2}\right)^2$ abbiamo

$$BB' \cdot DD' = O'O^2 - OY^2 \tag{2}$$

Da (1) e (2), osservato che $OX = BY$ (dato che $\triangle AXO \cong \triangle BYO$) abbiamo:

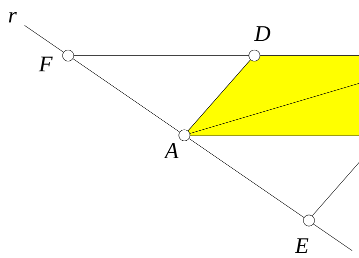
$$\begin{aligned} & A'A^2 + C'C^2 - 2 \cdot BB' \cdot DD' = \\ &= 2\left(OX^2 + OY^2\right) = \\ &= 2\left(BY^2 + OY^2\right) = \\ &= 2 \cdot OB^2 = \\ &= AB^2 = \\ &= S \end{aligned}$$

□

Problema 10. *Sia $ABCD$ un parallelogramma. Sia r una retta passante per A esterna al parallelogramma, siano E, F i punti di intersezione fra r e i prolungamenti di CB e CD rispettivamente. Dimostrare che:*

$$CB \cdot CE + CD \cdot CF = AC^2 + AE \cdot AF$$

Soluzione.



Dal teorema di Stewart applicato al triangolo $\triangle FEC$ abbiamo

$$EF\left(AC^2 + AF \cdot AE\right) = AF \cdot CE^2 + AE \cdot CF^2 \Rightarrow$$
$$AC^2 + AF \cdot AE = \frac{AF}{EF} \cdot CE^2 + \frac{AE}{EF} \cdot CF^2 \tag{1}$$

Dalle similitudini $\triangle FAD \sim \triangle FEC$ e $\triangle AEB \sim \triangle FAD$ segue che

$$\frac{AF}{EF} = \frac{CB}{CE}, \quad \frac{AE}{EF} = \frac{CD}{CF} \tag{2}$$

Sostituendo (2) nella (1) abbiamo

$$CB \cdot CE + CD \cdot CF = AC^2 + AE \cdot AF$$

$\square$

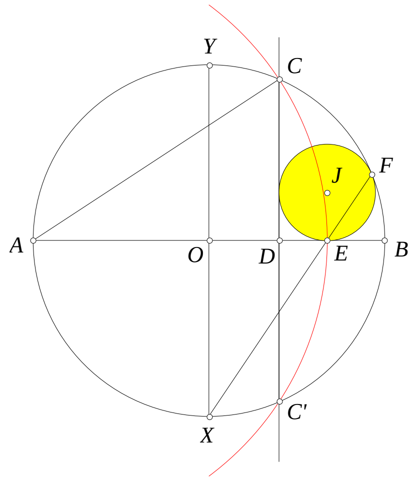
Problema 11. *Data una circonferenza γ, sia AB un suo diametro, D un punto di tale diametro, CC' la corda perpendicolare ad AB passante per D. La circonferenza γ', tangente a DA, a CD e a γ, tocca DA nel punto E.*

(a) Mostrare che $AE = AC$.

(b) Determinare quindi la costruzione geometrica per disegnare γ'.

Prima soluzione.

(a) Indichiamo con J il centro della circonferenza γ'. Posto $AB = 2R$, $AD = a$ e $JE = x$, dal Teorema di Pitagora abbiamo:



$$
\begin{gathered}
OE^2 + JE^2 = OJ^2 \quad \Leftrightarrow \\
(a + x - R)^2 + x^2 = (R - x)^2 \quad \Leftrightarrow \\
(a + x - R)^2 - (R - x)^2 + x^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \\
a(a + 2x - 2R) + x^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \\
x^2 + 2ax + a^2 - 2aR = 0 \quad \Leftrightarrow \\
x = -a + \sqrt{2aR}
\end{gathered}
$$

Pertanto, tenuto conto del primo teorema di Euclide, abbiamo:

$$AE = AD + DE = a + \left(-a + \sqrt{2aR}\right) = \sqrt{2aR} = \sqrt{AB \cdot AD} = AC$$

