Molte volte l'impegno che gli uomini mettono in attività che sembrano assolutamente gratuite, senz'altro fine che il divertimento o la soddisfazione di risolvere un problema difficile, si rivela essenziale in un ambito che nessuno aveva previsto, con conseguenze che portano lontano. Questo è vero per la tecnologia . Il gioco è sempre stato il grande motore della cultura.

Italo Calvino

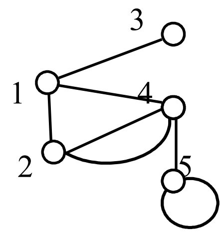
INTRODUZIONE ALLA TEORIA DEI GRAFI

La teoria dei grafi è una parte importante della **Ricerca Operativa** e si occupa di problemi di minimo o massimo che possono essere schematizzati mediante grafici in cui compaiono punti detti **nodi** e linee che congiungono tali punti detti **lati** o **archi.** Grazie alla teoria dei grafi è possibile capire per esempio quale sia il percorso minimo tra due punti, il percorso più conveniente per passare attraverso tutte le strade di una città o per raggiungere tutti gli incroci della stessa città.

Definizioni 1

Si dice **grafo** una figura piana costituita da n punti detti **nodi** collegati da un certo numero di segmenti o linee detti **lati** o **archi**. Un grafo è quindi definito da due insiemi (V,E), ove
V=$\{v_1,......v_n\}$ è un insieme finito di elementi detti nodi (i vertici del grafo), mentre
E=$\{e_1,........e_m\}=\{(v_1,v_2), (v_1,v_3).....(v_k,v_n)\}$ è un insieme di coppie non ordinate di nodi dette archi o lati. In tal caso si dice che il grafo è di tipo (n,m).
Due vertici si dicono **adiacenti** se esiste un lato che li collega.
Due lati si dicono **consecutivi** se hanno un vertice in comune.
Se due vertici sono collegati da più di un lato su parla di lati **multipli.**
Un lato che congiunge un vertice con se stesso si dice **loop**.
Un grafo si dice **semplice** se non contiene lati multipli e loop.
Si dice **grado** di un vertice il numero di lati incidenti nel vertice e se il vertice v_k ha grado m si scrive deg v_k= m**.**
Si dice **catena o cammino** una qualunque sequenza di archi consecutivi e la si indica con il primo e l'ultimo vertice congiunti da un trattino.
Si dice **ciclo** ogni catena il cui vertice iniziale coincide con quello finale.
Due vertici u e v di un grafo si dicono **connessi** se $u = v$ oppure $u \neq v$ ed esiste una catena u-v.
Un grafo si dice **connesso** se ogni coppia v_i , v_j di suoi vertici è connessa.
Un grafo si dice completo, se per i e j esiste un lato che connette i due vertici v_i , v_j .

Esempio 1



Il precedente è un grafo avente 5 vertici e 7 lati, i vertici 1e 2 o 1e 4 sono consecutivi, i vertici 3e 4 o 2 e 5 non lo sono. I lati 1-4 e 4-2 sono adiacenti. Il lato 2-4 è multiplo. Il vertice 5 ha un loop. La sequenza di lati (1,2),(2,4),(4,5) è una catena. La sequenza (1,2),(2,4),(4,1) è un ciclo. Il grafo disegnato è connesso.

Proprietà 1
In ogni grafo G, la somma dei gradi dei vertici di G è uguale al doppio del numero dei lati di G. In simboli se G è un grafo (n,m) di vertici $v_1,......v_n$ allora

$$\sum_{i=1}^{n} \deg\ v_i = 2m.$$

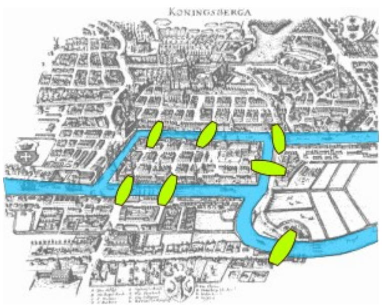
Proprietà 2
Ogni grafo contiene un numero pari di vertici di grado dispari.

Dim. Sia G un grafo. Se non contiene vertici dispari l'asserto è ovvio. Se i vertici di grado dispari sono $k \neq 0$, supponiamo siano $v_1,......v_k$ tali vertici e siano $u_1........u_n$ i vertici di grado pari. Per la precedente proprietà

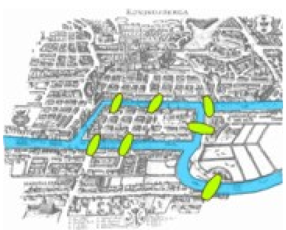
$$\sum_{i=1}^{k} \deg\ v_i + \sum_{i=1}^{n} \deg\ u_i = 2m,$$

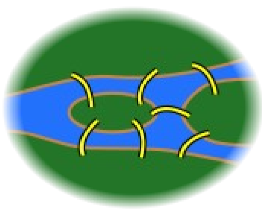
dove m è il numero dei lati del grafo G. 2m è un numero pari, $\sum \deg\ u_i$ è un numero pari, quindi $\sum \deg\ v_i$ è un numero pari, ma ciascun addendo è dispari, perciò gli addendi devono essere in numero pari.

