Incontri Olimpici 2011

Problemi di geometria

Cetraro, 11 ottobre 2011

Appunti redatti da Ercole Suppa

Sommario

In questo documento sono riportate le soluzioni dei problemi di geometria proposti e risolti da Andrea Fogari.

Problema 1. *In un triangolo ABC i piedi delle altezze sono A_1, B_1, C_1 e i punti medi dei lati A_2, B_2, C_2 (nell'ordine naturale). Si conduca da A_2 la perpendicolare a B_1C_1, da B_2 la perpendicolare a C_1A_1, da C_2 la perpendicolare a A_1B_1. Dimostrare che le tre rette concorrono.*

Dimostrazione. Siano A_3, B_3, C_3 i punti medi dei segmenti AH, BH, CH rispettivamente. E' noto che i punti A_i, B_i, C_i $(i = 1, 2, 3)$ giacciono sulla circonferenza dei nove punti del triangolo $\triangle ABC$. Osserviamo altresì che i segmenti A_2A_3, B_2B_3, C_2C_3 sono diametri di detta circonferenza in quanto $\angle A_3A_1A_2 = \angle B_3B_1B_2 = \angle C_3C_1C_2 = 90°$. Pertanto A_2A_3, B_2B_3, C_2C_3 passano per il centro N della circonferenza dei nove punti (figura 1).

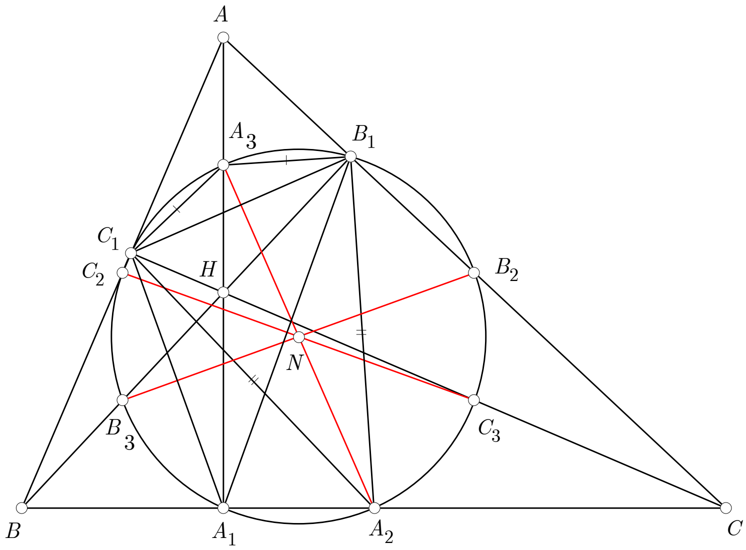

FIGURA 1

Per completare la dimostrazione allora è sufficiente dimostrare che $A_2A_3 \perp B_1C_1$ e cicliche.

Dimostriamo ad esempio che $A_2A_3 \perp B_1C_1$:

(i) dal quadrilatero ciclico AC_1HB_1 abbiamo che $A_3B_1 = A_3C_1$ (in quanto A_3 è il centro della circonferenza circoscritta ad AC_1HB_1) e quindi A_3 giace sull'asse di B_1C_1.

(ii) dal quadrilatero ciclico BCB_1C_1 abbiamo che $A_2B_1 = A_2C_1$ (in quanto A_2 è il centro della circonferenza circoscritta ad BCB_1C_1) e quindi A_2 giace sull'asse di B_1C_1.

Pertanto A_2A_3 è l'asse di B_1C_1 e, di conseguenza, $A_2A_3 \perp B_1C_1$.