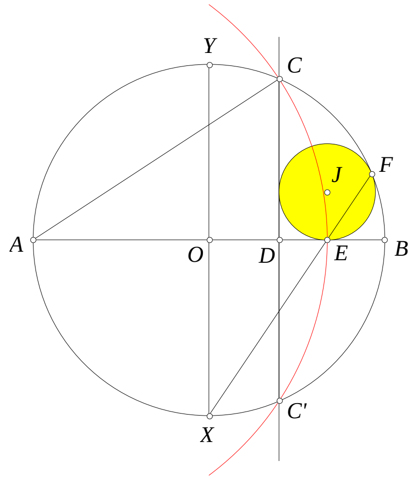
(b) La circonferenza γ' può essere costruita nel modo seguente:

- tracciare la circonferenza ω di centro A e raggio AC;
- determinare il punto E di intersezione tra ω ed AB;
- tracciare il diametro XY perpendicolare ad AB;
- determinare il punto F intersezione della retta XE con γ;
- determinatre il punto J intersezione della tangente in E ad AB e della retta OF, avendo indicato con O il centro di γ;
- tracciare la circonferenza di centro J e raggio JE.

□

Seconda soluzione.

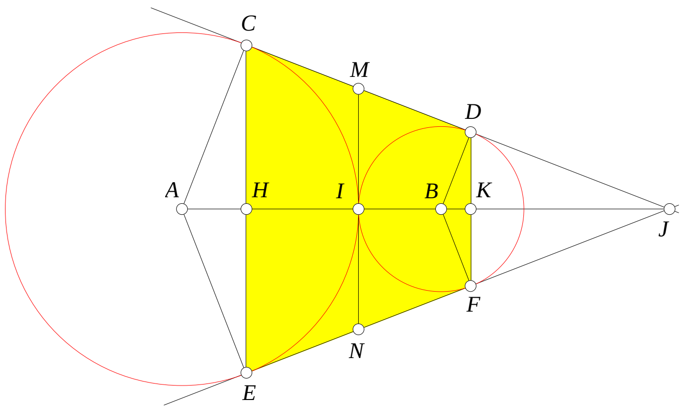
(a) Dato che $AC^2 = AD \cdot AB$ (primo teorema di Euclide) l'inversione $\mathcal{I}$ di centro A e potenza AC^2 manda D in B. Poichè $\mathcal{I}$ lascia fissi C e C', ne segue che $\mathcal{I}$ trasforma la retta CC' nella circonferenza γ (e viceversa). Pertanto $\mathcal{I}$ lascia fissa la circonferenza $\gamma' \Rightarrow \mathcal{I}(E) = E \Rightarrow E$ appartiene alla circonferenza di centro A e raggio AC, ossia $AE = AC$.



$\square$

Problema 12. *Indichiamo con A e B i centri di due circonferenze γ_A e γ_B di raggi r_A e r_B e tangenti esternamente. Tracciamo le tangenti comuni ed indichiamo con C, E i punti di tangenza con γ_A, con D, F i punti di tangenza con γ_B. Determinare l'area del quadrilatero $CEFD$ in funzione dei raggi r_A e r_B.*

Soluzione.



Sia $J = CD \cap EF$, sia I il punto di tangenza delle due circonferenze, sia MN la terza tangente comune (con $M \in CD$, $N \in EF$), siano H, K le proiezioni ortogonali di C, D sulla retta AB. Supponiamo WLOG che $r_A > r_B$ e poniamo, per semplicità, $r_A = R$, $r_B = r$.

Dalla similitudine dei triangoli $\triangle ACJ \sim \triangle BDJ$, posto $BJ = x$, abbiamo

$$\begin{gathered} AJ : BJ = AC : BD \quad \Rightarrow \\ (R + r + x) : x = R : r \quad \Rightarrow \\ BJ = x = r\frac{R + r}{R - r} \end{gathered} \tag{1}$$

Dalla (1) si ottengono facilmente le seguenti uguaglianze:

$$AJ = AI + IB + BJ = R\frac{R + r}{R - r} \tag{2}$$

$$CJ = \sqrt{AJ^2 - AC^2} = \frac{2R\sqrt{Rr}}{R - r} \tag{3}$$

$$DJ = \sqrt{BJ^2 - BD^2} = \frac{2r\sqrt{Rr}}{R - r} \tag{4}$$

Esprimendo in due modi diversi l'area del quadrilatero $AEJC$ abbiamo

$$\frac{1}{2}AJ \cdot CE = AC \cdot CJ \quad \Rightarrow$$

$$CE = \frac{2 \cdot AC \cdot CJ}{AJ} = \frac{4R\sqrt{Rr}}{R+r} \tag{5}$$

Dalla similitudine $ACE \sim BDF$ discende che $CE : DF = AC : BD$, quindi

$$DF = \frac{CE \cdot BD}{AC} = \frac{4r\sqrt{Rr}}{R+r} \tag{6}$$

Da (5) e (6) segue che

$$MN = \frac{CE + DF}{2} = 2\sqrt{Rr}$$

Dal primo teorema di Euclide segue che $AJ \cdot HJ = CJ^2$, $BJ \cdot KJ = DJ^2$, quindi tenuto conto di (1),(2),(3),(4) abbiamo