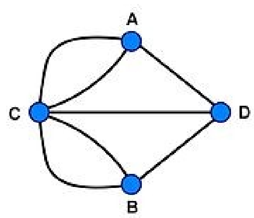
Problema 1-I ponti di Koenisberg
il primo problema di teoria dei grafi è stato il problema dei ponti di Koenisberg. Koenisberg, città della Prussia Orientale, chiamata ora Kaliningrad ed exclave della Russia, famosa per aver dato i natali al filosofo Immnuel Kant ed al matematico David Hilbert, è attraversata dal fiume Preghel, che in città si biforca in due rami dividendo la città in quattro quartieri A,B,C,D, congiunti da 7 ponti come in figura.



Una leggenda dice che, intorno al 1750, fra gli abitanti della città era sorto il problema se fosse possibile effettuare una passeggiata che partendo da uno qualsiasi dei quattro quartieri vi facesse ritorno, passando una ed una sola volta per ciascun ponte.
Eulero ha il merito di aver formulato il problema in termini di teoria dei grafi, astraendo dalla situazione specifica di Koenisberg; innanzi tutto eliminò tutti gli aspetti contingenti ad esclusione delle aree urbane delimitate dai bracci fluviali e dai ponti che le collegano; secondariamente rimpiazzò ogni area urbana con un punto, cioè con il nodo di un grafo e i ponti con i lati del grafo stesso.







Eulero rappresentò la disposizione dei ponti congiungendo con altrettante linee le quattro grandi zone della città. Si noti che dai nodi A,B eD partono (o arrivano) 3 ponti, dal nodo C invece 5 ponti. Quindi i gradi dei nodi sono rispettivamente 3,3,5,3. Eulero, quindi fu un precursore della teoria dei grafi anche se la sua dimostrazione non la utilizza in senso effettivo.

Teorema 1
Il problema dei ponti di Koenisberg non ha soluzione.

Dimostrazione di Eulero. Se indichiamo un cammino con i vertici successivi che percorre, il cammino ABD, percorre due ponti, quindi poiché i ponti sono 7 per trovare un percorso che li attraversi tutti bisognerebbe scrivere una parola di 8 lettere formata tutta da A,B,C e D. Ma se da un vertice escono 3 ponti per percorrerli tutti occorre scrivere tale vertice almeno 2 volte nel cammino, se ne escono 5 invece comparirà almeno 3 volte, in generale un vertice dispari di grado n, deve essere scritto n/2 + 1 volte.Poiché A,B e D hanno grado 3, devono essere scritti ciascuno 2 volte e poiché C è di grado 5 deve essere scritto almeno 3 volte. Quindi la parola che indica il cammino sarà formata da 3+2+2+2=9 lettere e ciò è contro quanto affermato all'inizio.

Il problema dei ponti di Koenisberg è stato poi successivamente generalizzato e risolto con le seguenti definizioni e i seguenti teoremi.

Definizione 2 Un ciclo contenente tutti i lati di un grafo una ed una sola volta si dice **euleriano**. Un grafo che contiene un ciclo euleriano si dice **euleriano**.

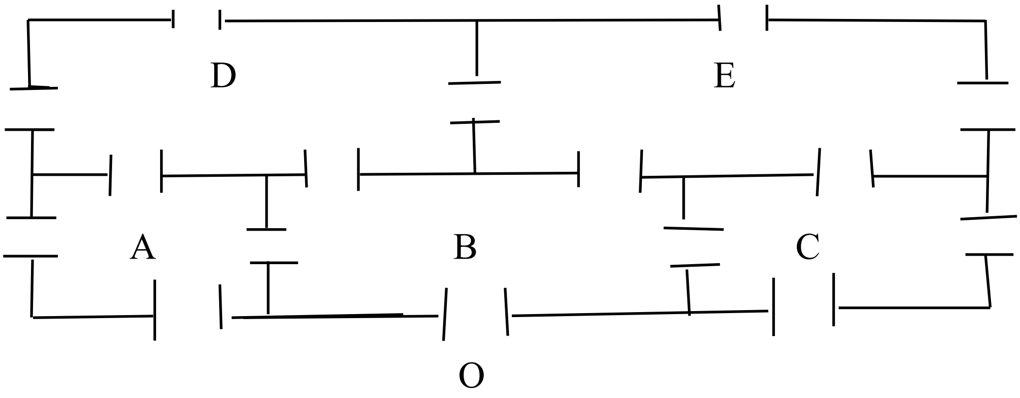
Teorema 2
Un grafo G è euleriano se e solo se è connesso ed ogni vertice di G è pari.

