Geometria Sintetica - Didattica

SAMUELE MONGODI

Titolo nota 13/10/2013

- totalmente elementare
- tutto palitto
- mnemotecnicità

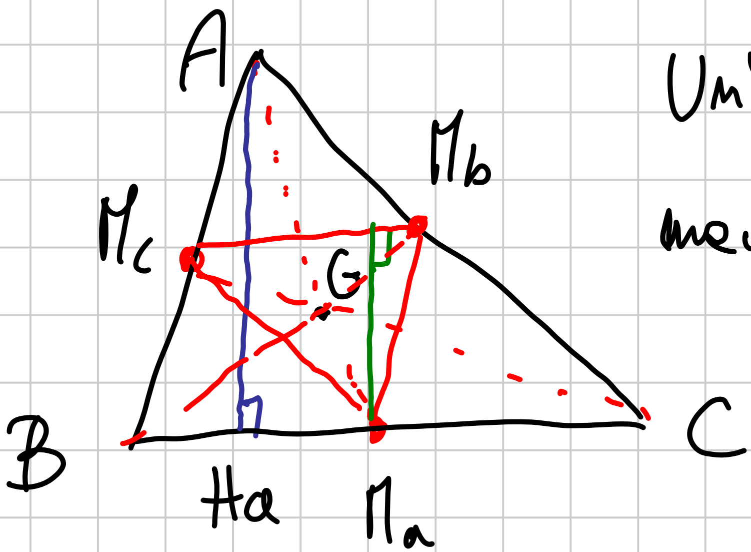
(I) Belli per la loro dim.

(II) Utili come risultati

I Retta di Eulero

In un triangolo O, G, H sono allineati in quest'ordine e $HG = 2 \cdot GO$

O: assi G: mediane H: altezze



Un'omotetia di centro G e fattore $-\frac{1}{2}$ manda

$A \to M_a$

$B \to M_b$

$C \to M_c$

$AH_a \perp BC \Rightarrow$ l'immagine di AH_a è $\perp$ a $M_b M_c$

però $M_b M_c \parallel BC$

$\Rightarrow$ l'immeggine di AH_a è $\perp$ a BC

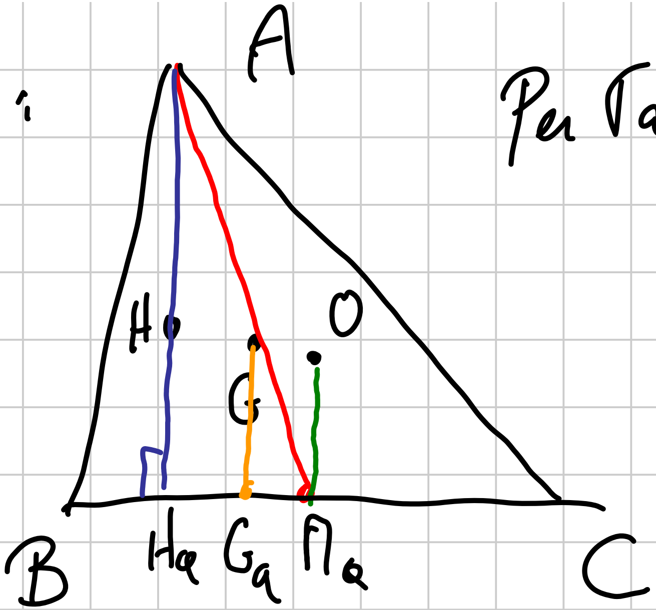
$\Rightarrow$ l'immagine di AH_a è la retta $\perp$ a BC passante per M_a

$\Rightarrow$ è l'asse.

