Retta di Simson e triangolo pedale

1. In un triangolo ABC i piedi dalle altezze sono A_1, B_1, C_1 e i punti medi dei lati A_2, B_2, C_2 (nell'ordine naturale). Si conduca da A_2 la perpendicolare a B_1C_1, da B_2 la perpendicolare a C_1A_1, da C_2 la perpendicolare a A_1B_1. Dimostrare che le tre rette concorrono.

2. (IMO 2007/2) Sia $ABCD$ un parallelogramma. Una retta l che passa per A interseca le rette CD, CB rispettivamente in E, F. Il circocentro di CEF appartiene alla circonferenza che passa per B, C, D. Dimostrare che l è la bisettrice dell'angolo BAD. *(Suggerimento: costruire la retta di Simson proiettando E sui lati di un triangolo... e fare considerazioni su 3 punti che ora sappiamo essere allineati)*

Disuguaglianze geometriche

Nei seguenti esercizi di geometria piana sono da utilizzare (in qualche ordine) le seguenti tecniche:

1. *Disuguaglianza triangolare*: dati tre punti A, B, C, $AB + BC \geq AC$. Vale l'uguaglianza se A, B, C sono allineati e B sta tra A e C.

2. *Disuguaglianza di Tolomeo*: dati quattro punti A, B, C, D vale la disuguaglianza: $AB \cdot CD + BC \cdot DA \geq AC \cdot BD$. Vale l'uguaglianza se e soltanto se i quattro punti appartengono (nell'ordine dato) a una circonferenza o a una retta.

3. Definire la distanza come $\sqrt{\vec{r} \cdot \vec{r}}$, la radice quadrata del prodotto scalare del vettore distanza con se stesso.

Esercizi:

1. Dati due punti A, B e una retta r, costruire il punto P sulla retta r che minimizza la somma $AP + PB$. *Suggerimento: se A e B sono separati dalla retta, la soluzione è ovvia; altrimenti in realtà ci si può ricondurre al caso precedente...!*

2. Due punti A, B sono separati da due fiumi, intesi come strisce di piano di larghezza fissata. Si vuole costruire due ponti (segmenti che attraversano i fiumi perpendicolarmente alle rive) e delle strade rettilinee per collegare A a B in modo da minimizzare la strada totale. Illustrare una costruzione geometrica per ottenere la posizione di tali ponti.

3. È dato un angolo acuto e un punto A al suo interno. Si vuole costruire due punti B, C appartenenti ai due lati dell'angolo in modo che il triangolo ABC abbia perimetro minimo.

4. Qual è il punto che minimizza la somma delle distanze dai vertici di un quadrilatero convesso?

5. Siano A, B, C, O quattro punti del piano. Dimostrare la disuguaglianza:
$$AB^2 + BC^2 + CA^2 \leq 3(OA^2 + OB^2 + OC^2)$$
Quando vale l'uguaglianza?

6. Dimostrare che per qualsiasi punto M del piano, la somma delle distanze da M a due vertici di un triangolo equilatero è maggiore o uguale alla distanza dall'altro vertice. Dimostrare che, fissato il triangolo equilatero, l'uguaglianza vale per i punti M che stanno sulla circonferenza circoscritta.