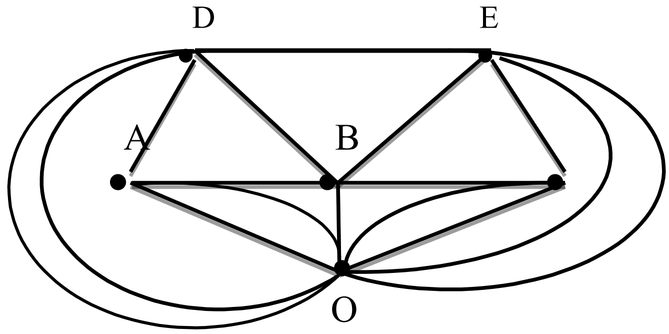
Dim. Supponiamo che G sia un grafo euleriano, allora G contiene un ciclo euleriano C che comincia e finisce dallo stesso vertice. Sia *v* tale vertice. Poiché C contiene tutti i vertici di G, G è certamente connesso. Dimostriamo ora che ogni vertice ha grado pari. Sia *u* un vertice differente da *v,* poiché *u* non è né il primo né l'ultimo vertice, ogni volta che viene attraversato da C deve avere un lato che entra ed uno che esce, quindi ogni caso di passaggio fa aumentare di 2 il suo grado. Anche per quanto riguarda *v*, ogni caso di passaggio, escluso il primo e l'ultimo fa aumentare di 2 il suo grado, aggiungendo poi il primo e l'ultimo che sono 2 otteniamo che anche il grado di *v* è pari.
Dimostriamo ora l'implicazione inversa. Supponiamo, quindi che G sia un grafo connesso e che ogni vertice di G sia pari e mostriamo che G è euleriano.
Scegliamo un vertice qualsiasi *v* di G e cominciamo un cammino *P* da *v*. Continuiamo finché non raggiungiamo un vertice *w,* da cui non partano altri lati di G oltre quello che ci ha condotto a *w*, e quindi non possiamo continuare il cammino. Dimostriamo che $v=w$. Supponiamo per assurdo sia $v\neq w$. In ogni occasione in cui il cammino ha attraversato *w*, un lato è entrato in *w* ed un altro è uscito,ma quando abbiamo incontrato *w* per l'ultima volta c'è stato soltanto un lato che è entrato in *w* e quindi *w* avrebbe grado dispari. Ma poiché ogni vertice ha grado pari, dobbiamo concludere che un lato incidente in *w* non appartiene a *P*. Ciò implica che se $v\neq w$, *P* potrebbe essere continuato e quindi non terminerebbe in *w*. Dobbiamo concludere che $v=w$ e quindi *P* è un ciclo. Se *P* contiene tutti i lati di G allora *P* è un ciclo euleriano e G è un grafo euleriano. Supponiamo che *P* non contenga tutti i lati di G. Poiché G è connesso, ci deve essere almeno un vertice *u* di *P* nel quale è incidente un lato non contenuto in *P*. Togliamo i lati di P da G, e consideriamo il grafo H così ottenuto, che contiene lati perché *P* non esaurisce G. Naturalmente ogni vertice di H ha grado pari. Se cominciamo un cammino P_1 da $u \varepsilon P$ e la continuiamo fin quando è possibile, per quanto già provato P_1 deve finire in *u*. Consideriamo il ciclo C_1 ottenuto aggiungendo a *P* il ciclo P_1, quando *u* occorre in *P*. Se C_1 contiene tutti i lati di G, abbiamo trovato il circuito euleriano che cercavamo, altrimenti ripetiamo quest'ultimo passaggio.

Definizione 3 Un grafo G che ha un cammino che contiene tutti i lati una ed una sola volta e tutti i vertici di G, si dice **traversabile** ed il cammino si dice **euleriano**.

Teorema 3 Un grafo G è traversabile se e solo se è connesso ed ha esattamente due vertici di grado dispari. Inoltre ogni cammino euleriano di G comincia da uno dei vertici dispari e finisce nell'altro. Una proprietà interessante dei grafi euleriani è traversabili è che dopo che i vertici sono disegnati, si possono disegnare i lati con un tratto unico di penna.

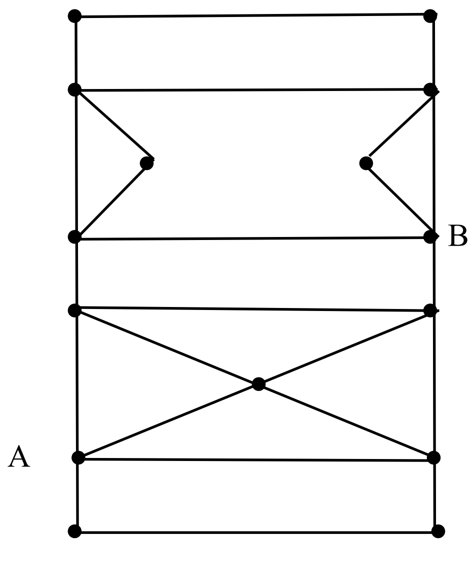
Problema 2 La seguente figura mostra la pianta del piano di una casa con varie porte che connettono le stanze e che dalle stanze portano all'esterno. E' possibile cominciare un cammino da una stanza o dall'esterno ed attraversare tutte le stanze passando per ogni porta una sola volta?





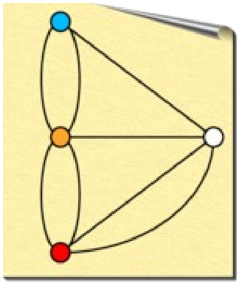
La situazione è schematizzata nel grafo successivo. Dobbiamo capire se il grafo è traversabile. Poiché i vertici B,D,E ed O sono dispari il grafo non è né euleriano né traversabile. Quindi non è possibile percorrere la casa attraversando ogni porta una sola volta.

