Incontri Olimpici 2011

Problemi di geometria

Cetraro, 11 ottobre 2011

Appunti redatti da Ercole Suppa

Sommario

In questo documento sono riportate le soluzioni dei problemi di geometria proposti e risolti da Fabio Bioletto.

Problema 1. *Dimostrare che $OH^2 = 9R^2 - a^2 - b^2 - c^2$.*

Dimostrazione. Fissando l'origine nel circoncentro O abbiamo che $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{A} + \overrightarrow{B} + \overrightarrow{C}$, da cui segue che:

$$\begin{aligned}
OH^2 = \|OH\|^2 = \left(\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B} + \overrightarrow{C}\right)^2 = \\
&= \left\|\overrightarrow{A}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{B}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{C}\right\|^2 + 2\left(\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B} + \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{C} + \overrightarrow{C} \cdot \overrightarrow{A}\right) = \\
&= 3R^2 + 2R^2 (\cos 2C + \cos 2A + \cos 2C) = \\
&= 3R^2 + 2R^2 \left(1 - 2\operatorname{sen}^2 C + 1 - 2\operatorname{sen}^2 A + 1 - 2\operatorname{sen}^2 B\right) = \\
&= 3R^2 + 2R^2 \left(1 - \frac{c^2}{2R^2} + 1 - \frac{a^2}{2R^2} + 1 - \frac{b^2}{2R^2}\right) = \\
&= 9R^2 - \left(a^2 + b^2 + c^2\right)
\end{aligned}$$

$\square$

Problema 2. *Dimostrare che un triangolo è acutangolo se e solo se* $a^2 + b^2 + c^2 > 8R^2$*, è rettangolo se e solo se* $a^2 + b^2 + c^2 = 8R^2$ *ed è ottusangolo se e solo se* $a^2 + b^2 + c^2 < 8R^2$.

Dimostrazione. Dal problema 1 segue che

$$a^2 + b^2 + c^2 = 9R^2 - OH^2 \tag{*}$$

Tenuto conto di (*) abbiamo

- ABC è acutangolo $\Leftrightarrow OH < R \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 > 8R^2$.
- ABC è rettangolo $\Leftrightarrow OH = R \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 8R^2$.
- ABC è ottusangolo $\Leftrightarrow OH > R \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 < 8R^2$.

□

Problema 3. *Dimostrare che le rette* AO *ed* AH *sono simmetriche rispetto alla bisettrice uscente da* A *(e cicliche).*

Dimostrazione.

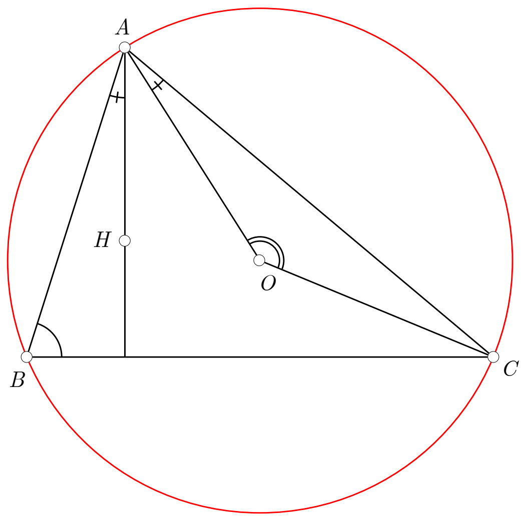

FIGURA 1

Poichè $\angle AOC = 2\angle ABC$ abbiamo:

$$\angle OAC = \frac{1}{2}(180° - 2B) = 90° - B = \angle BAH$$

e ciò prova che le rette AO ed AH sono simmetriche rispetto alla bisettrice uscente da A (e cicliche). □

Problema 4. *Sia ABC un triangolo e P un punto della sua circonferenza circoscritta. Si tracci la perpendicolare da P al lato BC. Sia U il secondo punto di intersezione di tale retta con la circonferenza circoscritta ad ABC. Dimostrare che la retta AU è parallela alla retta di Simson di P rispetto ad ABC.*

Dimostrazione.

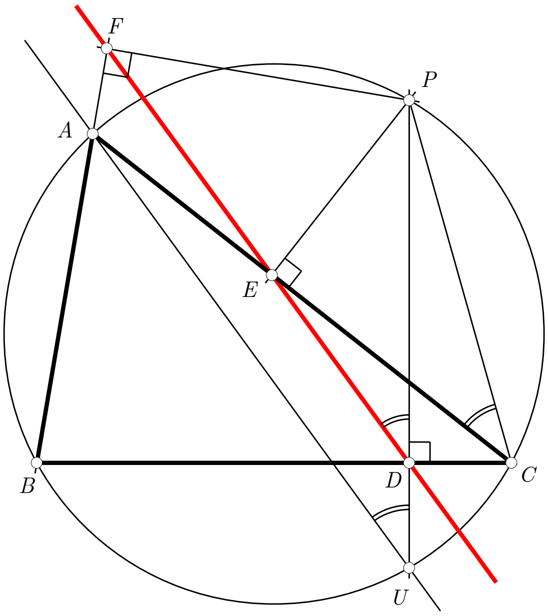

FIGURA 2

Siano D, E, F le proiezioni di P sulle rette BC, CA, AB. Dal quadrilatero ciclico $PEDC$ abbiamo

$$\angle PDE = \angle PCE \tag{1}$$

Osserviamo inoltre che

$$\angle PCA = \angle PUA \tag{2}$$

in quanto angoli alla circonferenza che insistono sulla stessa corda AP. Da (1) e (2) segue che

$$\angle PDE = \angle PCE = \angle PCA = \angle PUA$$

e ciò implica che le rette FE ed AU sono parallele. $\square$

Problema 5. *Sia $ABCD$ un quadrilatero qualsiasi, e siano E, F, G, H i punti medi dei suoi lati, con E su AB, F su BC e così via. Dimostrare che il quadrilatero $EFGH$ è un parallelogramma.*

Dimostrazione.

