TRIANGOLI, CIRCONFERENZE E PUNTI NOTEVOLI

Mazza Lorenzo - Liceo Scientifico Pio XII (Roma)

Incontri Olimpici - Cetraro, 9-12 ottobre 2011

L'universo non potrà essere letto finché non avremo imparato il linguaggio ed avremo familiarizzato con i caratteri con cui è scritto. E' scritto in linguaggio matematico, e le lettere sono triangoli, cerchi ed altre figure geometriche, senza le quali è umanamente impossibile comprendere una singola parola (1).

Galileo Galilei

Legenda:

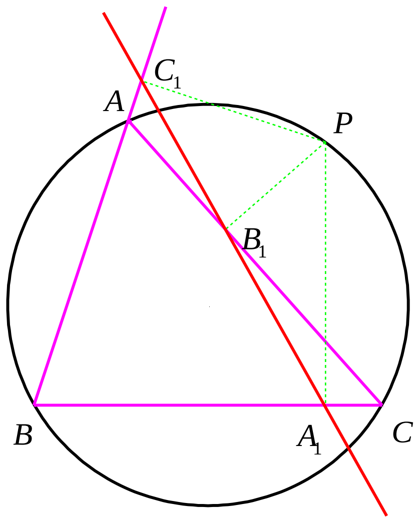
Tranne quando diversamente specificato, si farà sempre riferimento alle notazioni standard usate nei triangoli, vale a dire:

- i vertici sono A, B, e C e con ABC si indica l'intero triangolo;
- le lunghezze dei lati sono a (lunghezza di BC), b (lunghezza di AC) e c (lunghezza di AB);
- il circocentro è O, l'ortocentro è H e il baricentro è G;
- il raggio della circonferenza circoscritta è R.

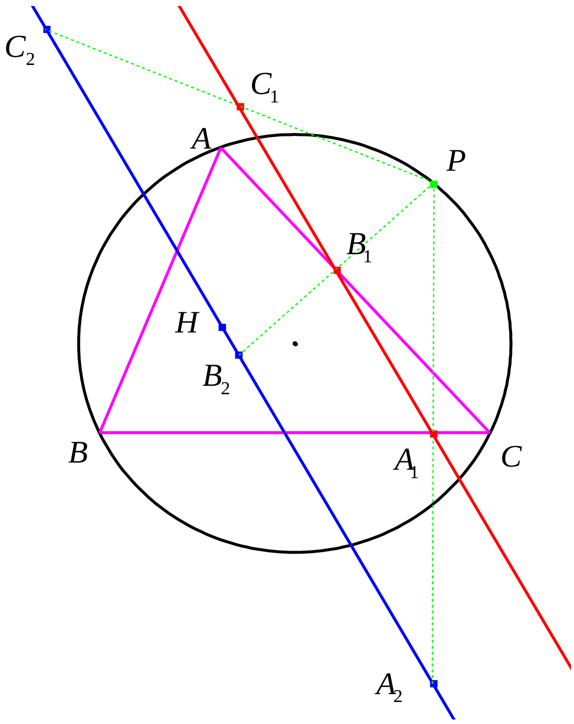
Ricordando Cetraro 2010…

Teorema di Simson (2): *le proiezioni di un punto P sui lati di un triangolo ABC sono allineate se e solo se P appartiene alla circonferenza circoscritta ad ABC* (3).

La retta sulla quale giacciono le proiezioni del punto P prende il nome di **retta di Simson** o retta pedale.



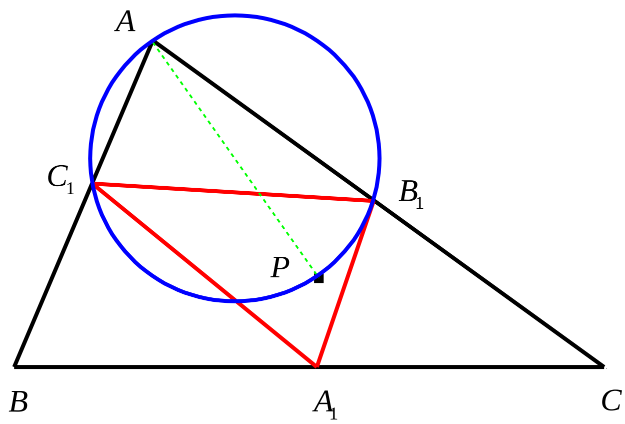
[1] G. Galilei, *Il saggiatore*, pag. 171.