Problema 3 Supponiamo che un ispettore delle autostrade debba guidare periodicamente attraverso le varie autostrade mostrate schematicamente nella figura successiva. Se l'ispettore vive nella città A, è possibile trovare un percorso che comincia e finisce in A e che passa per ogni tratto delle autostrade una ed una sola volta? E se invece l'ispettore vive in B, sarà possibile fare un viaggio simile con inizio e fine in B?



Si, in entrambi i casi perché tutti i vertici, compresi A e B sono di ordine pari.

Problema 4 Il problema dei ponti di Koenisberg concerne vertici non identificati, cioè caratterizzati solo dai loro collegamenti. Vi sono delle variazioni su di esso che propongono problemi un po' più complessi identificando i vertici del grafo con personaggi e ruoli.
Sulla riva settentrionale sorge il castello del principe Blu, sulla riva meridionale sorge il castello del principe Rosso, sull'isola orientale c'è la sede del Vescovo, infine sull'isola centrale si trova un'osteria.
L'ottavo ponte del principe Blu Il principe Blu , dopo aver analizzato il sistema dei ponti cittadini con l'aiuto della teoria dei grafi, si convince circa l'impossibilità di passare i ponti. Decide allora di costruire di nascosto un ottavo ponte che gli permetta la sera di passare i ponti partendo dal suo castello e finendo all'osteria dove potersi vantare della sua riuscita. Inoltre vuole fare in modo che il principe Rosso non riesca a fare altrettanto dal suo castello. Dove costruisce l'ottavo ponte del principe Blu?



Il nono ponte del principe Rosso Il principe Rosso imbufalito per la mossa del fratello, capisce che può reagire solo dopo aver studiato la teoria dei grafi. Dopo un attento studio anche lui decide di costruire di nascosto un altro ponte che consenta a lui di attraversare tutti ponti partendo dal suo castello e finendo all'osteria dove prendere in giro il fratello a cui sarà impossibile passare i ponti al suo modo. Dove costruisce il nono ponte del principe Rosso?
Il decimo ponte del Vescovo Il vescovo ha dovuto assistere alla dispendiosa contesa cittadina con crescente irritazione. Essa ha portato alla formazione di due fazioni ed ha fatto crescere il numero di frequentatori dell'osteria, con danno alla quiete pubblica. Quindi anche lui, dopo un accurato studio della teoria dei grafi, decide di costruire un decimo ponte che consenta ai cittadini di passare tutti i ponti e fare ritorno alla propria casa. Dove costruisce il decimo ponte il vescovo?

Soluzione
Sappiamo che i cammini di Eulero sono possibili se esattamente 2 nodi sono di grado dispari, che sono i nodi iniziale e finale del cammino. Poiché il problema presenta 4 nodi tutti di grado dispari, ed il cammino deve cominciare dal nodo A e finire nel nodo C, bisogna disegnare un nuovo lato tra gli altri due nodi. Quindi il principe Blu deve costruire un ponte tra l'isola orientale e la sponda meridionale.
Gli altri casi si risolvono analogamente.

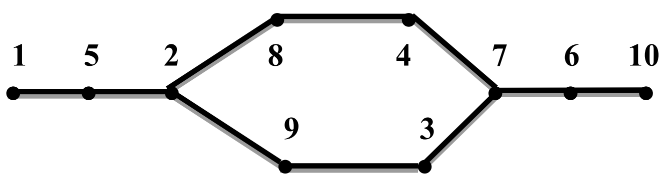
Problema 5-La pecora, il lupo ed il cavolo

Un esempio di un altro problema risolubile con la teoria dei grafi è quello della pecora, del lupo e del cavolo. Sulla riva di un fiume si trovano una pecora, un lupo ed un cavolo, un barcaiolo deve portarli sull'altra sponda con una barca così piccola che può portare soltanto uno tra pecora, lupo e cavolo oltre al barcaiolo stesso. Inoltre il barcaiolo non può lasciare senza sorveglianza il lupo in compagnia della pecora o la pecora in compagnia del cavolo. Come può il barcaiolo realizzare questo trasferimento?

Soluzione Inizialmente sulla riva destra si trovano lupo, pecora, cavolo e barcaioli e sull'altra riva non c'è nessuno. Lo stato iniziale sulle due rive sarà simboleggiato dai due insiemi (L,P,C,B) e Ø. Tutti gli stati possibili sono indicati nella tabella seguente.