$\Rightarrow$ H va in O tramite l'omoti

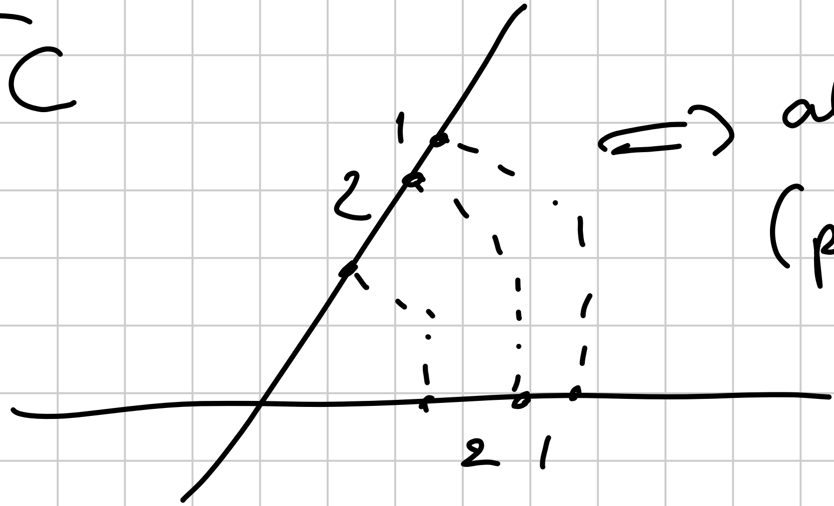
$\Rightarrow \quad \dot{H} \quad\quad \dot{G} \quad \dot{O}$

Dim 2:



Per Talete $\dfrac{H_aG_a}{G_aM_a} = 2$

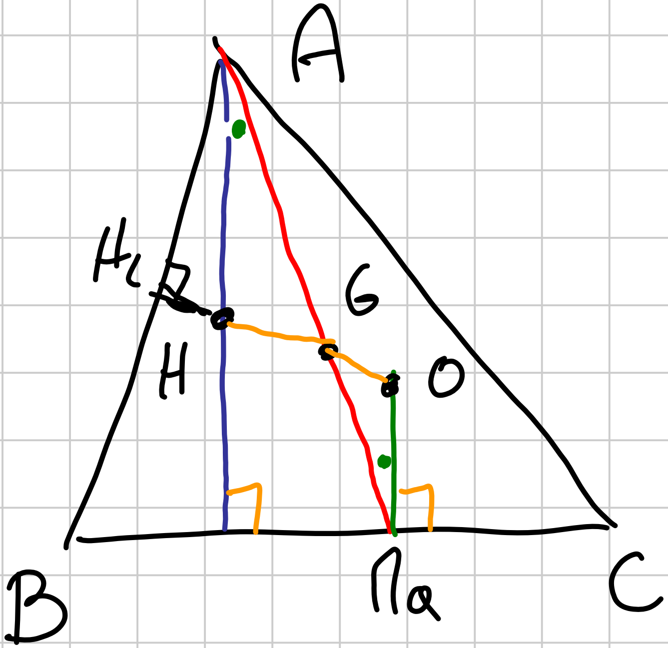
perché $\dfrac{AG}{GM_a} = 2$



$\Longrightarrow$ allineati

(per Talete)

Dim 3:



$\overset{\Delta}{AHG}$ so che $H\hat{A}G = O\hat{M_a}G$

$\overset{\Delta}{M_aOG}$

$$\frac{AG}{GM_a} = 2$$

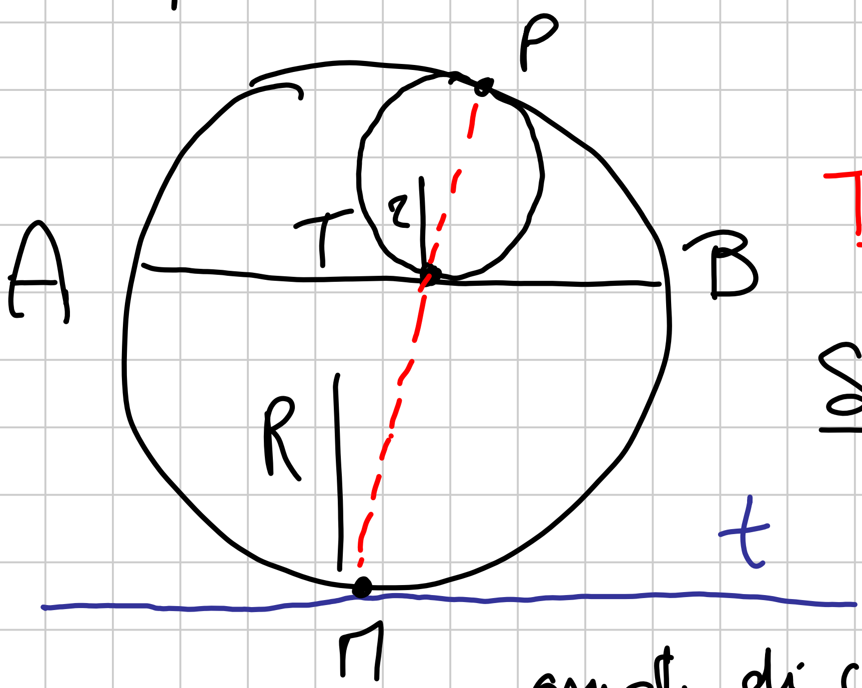
$$AH = \frac{b\cos\alpha}{\sin\beta}$$

$$OM_a = R\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{b}{2\sin\beta}\cos\alpha$$

$$\Rightarrow \frac{AH}{OM_a} = 2$$

$\Rightarrow$ sono simili $\Rightarrow$ H, G, O allineati.

Es di problema con l'omotetia



M = pt. medio di $\overset{\frown}{AB}$

Tesi: P, T, M allineati

Sol: t tg. in M

$\Rightarrow t \parallel AB$

omot. di centro P e fattore $\frac{R}{r}$

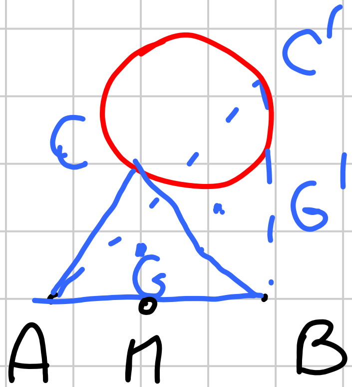
$P \to P$ ch. piccola $\to$ ch. grande

AB $\to$ in una retta parallela tangente alla cf grande

$\Rightarrow$ int

$\Rightarrow T \to M$

Es: Fissati A, B e una cf. Γ trovare il luogo dei baricentri di $\overset{\Delta}{ABC}$ al variare di C su Γ



Sol: G si ottiene da C prendendo il punto che divide CM in $2:1$

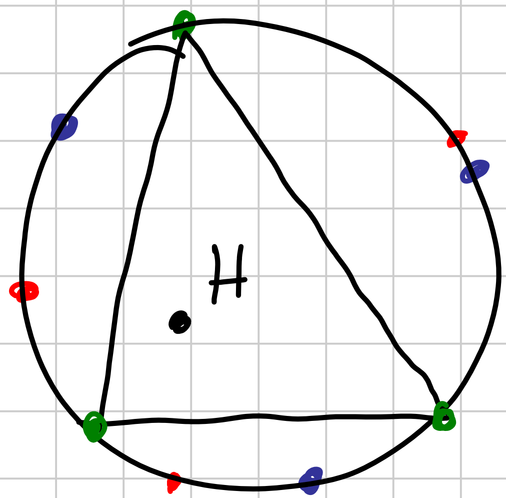
$=$ omotetia di fattore $\frac{1}{3}$ e centro M.

$\Rightarrow$ il luogo è l'immagine di Γ tramite questa omotetia. ($\Leftrightarrow$ una cf. di raggio $\frac{1}{3}$ di quello di Γ)

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$$

Fatto bello:

H ortocentro



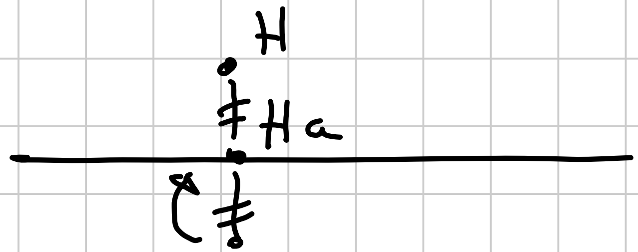
simm. risp. al lato

simm. risp. al pt. medio

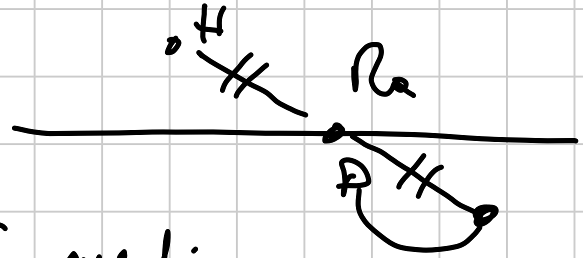
vertici

omot. di centro H e fattore $\frac{1}{2}$

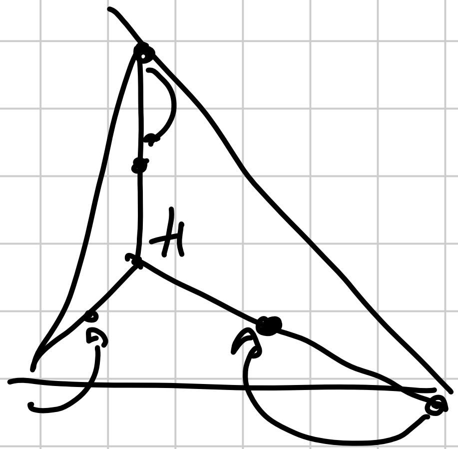
i simm. risp. ai lati vanno nei piedi delle altezze



i simm. risp. ai pt. medi dei lati vanno
nei pt. medi dei lati



i vertici vanno nei pt. medi di AH, BH, CH



la cfr. circoscritta va in una cfr.

$\Rightarrow$ i pt. medi dei lati, i piedi delle altezze, i punti medi di AH, BH, CH sono <u>conciclici</u> sulla

Cf di FEUERBACH (dei 9 punti)

che ha centro nel pt. medio tra O e H

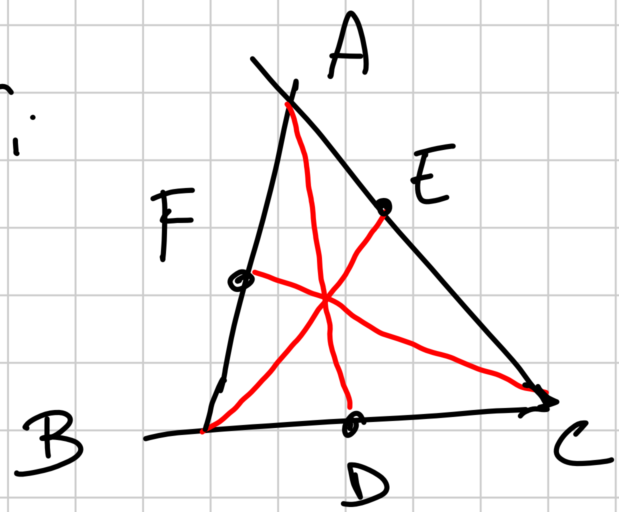
$\Rightarrow$ sta sulla retta di eulero.

