Problemi di conteggio, con qualche riflessione sulla didattica

October 12, 2011

Didattica del problem solving

Per trasmettere agli studenti l'abilità di risolvere problemi matematici, spesso non si esce da queste modalità di insegnamento:

- Spiegazione di teoremi, tecniche, dimostrazioni
- Assegnazione di problemi da risolvere singolarmente
- Assegnazione di problemi da risolvere in gruppo
- Spiegazione della soluzione, con discussione in classe

Limitazioni di quest'approcio

L'apprendimento avviene attraverso:

1. Imitazione di tecniche apprese alla lavagna/da libri, dispense, compagni
2. Auto-apprendimento di tecniche attraverso la riflessione su un problema

Tuttavia...

1. I concetti matematici richiedono una certa "integrazione" con la mente di chi li apprende, e vengono trasmessi con difficoltà con un discorso o una lezione frontale, se non accompagnata da una riflessione personale (che richiede, di solito, maggior tempo)
2. Se il lavoro individuale consiste solamente nel risolvere un problema dall'inizio alla fine, spesso questo costituisce un ostacolo insormontabile, che non si può risolvere solamente in parte. Lo studente si insabbia, prova frustrazione, perde tempo.

Limitazioni di quest'approcio

- Nel lavoro di gruppo, spesso non avviene reale comunicazione e collaborazione: c'è divisione tra chi fa e chi ascolta
- Provare ad aiutare chi è in difficoltà con un suggerimento può non funzionare: lo studente preferisce fare di testa sua che perdere la soddisfazione di esserci arrivato da solo
- Non vengono esercitate in maniera autonoma capacità specifiche nella risoluzione di un problema, quali:
  - Comprensione del testo e conversione in linguaggio matematico (gara a squadre)
  - Interpretazione del testo e scelta preliminare di una strategia
  - Risoluzione vera e propria (la parte "strettamente" matematica)

Possibili sperimentazioni

Si potrebbe far seguire al testo di un problema alcune **domande** che stimolino ed indirizzino la riflessione.

- Esattamente come nelle ore di letteratura italiane, attraverso le domande si controlla l'avvenuta comprensione del testo
- Non essendo degli "aiutini" chiusi in se stessi, lo studente non vede intaccata la sua libertà nell'approciarsi al problema
- La discussione in classe delle risposte permette di andare oltre al semplice elenco e correzione di soluzioni alternative a un problema.

Questo richiede, da parte dell'insegnante, lo sviluppo di un'abilità appunto nel formulare queste domande...

Ma torniamo ora alla matematica... passiamo in rassegna ad alcuni classici problemi di conteggio, accompagnandoli questa volta dalle opportune domande per gli studenti.

Problema 1

La mensa scolastica oggi offre una scelta tra 2 primi, 3 secondi e 4 dessert. Quanti pasti è possibile fare?
Soluzione: $2 \times 3 \times 4$
Spiegazione: supponiamo che i primi siano pasta e lasagne. I pasti che contengono pasta sono diversi dai pasti che contengono lasagne. Inoltre sono nella stessa quantità: in entrambi i casi resta da completare il pasto scegliendo tra 3 secondi e 4 dessert. Stiamo *sommando* quantità *uguali tra loro*, tante volte quant'è il numero di primi. Questa somma ripetuta spiega la comparsa della moltiplicazione nella soluzione.

Problema 1

Domande:

- D1 È possibile che un pasto contenga due primi? È possibile che in un pasto si salti il dessert?
- D2 Due pasti in cui cambia solo il dessert sono da considerarsi diversi?
- D3 Supponiamo che i primi siano pasta e lasagne. Confrontare il numero di pasti in cui si prende la pasta, e il numero di pasti in cui si prendono lasagne. Quale è più grande?

Problema 2

Un gruppo di 3 studenti entra in un cinema con 40 poltrone. In quanti modi si possono sedere?
Soluzione: $40 \times 39 \times 38$
Spiegazione: Chiamiamo A,B,C gli studenti. A differenza del problema precedente, in cui si presenta una scelta *indipendente* di cibi, questa volta la scelta del posto di B è influenzata dalla scelta del posto di A: in quanto essi non possono sovrapporsi. Tuttavia, seppure ad ogni scelta di A si offrono *diverse* possibilità (insiemi di posti) a B, la *quantità* di posti in cui può sederersi B (dopo di A) non dipende dalla scelta di A. Per questo motivo si può condurre un ragionamento simile al problema 1.