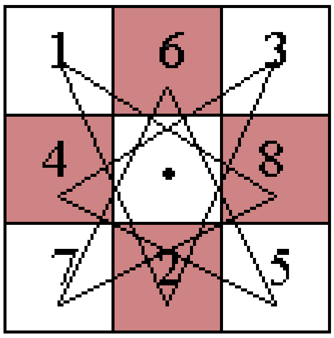
	Riva destra	Riva sinistra
1	L,P,C,B	Ø
2	L,C,B	P
3	P,C,B	L
4	P,L,B	C
	P,L,C	B
	C,B	P,L
	L,B	P,C
5	L,C	P,B
6	P,B	L,C
	P,C	B,L
	L,P	C,B
	B	P,L,C
7	P	B,L,C
8	L	P,C,B
9	C	L,P,B
10	Ø	L,C,P,B

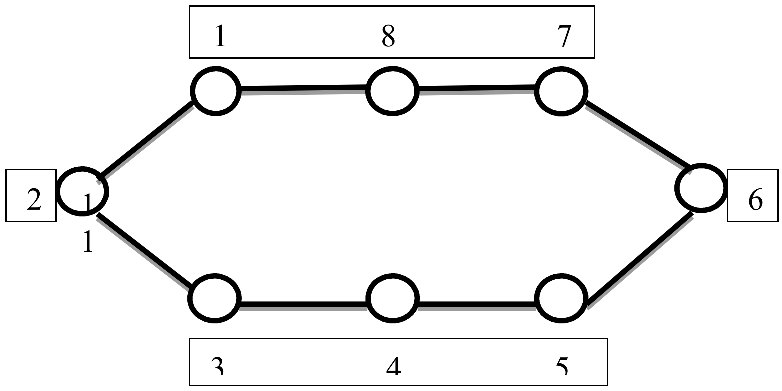
Ovviamente non tutti i casi in tabella sono possibili. I casi evidenziati sono quindi da scartare, restano perciò i casi numerati a sinistra. Possiamo allora costruire un grafo avente per vertici i dieci possibili stati della riva destra e congiungere con i lati quei vertici che rappresentano stati che possano trasformarsi l'uno nell'altro mediante un solo viaggio completo della barca. I lati potranno congiungere le seguenti coppie di vertici (1,5); (2,5); (2,8); (2,9); (3,9); (3,7); (4,7); (4,8); (6,7); (6,10) in un senso e nell'altro.
La soluzione del problema è un cammino che parta dal vertice 1 e finisca al vertice 10. Possiamo quindi costruire due cammini, che sono entrambi soluzione del problema.



Problema 6-Lo scambio dei cavalli

Data una scacchiera 3x3 e numerate le caselle come in figura, e posti i cavalli degli scacchi nelle caselle 1 e 3 (i bianchi) e nelle caselle 7 e 5 (i neri), ci si domanda se è possibile cambiare di posto ai cavalli (i bianchi in 7 e 5 ed i neri in 1 e 3) spostando un cavallo alla volta secondo la modalità degli scacchi senza mai avere due cavalli nella medesima casella.
Rappresentare le regole e lo schema di risoluzione del problema ora enunciato con l'ausilio di un grafo significa, così come è rappresentato in figura , associare ad ogni casella un nodo e definire che due nodi sono collegati da un arco solo se é possibile passare da uno all'altro, degli scacchi che rappresentano, con una mossa di cavallo.
Si osserva allora che la casella centrale, non numerata, non é raggiungibile, mentre il problema ha soluzione poiché basta far circolare i cavalli secondo lo schema del grafo, in modo da non sovrapporli in nessuna delle configurazioni possibili.





Problema7-Le "strette di mano" (handshaking problems).

In tutti questi problemi la situazione iniziale è la seguente: consideriamo una riunione di n persone, alcune delle quali si stringono la mano fa loro.
Possiamo rappresentare tale situazione in termini di teoria dei grafi, costruendo un grafo semplice non orientato G in cui i vertici sono le n persone, e in cui 2 vertici distinti x,y sono adiacenti (quindi collegati da un arco) se x,y si sono stretti la mano.

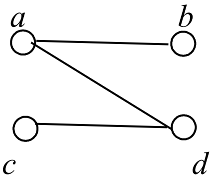
Con questa situazione iniziale, vi sono nella letteratura diversi problemi (detti appunto **handshaking problems**) : ne esporrò uno come esempio.

Problema: se il numero n di persone è ≥ 6, dimostrare che è verificata sempre almeno una delle seguenti condizioni
- esistono 3 persone che si sono strette reciprocamente la mano
- esistono 3 persone tali che nessuna delle 3 ha stretto la mano alle altre 2

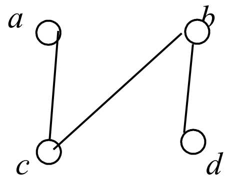
Cerchiamo prima di tradurre il problema in un problema relativo al grafo G associato alla riunione delle n persone, ricorrendo al concetto di "grafo duale".

Definizione 4 Dato un qualunque grafo semplice non orientato G, si chiama **grafo duale di G** il grafo semplice non orientato G' che ha gli stessi vertici di G, ma nel quale due vertici distinti x,y sono adiacenti (cioè collegati da un arco) se e solo se x,y non sono adiacenti nel grafo G.

Esempio 2: dato il seguente grafo semplice non orientato G



il suo grafo duale G' è il seguente

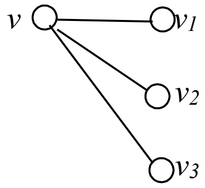


Nel grafo duale del grafo associato alla riunione di n persone, due vertici distinti x,y saranno adiacenti se e solo se x,y non si sono stretti la mano.
Dunque il problema precedente, in termini di teoria dei grafi, diventa:
dato un qualunque grafo semplice orientato G con n vertici, in cui $n\geq 6$, dimostrare che è verificata sempre almeno una delle seguenti condizioni
- esistono 3 vertici reciprocamente adiacenti nel grafo G
- esistono 3 vertici reciprocamente adiacenti nel grafo G'

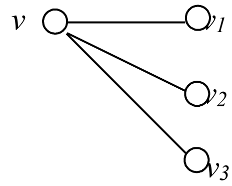
Poiché 3 vertici reciprocamente adiacenti in un grafo formano un ciclo di lunghezza 3, il problema diventa:
dato un qualunque grafo semplice orientato G con n vertici, in cui $n\geq 6$, dimostrare che esiste almeno un ciclo di lunghezza 3 in G o nel grafo duale G'.