In modo analogo si prova che $B_2B_3 \perp A_1C_1$ e $C_2C_3 \perp A_1B_1$. $\square$

Problema 2. *(IMO 2007/2) Sia $ABCD$ un parallelogramma. Una retta ℓ che passa per A interseca le rette CD, CB rispettivamente in E, F. Il circocentro di CEF appartiene alla circonferenza che passa per B, C, D. Dimostrare che ℓ è la bisettrice dell'angolo $\angle BAD$.*
(Hint: costruire la retta di Simson proiettando E sui lati di un triangolo ... e fare considerazioni su tre punti che ora sappiamo essere allineati).

Dimostrazione. Siano M, P, Q i piedi delle perpendicolari condotte da E su BD, CD, BC rispettivamente. Poichè E appartiene al circoncerchio di $\triangle BCD$ i punti M, P, Q sono allineati (appartengono alla retta di Simson di E rispetto a $\triangle BCD$).

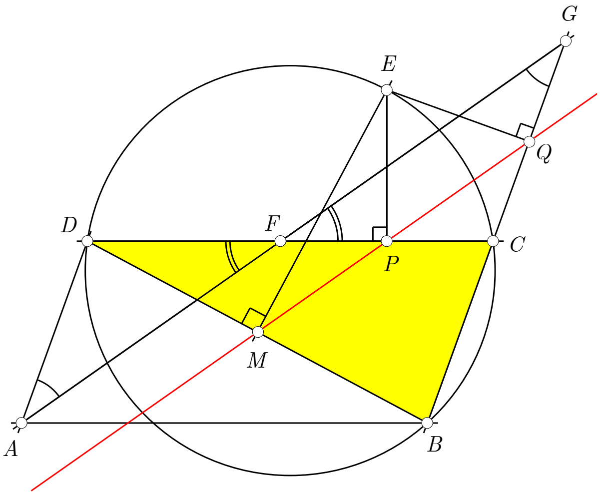

FIGURA 2

Poichè $EF = EC = EG$ i triangoli $\triangle CEF$ e $\triangle CEG$ sono isosceli e quindi P, Q sono i punti medi di FC, CG rispettivamente.

Essendo $ABCD$ è un parallelogramma abbiamo $\angle DAF = \angle FGC$, mentre $\angle DFA = \angle CFG$ in quanto angoli opposti al vertice. Pertanto i triangoli $\triangle FAD$ e $\triangle FGC$ sono simili, per cui

$$\frac{DF}{BC} = \frac{DF}{AD} = \frac{CF}{CG} \tag{1}$$

Dalla (1) segue che

$$\frac{DP}{CP} = \frac{DF + FP}{CP} = \frac{2DF + CF}{CF} = \frac{2BC + CG}{CG} = \frac{BC + CQ}{CQ} = \frac{BQ}{CQ} \tag{2}$$

Poichè P, Q, M sono allineati, per il teorema di Menelao si ha

$$\frac{DP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QB} \cdot \frac{BM}{MD} = 1 \tag{3}$$

Dalla (3) segue che $BM = MD$, ossia M è il punto medio di BD.

Pertanto $BE = DE$, in quanto EM è sia altezza che mediana del triangolo $\triangle BED$.

Essendo $BE = DE$, i punti B e D hanno la stessa potenza rispetto alla circonferenza (di centro E) circonscritta al triangolo $\triangle CFG$, quindi

$$AD \cdot CG = BC \cdot CG = DF \cdot FC \tag{4}$$

Da (1) e (4) discende che

$$\frac{AD}{DF} = \frac{FC}{CG} = \frac{DF}{AD} \quad \Rightarrow \quad AD = DF$$

ossia $\triangle ADF$ è isoscele sulla base AF.

Infine, tenuto conto che $ABCD$ è un parallelogramma, abbiamo:

$$\angle DAF = \frac{180° - \angle ADF}{2} = \frac{180° - \angle ADC}{2} = \frac{\angle DAB}{2}$$

e ciò prova che ℓ è bisettrice dell'angolo $\angle DAB$. $\square$

Problema 3. *Dati due punti A, B di una retta r costruire il punto P sulla retta r che minimizza la somma $AP + PB$.* (Hint: se A e B sono separati dalla retta, la soluzione è ovvia; altrimenti, in realtà, ci si può ricondurre al caso precedente ...!)