$$HK = HJ - KJ = \frac{CJ^2}{AJ} - \frac{DJ^2}{BJ} = \frac{4Rr}{R+r}$$

Infine, osservato che M, N sono i punti medi di CD ed EF, abbiamo

$$[CEFD] = MN \cdot HK = \frac{8Rr}{R+r}\sqrt{Rr}$$

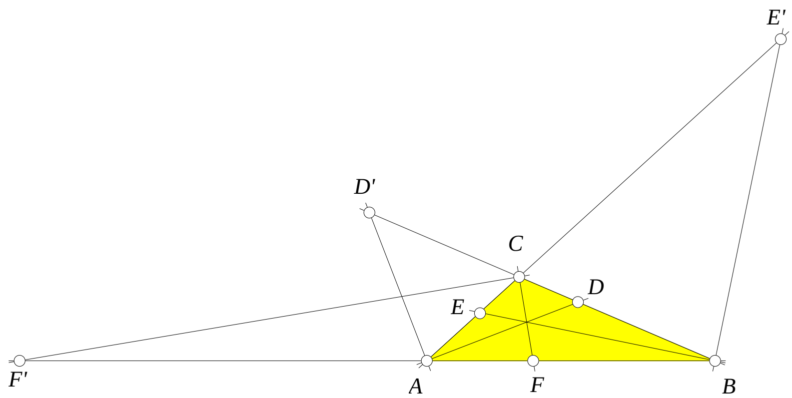
□

Problema 13. *Dato un triangolo ABC con $AB > BC > CA$, indichiamo con D, D', E, E', F, F' i punti di incontro fra le bisettrici degli angoli interni ed esterni in A, B, C coi lati BC, CA, AB (o i loro prolungamenti) rispettivamente. Dimostrare che:*

(a) $\dfrac{1}{DD'} = \dfrac{1}{EE'} + \dfrac{1}{FF'}$

(b) $\dfrac{BC^2}{DD'} = \dfrac{CA^2}{EE'} + \dfrac{AB^2}{FF'}$

Soluzione.



Dal teorema della bisettrice interna abbiamo

$$BD : DC = c : b \quad \Rightarrow \quad CD = \frac{ab}{b+c} \tag{1}$$

Dal teorema della bisettrice esterna abbiamo

$$BD' : D'C = c : b \quad \Rightarrow \quad D'C = \frac{ab}{c-b} \tag{2}$$

Da (1) e (2) segue che $DD' = \dfrac{2abc}{c^2 - b^2}$.

Analogamente si dimostra che $EE' = \dfrac{2abc}{c^2 - a^2}$ e $FF' = \dfrac{2abc}{a^2 - b^2}$. Pertanto

$$\frac{1}{DD'} - \frac{1}{EE'} - \frac{1}{FF'} = \frac{c^2 - b^2}{2abc} - \frac{c^2 - a^2}{2abc} - \frac{a^2 - b^2}{2abc} = 0$$

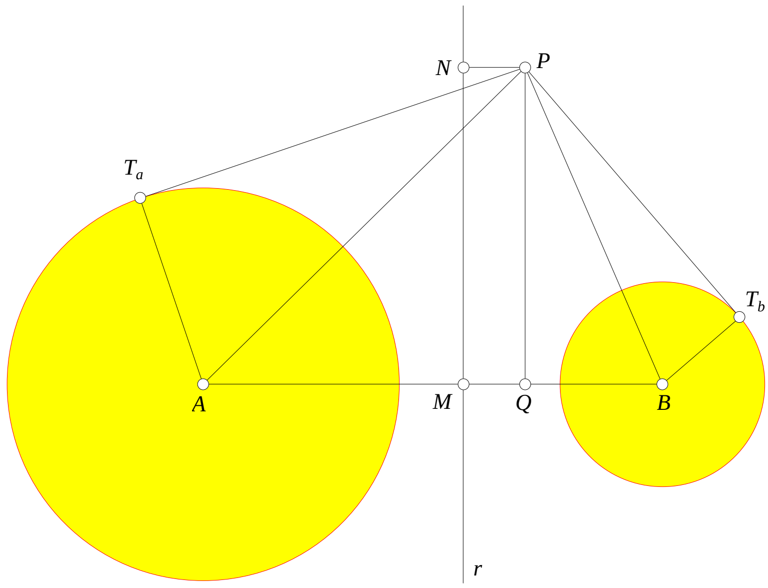
$$\frac{a^2}{DD'} - \frac{b^2}{EE'} - \frac{c^2}{FF'} = \frac{a^2\,(c^2 - b^2)}{2abc} - \frac{b^2\,(c^2 - a^2)}{2abc} - \frac{c^2\,(a^2 - b^2)}{2abc} = 0$$