Prima di dimostrare vera tale affermazione, notiamo che se un grafo non orientato G ha n vertici, e se un vertice v in G ha grado k allora lo stesso vertice v nel grafo duale G' ha grado $n-1-k$: infatti se v è adiacente ad un numero k di vertici nel grafo G (questi k vertici sono scelti fra gli $(n-1)$ vertici diversi da v), allora v nel grafo duale G' è adiacente ai restanti vertici diversi da v, che sono appunto in numero di $n-1-k$.
Dimostriamo ora vera l'affermazione precedente: **dato un qualunque grafo semplice orientato G con n vertici, in cui $n\geq 6$, dimostrare che esiste almeno un ciclo di lunghezza 3 in G o nel grafo duale G'.**

Dimostrazione**.** Fissiamo a piacere un vertice v in G. Distinguiamo 2 casi (e in ambedue i casi dimostriamo la tesi):
I° caso: il grado k di v è ≥ 3; in questo caso vi sono almeno 3 vertici v_1,v_2,v_3 adiacenti al vertice v nel grafo G



(grafo G)



(grafo G')

In questo caso, se almeno due dei tre vertici v_1,v_2,v_3 sono adiacenti fra loro, in G esiste un ciclo di lunghezza 3 (con terzo vertice v) e si ha la tesi; se invece nessuno dei tre vertici v_1,v_2,v_3 è adiacente ad uno degli altri, allora v_1,v_2,v_3 sono tutti adiacenti fra loro nel grafo duale G' quindi essi formano un ciclo di lunghezza 3 in G', e di nuovo si ha la tesi;
II° caso: il grado k di v è <3 ; in questo caso il grado di v nel grafo duale G', come osservato sopra, è $n-1-k$ e poiché $n\geq 6$ tale grado è $\geq 6-1-k=5-k\geq 3$, dunque v nel grafo duale G' ha grado ≥ 3; in questo caso vi sono almeno 3 vertici v_1,v_2,v_3 adiacenti al vertice v nel grafo duale G'.

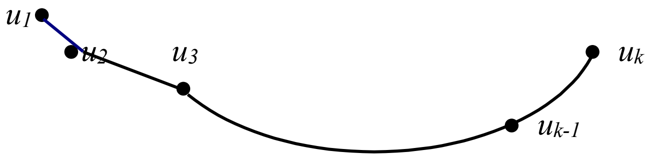
Problema 8-Il commesso viaggiatore ed i grafi hamiltoniani
Un altro problema classico della teoria dei grafi è il problema del commesso viaggiatore: il territorio di un commesso viaggiatore comprende diverse città connesse tra loro a due a due per mezzo di autostrade, il lavoro quindi del commesso viaggiatore gli richiede di visitare personalmente tutte le città; la teoria dei grafi ci dovrebbe aiutare a trovare un cammino che gli consenta di passare per ogni città una ed una sola volta.
Noi possiamo rappresentare il problema di viaggio con un grafo G in cui i vertici corrispondono alle città e tale che due vertici sono collegati da un lato se e solo se esiste un'autostrada connette le corrispondenti città senza passare attraverso qualche altra città. La soluzione del problema dipende dal fatto che esista un ciclo contenente ogni vertice di G.(Notiamo la differenza tra questo e il problema precedente in cui il ciclo o il cammino dovevano contenere tutti i vertici e tutti i lati di G.)
Per risolvere questo problema occorre introdurre una nuova definizione.

Definizione Un grafo si dice **hamiltoniano** se in esso esiste un ciclo che contiene ogni vertice di G e un tale ciclo si di ce anch'esso **hamiltoniano**.

Esempio 3 Il grafo G_1 della seguente figura è hamiltoniano, mentre il grafo G_2 non lo è. Infatti il grafo G_1 contiene per esempio il ciclo hamiltoniano u_1,u_2,u_5,u_4,u_3,u_1 . Dimostriamo invece che il grafo G_2 non è hamiltoniano. Infatti supponiamo che lo sia, allora G_2 deve contenere un ciclo C hamiltoniano. C deve contenere tutti i vertici di , quindi contiene v_2,v_3 e v_4. I tre vertici v_2,v_3 e v_4 hanno tutti grado 2, quindi C contiene due lati incidenti con ognuno di questi vertici, perciò contiene i lati v_1v_2, v_1v_3 e v_1v_4. Ma naturalmente ogni ciclo può contenere solo due lati incidenti in un vertice.