Dimostrazione.
Se A e B sono separati dalla retta risulta ovviamente che $P = AB \cap r$. Supponiamo pertanto che A e B si trovino dalla stessa parte rispetto alla retta r (figura 3):

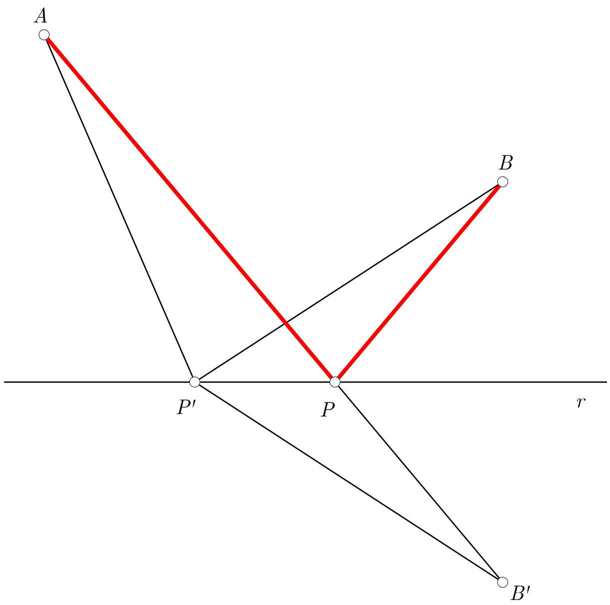

FIGURA 3

Sia B' il simmetrico di B rispetto alla retta r. Il punto P che minimizza la somma $AP + PB$ è il punto di intersezione delle rette r e AB'. Infatti preso un quasiasi punto $P' \in r$, tenuto conto della disuguaglianza triangolare e del fatto che $PB = PB'$, abbiamo:

$$AP + PB = AP + PB' \leq AP' + P'B' \qquad \square$$

Problema 4. *Due punti A e B sono separati da due fiumi, intesi come striscie di piano di larghezza fissata. Si vogliono costruire due ponti (segmenti che attraversano i fiumi perpendicolarmente alle rive) e delle strade rettilinee per collegare A a B in modo da minimizzare la strada totale. Illustrare una costruzione geometrica per ottenere la posizione di tali ponti.*

Dimostrazione. Supposto il problema risolto, siano KL ed MN i ponti costruiti perpendicolarmente alle rive dei due fiumi (figura 4).

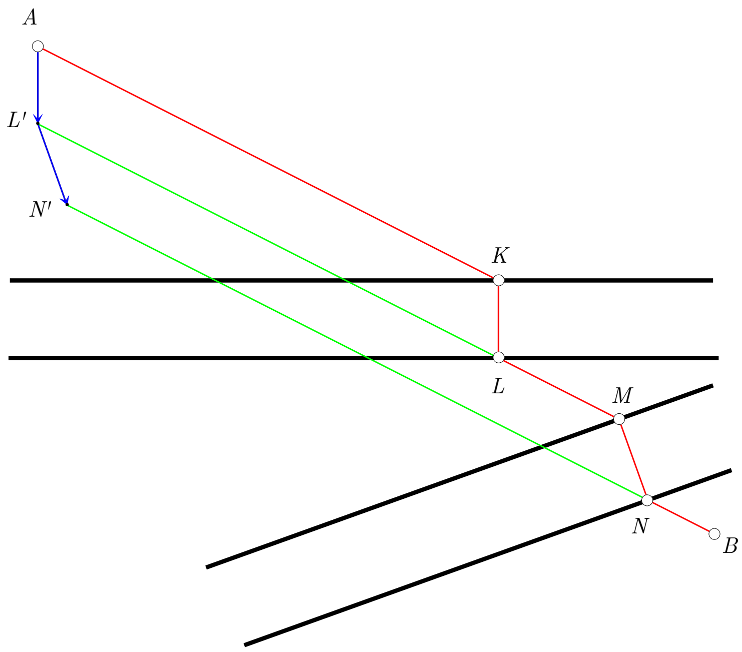

FIGURA 4

Sia L' l'immagine di A mediante una traslazione di vettore $\overrightarrow{KL}$ e sia N' l'immagine di L' mediante una traslazione di vettore $\overrightarrow{MN}$. Essendo ovviamente:

$$AK + KL + LM + MN + NB = AL' + L'N' + N'N + NB$$

il percorso $AKLMNB$ avrà di lunghezza minima se e solo se $AL'N'NB$ ha lunghezza minima e questo accade se e solo se i punti N', N, B sono allineati.

Pertanto la posizione dei ponti può essere ottenuta nel modo seguente:

- disegnare il punto L', traslato di A con un vettore avente direzione perpendicolare al primo fiume e lunghezza uguale alla larghezza del primo fiume;

- disegnare il punto N', traslato di L' con un vettore avente direzione perpendicolare al secondo fiume e lunghezza uguale alla larghezza del secondo fiume;
- determinare il punto N intersezione della retta $N'B$ con la sponda del secondo fiume, più vicina a B;
- costruire il ponte MN, perpendicolare alle rive del secondo fiume;
- determinare il punto L intersezione della retta ML' con la sponda del primo fiume, più lontana da A;
- costruire il ponte LK, perpendicolare alle rive del primo fiume.

$\square$

Problema 5. *E' dato un angolo acuto e un punto A al suo interno. Si vogliono costruire due punti B, C appartenenti ai due lati dell'angolo in modo che il triangolo ABC abbia perimetro minimo.*

Dimostrazione. Siano A', A'' le riflessioni di A rispetto alle semirette OX, OY, rispettivamente. Se $\angle XOY < 90°$ allora $\angle A'OA'' < 2\angle XOY < 180°$ e pertanto il segmento $A'A''$ interseca OX in un punto B_1 ed OY in un punto C_1 (figura 5):

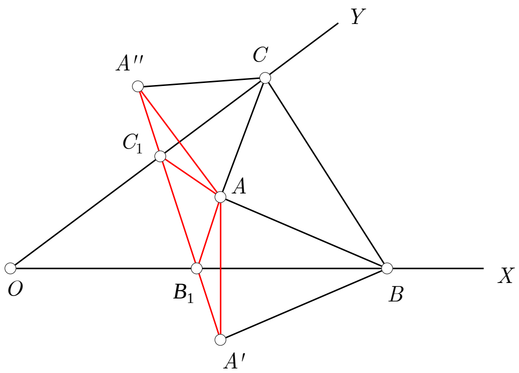

Figura 5

Presi due qualsiasi punti $B \in OX$, $C \in OY$, il perimetro del triangolo $\triangle ABC$ è uguale alla lunghezza della spezzata $A'BCA''$. Dunque in questo caso B_1 e C_1 sono i punti cercati in quanto il perimetro del triangolo AB_1C_1è uguale alla lunghezza del segmento $A'A''$.

Se $\angle XOY \geq 90°$ allora $A'A''$ non interseca le semirette OX, OY ed i punti richiesti B, C coincidono con il punto O (figura 6).