(II) Teorema di CEVA

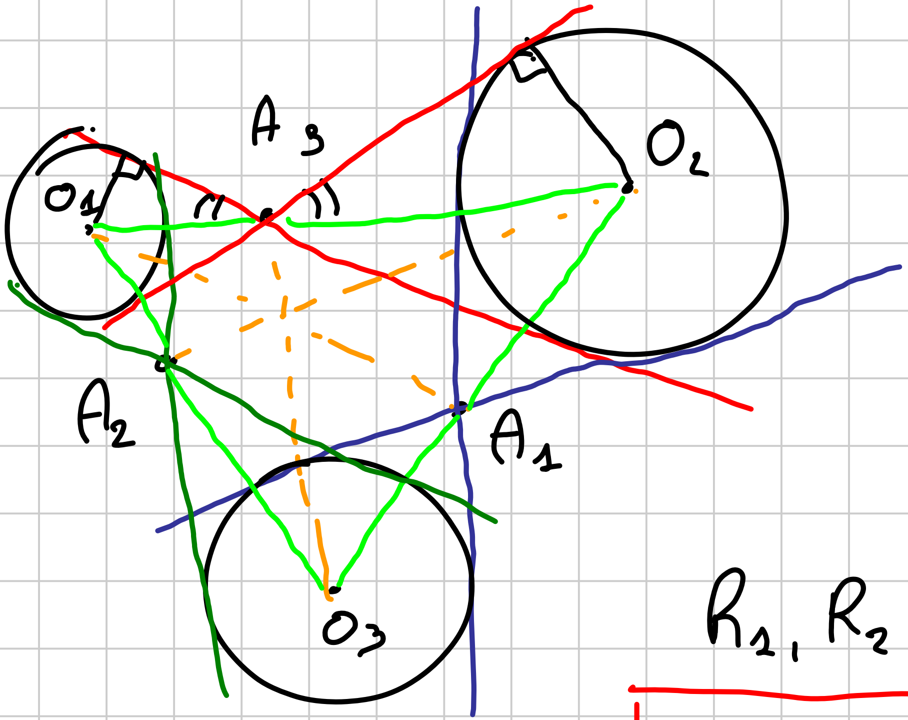
ABC triangolo D, E, F sui lati

AD, BE, CF concorrono se e solo se

$$\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = 1$$



$\underline{\text{ED}}$:



O_1A_1, O_2A_2, O_3A_3 concorrono

O_1, A_3, O_2 etc. allineati

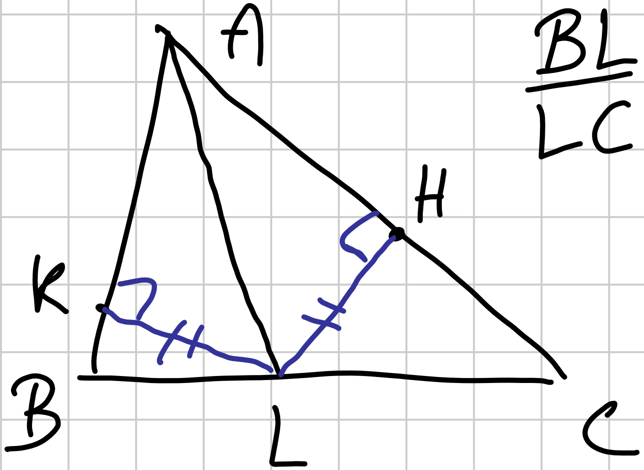
R_1, R_2, R_3 i raggi

$$\frac{O_1A_3}{A_3O_2}\cdot\frac{O_2A_1}{A_1O_3}\cdot\frac{O_3A_2}{A_2O_1} = \Rightarrow \boxed{\frac{A_3O_1}{A_3O_2} = \frac{R_1}{R_2}}$$

$$= \frac{\cancel{R_1}}{\cancel{R_2}}\cdot\frac{\cancel{R_2}}{\cancel{R_3}}\cdot\frac{\cancel{R_3}}{\cancel{R_1}} = 1.$$