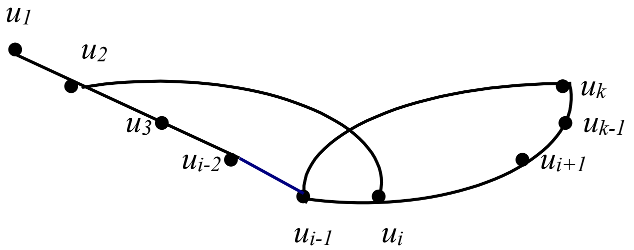
Quindi riuscire a stabilire se un grafo è hamiltoniano ci consentirebbe di sapere in ogni caso se il problema del commesso viaggiatore che rappresenta è risolubile, purtroppo sinora è stata trovata solo una condizione sufficiente affinché un grafo sia hamiltoniano, ma non una condizione necessaria.
Questa condizione è espressa dal seguente teorema.

Teorema 4 Se G è un grafo avente p vertici, con $p \geq 3$ e per ogni vertice v, deg $v \geq p/2$, allora G è hamiltoniano.
Dim. Se G ha p=3 vertici e per ogni vertice v di G deg $v \geq 3/2$, allora deg v=2 e quindi G è nil grafo completo con 3 vertici, che è evidentemente hamiltoniano. Supponiamo ora che $p \geq 4$. Tra tutti i cammini di G sia P uno di quelli che contiene il massimo numero di vertici. Supponiamo che P sia formato dai vertici $u_1 .... u_k$.



Poiché nessun cammino in G ha più vertici di P, ogni vertice adiacente ad u_1 deve appartenere a P ed essendo almeno p/2 i vertici adiacenti ad esso, P deve avere almeno p/2+1 vertici.
Ora ci deve essere qualche vertice u_i di P con $2 \leq i \leq k$ tali che u_1 sia adiacente a u_i e u_k sia adiacente a u_{i-1}. Infatti se così non fosse allora per ogni vertice u_i adiacente a u_1, risulterebbe u_{i-1} non adiacente

a u_k . Naturalmente siccome ci sono almeno p/2 vertici adiacenti a u_1, ci saranno almeno p/2 vertivi non adiacenti a u_k. Perciò deg $u_k \leq (p-1)-p/2<p/2$, che è impossibile giacché deg $u_k \geq p/2$.
Quindi c'è un vertice u_i di P tale che u_1u_i e $u_k u_{i-1}$ sono entrambi lati di G. Da ciò segue che esiste un circuito C $u_1,...,u_i,u_{i+1},.........,u_k,u_{i-1},u_{i-2},.....u_1$ contenente tutti i vertici di P.



Se tutti i vertici di G appartengono a G , allora C è un circuito hamiltoniano e G è un grafo hamiltoniano.
Supponiamo ci sia un vertice w di G che non appartiene a C. Poiché C contiene almeno p/2 +1 vertici i vertici di G che non appartengono a C sono meno di p/2, ma deg $w \geq$p/2, quindi il vertice w deve essere adiacente a qualche vertice u_j di C. Naturalmente, il lato wu_j e il circuito C formano un cammino avente un vertice in più di P e questo è impossibile perché P ha il maggior numero di vertici. Questa contraddizione implica che C contiene tutti i vertici di G e quindi G è hamiltoniano.

Il fatto che questa condizione non sia necessaria è evidente anche dal fatto che il precedente grafo G_1 è hamiltoniano.

Problema 9 Consideriamo un gruppo di studenti ad un party universitario. Rappresentiamo la situazione con un grafo G in cui i vertici sono gli studenti e due vertici di G sono adiacenti se il ragazzo e la ragazza corrispondenti hanno avuto un appuntamento insieme. Se G è hamiltoniano il numero dei ragazzi uguaglia quello delle ragazze.

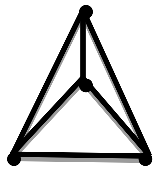
I grafi planari

La rappresentazione geometrica di un grafo su un piano avviene disegnando i nodi e gli archi che li uniscono. A volte è necessario disegnarli in modo tale che tra gli archi non ci siano intersezioni.

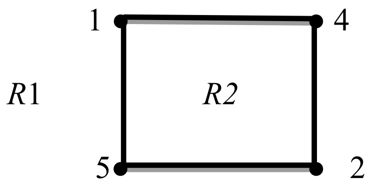
Problema 10 Un problema molto famoso in questo senso è quello delle tre case costruite da poco che devono essere dotate dei servizi di acqua, luce e gas. E' possibile collegarle a queste tre utenze in modo che gli allacci , effettuati sottoterra allo stesso livello non si intersechino?
Il concetto che ci aiuta a risolvere questi problemi è quello di grafo planare.

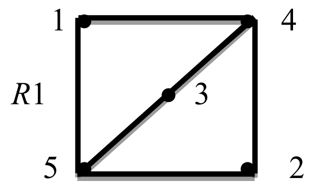
Definizione 5 Un grafo si dice **planare** se può essere rappresentato nel piano in modo tale che due qualunque suoi spigoli non si intersechino in punti che non siano vertici. In un grafo planare si dicono **facce** le regioni in cui il piano viene diviso dai cicli del grafo.

Esempio 4 Il grafo completo con 4 vertici è planare.