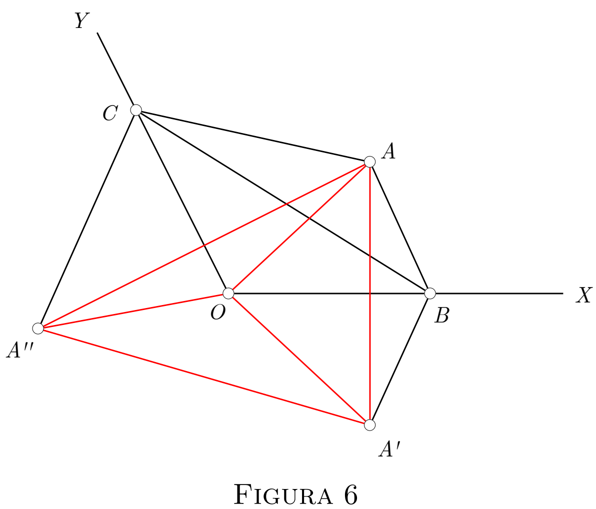

Figura 6

Problema 6. *Qual è il punto che minimizza la somma delle distanze dai vertici di un quadrilatero convesso?*

Dimostrazione. Dimostrazione.

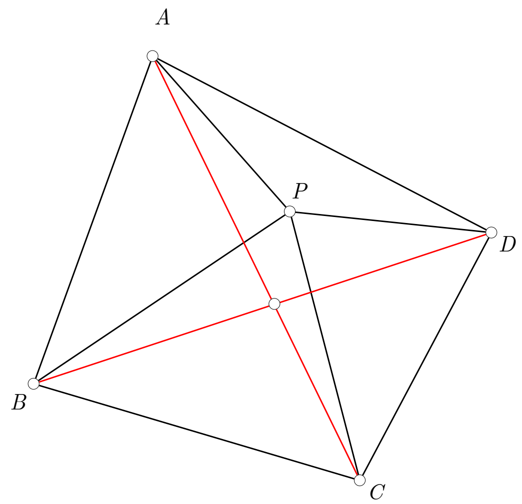

FIGURA 7

Se P è un qualsiasi punto del piano, dalla disuguaglianza triangolare segue che:

$$PA + PB + PC + PD \geq AC + BC$$

dove l'uguaglianza è verificata se e solo se P coincide con il punto di intersezione delle diagonali AC e BD. $\square$

Problema 7. *Siano A, B, C, O quattro punti del piano. Dimostrare la disuguaglianza:*

$$AB^2 + BC^2 + CA^2 \leq 3\left(OA^2 + OB^2 + OC^2\right)$$

Quando vale l'uguaglianza?

Dimostrazione. Scelta l'origine dei vettori in O abbiamo

$$AB^2 + BC^2 + CA^2 \leq 3\left(OA^2 + OB^2 + OC^2\right) \quad \Leftrightarrow$$

$$\left\|\overrightarrow{B} - \overrightarrow{A}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{C} - \overrightarrow{B}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{A} - \overrightarrow{C}\right\|^2 \leq 3\left(\left\|\overrightarrow{A}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{B}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{C}\right\|^2\right) \quad \Leftrightarrow$$

$$\left\|\overrightarrow{A}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{B}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{C}\right\|^2 + 2\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B} + 2\overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{C} + 2\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{C} \geq 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\left(\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B} + \overrightarrow{C}\right)^2 \geq 0$$

L'uguaglianza si ottiene quando $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{A} + \overrightarrow{B} + \overrightarrow{C} = \overrightarrow{0}$, ossia quando O è l'ortocentro del triangolo $\triangle ABC$. □

Problema 8. *Dimostrare che per qualsiasi punto M del piano, la somma delle distanze da M a due vertici di un triangolo equilatero è maggiore o uguale alla distanza dall'altro vertice. Dimostrare che, fissato il triangolo equilatero, l'uguaglianza vale per i punti M che stanno sulla circonferenza circonscritta.*

Dimostrazione. Dalla disuguaglianza di Tolomeo abbiamo:

$$AB \cdot MC + AC \cdot MB \geq MA \cdot BC \quad \Rightarrow \quad MC + MB \geq MA$$

Se M appartiene al circoncerchio di $\triangle ABC$ dal teorema di Tolomeo abbiamo:

$$AB \cdot MC + AC \cdot MB = MA \cdot BC \quad \Rightarrow \quad MC + MB = MA$$

□