Problema 2

Domande:

- D1 Uno studente può scegliere di rimanere in piedi? Due studenti possono sedersi sullo stesso posto?
- D2 Ai fini del problema conta solamente quali posti sono occupati, o anche quali persone occupano ciascun posto?
- D3 Supponiamo che si sieda per prima A, poi B, poi C. Le scelte di A e B possono influenzare l'insieme di posti tra cui può decidere di sedersi C? Le scelte di A e B possono influenzare il numero di posti tra cui può decidere di sedersi C?
- D4 Dopo il film, ad A,B,C viene offerta la cena. Nella super-cucina del cinema sono disponibili 40 primi, 39 secondi e 38 dolci. Il pasto però deve essere determinato solamente da come si siedono i tre ragazzi: a due disposizioni diverse, devono corrispondere due pasti diversi. Fornire istruzioni a un ipotetico cuoco su come, dalle posizioni di A,B,C, potrebbe risalire alla cena.

Problema 3

Ad un convegno partecipano 15 persone e il primo giorno tutti quanti si stringono la mano. Quante strette di mano vengono fatte?

Soluzione: $\frac{15\times14}{2}$

Spiegazione: Ci sono 15 persone. Ad ogni persona capita 14 volte di incontrare qualcuno, esaminarlo per un attimo (sguardo, vestito, postura) e poi stringergli la mano. Quindi in totale capita 15×14 volte che qualcuno esamina qualcun altro per stringergli la mano. Inoltre, durante ogni stretta di mano possiamo trovare due persone che guardano chi gli sta di fronte e lo esaminano.

$15 \times 14 =$ strette di mano $\times\, 2$.

Problema 3

Domande:

- D1 Se io ho stretto la mano a te e tu hai stretto la mano a me, quante volte ci siamo stretti la mano?
- D2 Siano A, B due persone. Quante strette di mano fa A? Quante ne fa B? È vero che le strette di mano fatte da A sono diverse dalle strette di mano fatte da B?
- D3 Nella cucina del cinema sono rimasti soltanto 15 tipi di dolci. Antonio è goloso e vuole assaggiarne due diversi, inoltre egli conosce bene i partecipanti del convegno. Così, nell'imbarazzo della scelta, si volta, vede una stretta di mano, e in base a chi partecipa decide che dolci mangiare. Come potrebbe operare questa scelta?

Problema 4

I cavalieri della tavola rotonda in origine erano 10. Dopo una dura battaglia ne sono rimasti soltanto 4; per giunta, hanno litigato tra di loro e si rifiutano di sedersi vicini (fortuna che 6 posti sono rimasti liberi..). In quanti modi possono sedersi a tavola?
Soluzione: $6 \times 5 \times 4 \times 3$
Spiegazione: ???

Problema 4

Domande:

- D1 Supponiamo che si sieda per prima A, poi B, poi C, poi D. Le scelte di A,B,C possono influenzare l'insieme di posti tra cui può decidere di sedersi D? Le scelte di A,B,C possono influenzare il numero di posti tra cui può decidere di sedersi D?
- D2 Quanti casi diversi dobbiamo trattare, per discutere il numero di posti tra cui può decidere di sedersi D? Sono tanti o pochi?
- D3 Pensiamo alla soluzione del problema 2. Nel corso della soluzione, abbiamo tenuto costante il numero di sedie? Si può dire lo stesso del numero di persone?
- D4 **(Suggerimento: è possibile ricondursi al problema 2 variando il numero di sedie.)** Supponiamo che i cavalieri si sono seduti a caso attorno alla tavola. Per essere separati dagli altri cavalieri, piuttosto che spostarsi, è degno di un cavaliere ordinare al servo di aggiungere una sedia in un determinato posto. Qual è il modo più naturale/pratico di fare questo? Quali svantaggi si presentano se si vuole sfruttare questa trasformazione per un calcolo delle combinazioni?

Etc. etc. etc.