

Problemi di geometria

1. Dimostrare che $OH^2=9\cdot R^2-a^2-b^2-c^2$ (Hint: come si scrive OH in vettori?)
2. Dimostrare che un triangolo è acutangolo se e solo se $a^2+b^2+c^2>8\cdot R^2$, è rettangolo se e solo se $a^2+b^2+c^2=8\cdot R^2$ ed è ottusangolo se e solo se $a^2+b^2+c^2<8\cdot R^2$
3. Dimostrare che le rette AO e AH sono simmetriche rispetto alla bisettrice uscente da A (e cicliche).
4. Sia ABC un triangolo e P un punto sulla sua circonferenza circoscritta. Si tracci la perpendicolare da P al lato BC. Sia U il secondo punto di intersezione di tale retta con la circonferenza circoscritta ad ABC. Dimostrare che la retta AU è parallela alla retta di Simson di P rispetto a ABC.
5. Sia ABCD un quadrilatero qualsiasi, e siano E, F, G, H i punti medi dei suoi lati, con E su AB, F su BC, e così via. Dimostrare che il quadrilatero EFGH è un parallelogramma.
6. Sia ABCD un quadrilatero ciclico tale che le sue diagonali siano perpendicolari. Sia X il punto di intersezione di tali diagonali. Dimostrare che il 4 punti medi dei lati e le 4 proiezioni di X sui lati giacciono tutti su un'unica circonferenza.

NOTA: in tutti gli esercizi, se non diversamente specificato, si farà sempre riferimento alle notazioni standard usate nei triangoli:-

-i vertici sono A, B, e C;

-le lunghezze dei lati sono a (lunghezza di BC), b (lunghezza di AC) e c (lunghezza di AB);

-gli angoli sono α , β , e γ ;

-il circocentro è O, l'ortocentro H, l'incentro I e il baricentro G;

-il raggio della circonferenza circoscritta è R, quello della circonferenza inscritta è r;

-il triangolo ortico è quello che ha come vertici i piedi delle altezze, il triangolo mediale quello che ha come vertici i punti medi dei lati.