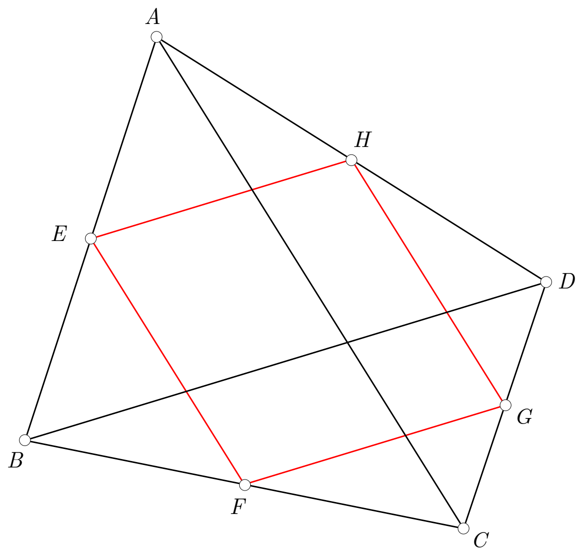

Figura 3

Dal piccolo teorema di Talete segue che EH ed FG sono paralleli a BD. Pertanto $EH \parallel FG$. Analogamente si prova che $EF \parallel GH$ e da ciò discende che $EFGH$ è un parallelogramma. □

Problema 6. *Sia $ABCD$ un quadrilatero ciclico tale che le sue diagonali siano perpendicolari. Sia X il punto di intersezione di tali diagonali. Dimostrare che i quattro punti medi dei lati e le quattro proiezioni di X sui lati giacciono tutti su un'unica circonferenza.*

Dimostrazione. Indicati rispettivamente con E, F, G, H i punti medi dei lati AB, BC, CD, DE abbiamo che $EFGH$ è un rettangolo avente i lati paralleli alle diagonali AC e BD del quadrilatero $ABCD$ (la dimostrazione segue direttamente dal problema 5).

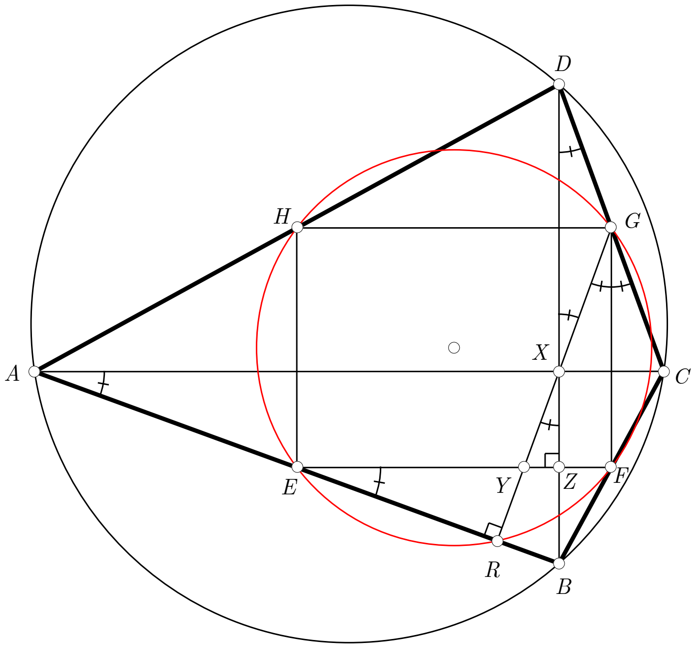

FIGURA 4

Siano $Y = GX \cap EF$, $Z = BD \cap EF$, $R = GX \cap AB$.

Poichè $\angle DXC = 90°$ e $DG = GC$ abbiamo:

$$GX = GC \quad \Rightarrow \quad \angle XGF = \angle FGC \tag{1}$$

Dalla (1) e dal parallelismo delle rette DB e GF segue che:

$$\angle YXE = \angle DXG = \angle XGF = \angle FGC = \angle XDC = \angle BDC \tag{2}$$

D'altra parte, tenuto conto che $ABCD$ è ciclico e $AC \parallel EF$, abbiamo:

$$\angle REY = \angle RAC = \angle BAC = \angle BDC \tag{3}$$

Da (2) e (3) discende che $\angle YXE = \angle REY$. Pertanto:

$$\begin{aligned}\angle ERG = \angle ERY = 180^\circ - (\angle REY + \angle EYR) = \\ = 180^\circ - (\angle XYZ + \angle YXZ) = 90^\circ\end{aligned}$$

Essendo $\angle ERX = \angle ERG = 90^\circ$ abbiamo che

- il punto R è la proiezione di X su AB;
- il punto R appartiene alla circonferenza γ (di diametro EG) circonscritta al quadrilatero $EFGH$.

Pertanto i punti E, F, G, H, R sono conciclici. In modo analogo si dimostra che anche le proiezioni di X sugli altri lati BC, CD e DA giacciono sulla circonferenza γ. $\square$