1ª Teo della bisettrice

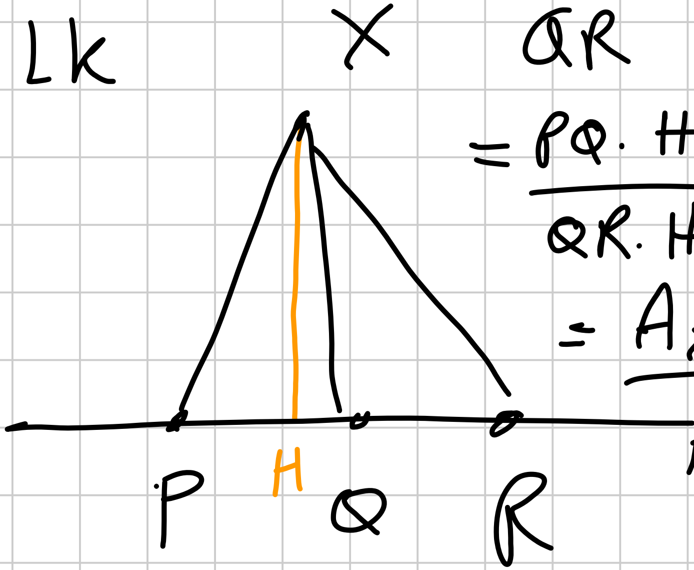
AL bisettrice di $\hat{A}$



$$\frac{BL}{LC} = \frac{AB}{AC}$$

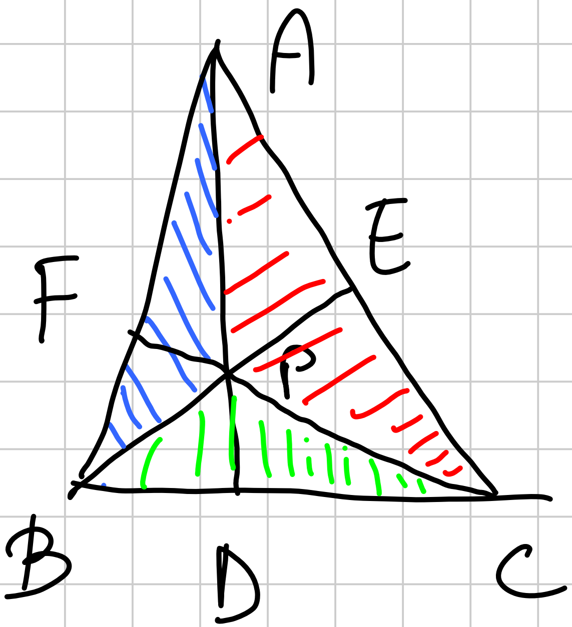
$$LH = LK$$

$$\frac{BL}{LC} = \frac{A_{BLA}}{A_{LCA}} = \frac{AB \cdot \cancel{LK}}{AC \cdot \cancel{LH}} = \frac{AB}{AC}$$



$$\frac{PQ}{QR} = \frac{PQ \cdot HX}{QR \cdot HX} = \frac{A_{XPQ}}{A_{XQR}}$$

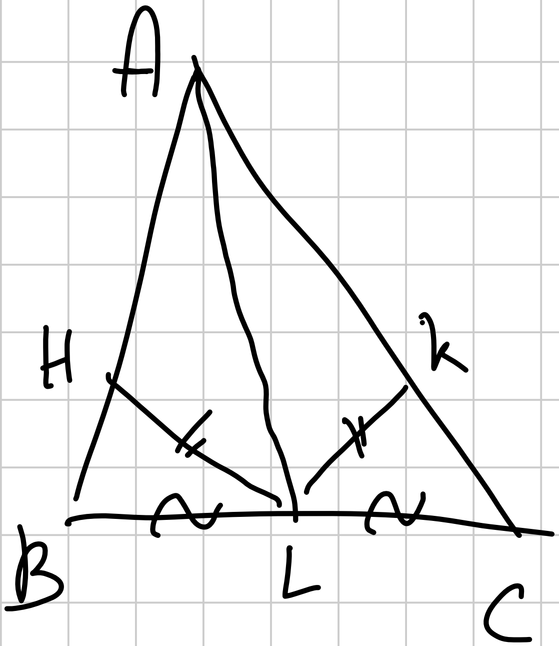
Dim: se concorrono vale la formula



$$\frac{BD}{DC} = \frac{A_{BDA}}{A_{DCA}} = \frac{A_{BDP}}{A_{DCP}} = \frac{A_{BPA}}{A_{CPA}}$$

uso che concorrono.

$$\frac{CE}{EA} = \frac{A_{BPC}}{A_{BPA}} \qquad \frac{AF}{FB} = \frac{A_{APC}}{A_{BPC}}$$



$$\{P : d(P, AB) = k \cdot d(P, AC)\}$$

$$k \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1\}$$

è una retta per A.

$$\frac{BL}{LC} = \frac{LH}{LK} \cdot \frac{BA}{AC}$$

$= k$