Incontri Olimpici 2013 – Esercizi Geometria 13/10/2013

1. Dato un triangolo rettangolo avente i cateti di lunghezza b e c e l'altezza relativa all'ipotenusa lunga h, mostrare che $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$.

2. Dato un triangolo ABC, si prenda un punto P, esterno o interno al triangolo. Da P si conducano le perpendicolari ai lati AB, BC, CA del triangolo, in modo da incontrare i lati (o i loro prolungamenti) in F, E, D rispettivamente.
a) Dimostrare che $AF^2 + BE^2 + CD^2 = BF^2 + CE^2 + AD^2$.
b) Sia ora ABC equilatero e P interno al triangolo. Dimostrare che, con questa ulteriore ipotesi, $AF+BE+CD = BF + CE + AD$.

3. È dato un triangolo ABC con $BC = 2AB$. Indichiamo con D il punto medio di BC e con E il punto medio di BD. Dimostrare che AD biseca $C\widehat{A}E$.

4. Dato un triangolo ABC, si prendano due punti D su AB e E su AC. Indichiamo con F il punto di intesezione delle bisettrici degli angoli $A\widehat{B}E$ e $A\widehat{C}D$. Dimostrare che $B\widehat{D}C + B\widehat{E}C = 2B\widehat{F}C$.

5. Dato un triangolo ABC, si prenda un punto D su CB. Si costruiscano due segmenti BE e CF perpendicolari alla retta per A e D. Indichiamo con M il punto medio di CB. Dimostrare che $ME = MF$.

6. È dato un rettangolo $ABCD$ con $AB = 2BC$. Si prenda un punto P su AB tale che $BP = \frac{1}{4}AB$. Dimostrare che BD è perpendicolare a CP.

7. Dimostrare che le proiezioni dei vertici di un parallelogramma sulle sue diagonali sono i vertici di un parallelogramma simile al primo.

8. Sia $ABCD$ un parallelogramma. Sia r una generica retta passante per A, e siano E, F, G i piedi delle perpendicolari a r condotte da B, C, D rispettivamente. Dimostrare che:
a) se r è esterna al parallelogramma, allora $CF = BE + DG$;
b) se r taglia il parallelogramma, allora $CF = |BE - DG|$.

9. Sia $ABCD$ un quadrato di area S e r una retta esterna al quadrato. Indichiamo con A', B', C', D' i piedi delle perpendicolari a r condotte dai vertici A, B, C, D rispettivamente. Dimostrare che $A'A^2 + C'C^2 - 2B'B \cdot D'D = B'B^2 + D'D^2 - 2A'A \cdot C'C = S$

10. Sia $ABCD$ un parallelogramma. Sia r una retta passante per A esterna al parallelogramma, e siano E, F i punti di intersezione fra r e i prolungamenti di CB e CD rispettivamente. Dimostrare che $CB \cdot CE + CD \cdot CF = AC^2 + AE \cdot AF$.

11. Data una circonferenza γ , sia AB un suo diametro, D un punto di tale diametro, CC' la corda perpendicolare ad AB passante per D. La circonferenza γ', tangente a DA, a CD e a γ, tocca DA nel punto E.
a) Mostrare che $BE = BC$.
b) Determinare quindi la costruzione geometrica per disegnare γ'

12. Indichiamo con A e B i centri di due circonferenze γ_A e γ_B di raggi r_A e r_B e tangenti esternamente. Tracciamo le tangenti comuni e indichiamo con C, E i punti di tangenza con γ_A, con D, F i punti di tangenza con γ_B. Determinare l'area del quadrilatero $CEFD$ in funzione dei raggi di γ_A e γ_B.

13. Dato un triangolo ABC con $AB > BC > CA$, indichiamo con D, D', E, E', F, F',i punti di incontro fra le bisettrici degli angoli interni ed esterni in A, B, C coi lati BC, CA, AB (o i loro prolungamenti) rispettivamente. Dimostrare che:
a) $\frac{1}{DD'} = \frac{1}{EE'} + \frac{1}{FF'}$; b) $\frac{BC^2}{DD'} = \frac{CA^2}{EE'} + \frac{AB^2}{FF'}$.

14. Indichiamo con A e B i centri di due circonferenze γ_A e γ_B di raggi r_A e r_B, r il loro asse radicale, P un punto del piano esterno sia a γ_A che a γ_B. Indichiamo con N la proiezione ortogonale di P su r, con a e b le lunghezze dei segmenti di tangente condotte da P alle circonferenze γ_A e γ_B. Dimostrare che $|a^2 - b^2| = 2PN \cdot AB$.

15. Data una circonferenza γ, sia OS un suo diametro di lunghezza 2. Si tracci la retta r tangente a γ in O, siano A, B due punti di r; indichiamo con a e b le ascisse di tali punti avendo preso O come origine. Si uniscano A e B con S, e siano A', B' le intersezioni dei segmenti SA e SB con γ. Indichiamo con C l'intersezione della retta per A' e B' con r e con c l'ascissa di C. Dimostrare che $c = \frac{ab}{a+b}$