Quindi per risolvere il problema proposto dobbiamo cercare di capire se è possibile disegnare un grafo planare delle tre case e delle tre utenze.
Se indichiamo con 1,2,3, i vertici rappresentanti le case e con 4,5 e 6 i vertici rappresentanti le centrali delle utenze abbiamo che entrambi i vertici 1 e 2 devono essere connessi a 4 e 5.
Questi quattro vertici formano un ciclo che dividono il piano in due regioni $R1$ e $R2$ come mostrato in Figura .





Il vertice 3 è interno o ad $R1$ oppure ad $R2$. Supponiamo che stia in $R2$ (analogamente si procederà se 3 è in $R1$). Gli spigoli $3,4$ e $3,5$ separano $R2$ nelle due sottoregioni $R21$ e $R22$, come mostrato in Figura.
Non c'è alcun modo di disegnare il vertice 6, e gli spigoli ad esso adiacenti, senza creare un incrocio con qualcuno dei precedenti spigoli. Infatti, se disegnamo 6 in $R1$, lo spigolo $3,6$ deve necessariamente intersecare uno degli spigoli già tracciati. Se 6 lo poniamo in $R21$ (oppure in $R22$) sarà lo spigolo 2,6 ($1,6$, rispett.) a creare un'intersezione.
Una rappresentazione planare di un grafo, quando esiste, partiziona il piano in *regioni* o *facce*, inclusa una regione non limitata.
Eulero ha dimostrato che tutte le rappresentazioni piane di uno stesso grafo planare partizionano il piano sempre nello stesso numero di regioni. Egli ha provato questo fatto determinando una formula che mette in relazione il numero delle regioni, il numero dei vertici, il numero degli spigoli e il numero delle componenti connesse di un grafo planare.

Teorema Formula di Eulero per i grafi planari . *S*ia G = (V;E) un grafo planare connesso. Indicati con n,a,f rispettivamente il numero di nodi, archi e facce di G. Allora

$$n - a + f = 2.$$

Dim. Sia G_1 il sottografo costituito da uno spigolo di G preso a piacere. In generale, per $i = 2; : : : ; a$, il sottografo Gi si ottiene aggiungendo a G_I un nuovo spigolo che sia incidente con G_1. Questa costruzione è possibile perché, per il momento, abbiamo supposto che G *sia* connesso. Ovviamente al passo a abbiamo $G_a = G$.
Inoltre, di ogni G_i si può dare una rappresentazione planare che sia indotta dalla rappresentazione planare di G. Per $i = 1; 2; : : : ; a$, siano f_i, a_i e n_i rispettivamente il numero delle regioni, spigoli e vertici di questa rappresentazione planare di Gi. Per G_1 valgono le relazioni $f_i = a_i = 1$ e $n_i = 2$, come si vede in Figura , e quindi $f_I - a_I + n_I = 2$.

Ora, supponiamo che per G_i valga l'uguaglianza $f_i - a_i + n_i = 2$. Sia $a_{i+1}; b_{i+1}$ lo spigolo che si aggiunge a G_i per ottenere G_{i+1}. Abbiamo due casi:
1. Sia a_{i+1} che b_{i+1} sono due vertici di G_i. Allora entrambi devono trovarsi sulla frontiera comune di una stessa regione R, altrimenti sarebbe impossibile aggiungere a G_i lo spigolo $a_{i+1}; b_{i+1}$ senza creare intersezioni (altrimenti si contraddirebbe la planarità di G_{i+1}). L'aggiunta di questo nuovo spigolo divide R in due regioni.

Quindi $f_{i+1} = f_i + 1$, $a_{i+1} = a_i + 1$ e $n_{i+1} = n_i$.
Dalle quali segue l'uguaglianza $f_i - a_i + n_i = 2$.
2. Uno dei due vertici dello spigolo a_{i+1}; b_{i+1} non appartiene a Gi. Supponiamo sia esso $bi+1$. Aggiungendo questo nuovo spigolo non si producono nuove regioni perché b_{i+1} deve stare in una regione la cui frontiera contiene a_{i+1} (si veda la Figura). Allora la presenza del nuovo spigolo non produce nuove regioni, per cui $f_{i+1} = f_i$, $a_{i+1} = a_i + 1$ e $n_{i+1} = n_i + 1$, quindi sarà ancora $f_i - a_i + n_i = 2$.

Bibliografia

Oystein Ore "*I grafi e le loro applicazioni*" casa ed. Zanichelli

Anna Cerasoli, Mauro Cerasoli "*Matematica generale ed applicata*" casa ed. Zanichelli

Mauro Dell'Amico "*Programmazione matematica*" casa ed. Pitagora

Gary Chartrand "*Introductory graph theory*" casa ed. Dover Publications

Claude Berge "*The theory of graphs*" casa ed. Dover Pubblications

Sitografia

www.mat.uniroma3.it/users/liverani/doc/disp_oc_04.pdf

www.liceodavincitv.it/attivi/lauree/08-09/appunti**grafi**.pdf

www.dmi.unict.it/~gquattro/...2/**teoria**%20**dei**%20**grafi**%20no.pdf

www.matematicamente.it/.../98.Zammillo-Salto_del_cavallo.pdf

docente.unife.it/.../Note%20di%20**teoria**%20**dei**%20**grafi**.pdf