$\square$

Problema 14. *Indichiamo con A, B i centri di due circonferenze γ_A e γ_B di raggi r_A e r_B, r il loro asse radicale, P un punto del piano esterno sia a γ_A che a γ_B. Indichiamo con N la proiezione ortogonale di P su r, con a e b le lunghezze dei segmenti di tangente condotti da P alle circonferenze γ_A e γ_B. Dimostrare che:*

$$\left|a^2 - b^2\right| = 2 \cdot PN \cdot AB$$

Soluzione.



Sia Q la proiezione ortogonale di P su AB, sia $M = r \cap AB$ e assumiamo WLOG che $a > b$ (quindi P, B sono dalla stessa parte di r come in figura).

Il punto M ha la stessa potenza rispetto alle due circonferenze (M appartiene all'asse radicale), quindi

$$MA^2 - r_A^2 = MB^2 - r_B^2 \quad \Rightarrow \quad r_A^2 - r_B^2 = MA^2 - MB^2 \tag{1}$$

Per il teorema di Pitagora $a^2 = PA^2 - r_A^2$, $b^2 = PB^2 - r_B^2$, quindi tenuto conto di (1) abbiamo:

$$
\begin{aligned}
a^2 - b^2 &= PA^2 - PB^2 - \left(r_A^2 - r_B^2\right) = \\
&= AQ^2 + PQ^2 - \left(BQ^2 + PQ^2\right) - \left(MA^2 - MB^2\right) = \\
&= AQ^2 - BQ^2 - \left(MA^2 - MB^2\right) = \\
&= (AM + MQ)^2 - (BM - MQ)^2 - \left(MA^2 - MB^2\right) = \\
&= 2AM \cdot MQ + 2BM \cdot MQ = \\
&= 2MQ \cdot (AM + BM) = \\
&= 2 \cdot PN \cdot AB
\end{aligned}
$$

Problema 15. *Data una circonferenza γ, sia OS un suo diametro di lunghezza 2. Si tracci la retta r tangente a γ in O. Siano A, B due punti di r ed indichiamo con a, b le ascisse di tali punti avendo preso O come origine. Si uniscano A, B con S, e siano A', B' le intersezioni dei segmenti SA e SB con γ. Indichiamo con C l'intersezione della retta $A'B'$ con r e con c l'ascissa di C. Dimostrare che $c = \dfrac{ab}{a+b}$.*

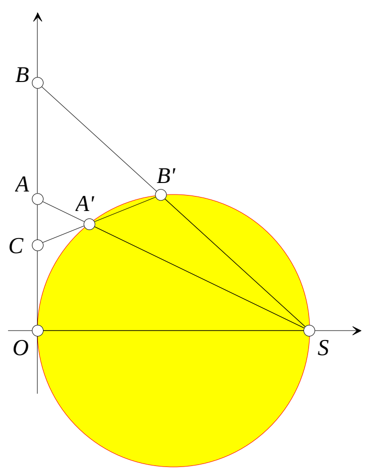
Soluzione.

La circonferenza γ e le rette SA, SB hanno equazioni

$$
\begin{aligned}
\gamma \;:& \quad (x-1)^2 + y^2 = 1 \\
SA :& \quad ax + 2y = 2a \\
SB :& \quad bx + 2y = 2b
\end{aligned}
$$

Un semplice calcolo prova che

$$A'\left(\frac{2a^2}{a^2+4}, \frac{4a}{a^2+4}\right), \quad B'\left(\frac{2b^2}{b^2+4}, \frac{4b}{b^2+4}\right)$$



La retta $A'B'$ ha equazione

$$(ab-4)x + 2(a+b)y - 2ab = 0$$

ed interseca l'asse delle y (retta r) nel punto $C\left(0, \dfrac{ab}{a+b}\right)$.

$\square$