Dal momento che i piedi delle altezze A_1, B_1 e C_1 sono allineati, saranno anche allineati i simmetrici A_2, B_2 e C_2 del punto P rispetto ai tre lati del triangolo. Basta infatti applicare un'omotetia di centro P e rapporto 2 la quale manda A_1 in A_2, B_1 in B_2 e C_1 in C_2 e ricordare che ogni omotetia è una collineazione[4]. Inoltre, dal momento che le omotetie mandano rette in rette parallele, la retta passante per A_2, B_2 e C_2 sarà parallela alla retta di Simson. Infine è possibile dimostrare che la retta sulla quale giacciono A_2, B_2 e C_2 passa per l'ortocentro H del triangolo ABC [5]. Da ciò ne consegue che la retta di Simson biseca il segmento PH.

Se il punto P non dovesse appartenere alla circonferenza circoscritta al triangolo ABC, i piedi delle altezze A_1, B_1 e C_1 condotti da P sui lati di ABC non saranno più allineati. Il triangolo $A_1B_1C_1$ prende il nome di **triangolo pedale** e il punto P sarà il "punto pedale di ABC".

Si consideri il quadrilatero AC_1PB_1. Esso è inscrivibile in una circonferenza in quanto



$A\hat{B}_1P = A\hat{C}_1P = 90°$ e AP ne è un diametro.

Applicando il teorema della corda ad AB_1C_1 risulta $\dfrac{B_1C_1}{sen\alpha} = AP$ (ove $B\hat{A}C = \alpha$).

Analogamente risulta $\dfrac{BC}{sen\alpha} = 2R$.

Dividendo membro a membro si ottiene

$$\frac{B_1C_1}{BC} = \frac{AP}{2R}.$$

---

2 Tale teorema è noto anche come "Teorema di Simson-Wallace" essendo stato il matematico William Wallace il primo a scoprirlo e dimostrarlo nel 1797.

3 Per la dimostrazione visionare la lezione di Geometria della Prof.ssa Tedeschi e la relativa esercitazione pomeridiana a cura di S. di Marino e F. Lo Bianco presenti sul sito http://www.dma.unifi.it/~mugelli/Incontri_Olimpici_2010/.

4 Una collineazione è una trasformazione geometrica tale che a punti allineati fa corrispondere punti allineati. Un'omotetia è una collineazione. Infatti siano A, B e C tre punti allineati (con B compreso fra A e C); essi pertanto verificano l'uguaglianza $AB + BC = AC$. Per le loro immagini si ha $A'B' + B'C' = kAB + kBC = k(AB + BC) = kAC = A'C'$; quindi anche A', B' e C' sono allineati.

5 Per la dimostrazione consultare il testo di Honsberger R. "Episodes in Nineteenth and Twentieth Century Euclidean Geometry", *The Mathematical Association of America* 37, 1995.

Procedendo con lo stesso ragionamento per gli altri lati del triangolo pedale, si giunge a scrivere le seguenti relazioni:

$$B_1C_1 = \frac{a \cdot AP}{2R}; \qquad A_1C_1 = \frac{b \cdot BP}{2R}; \qquad A_1B_1 = \frac{c \cdot CP}{2R}$$

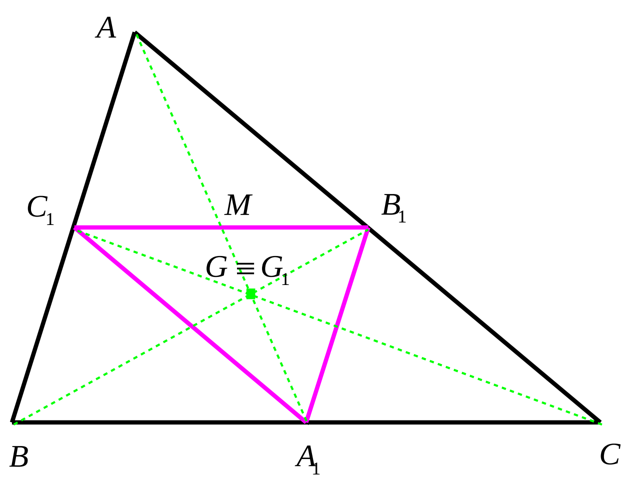
Esse valgono indipendentemente dalla posizione di P. Pertanto se P appartiene alla circonferenza circoscritta ad ABC (e quindi il quadrilatero $ABCP$ è ciclico) i punti A_1, B_1 e C_1 sono allineati per quanto visto in precedenza e, supponendo che B_1 sia compreso fra A_1 e C_1, risulta verificata la relazione $A_1C_1 = A_1B_1 + B_1C_1$; moltiplicando entrambi i membri per $2R$ si ottiene $b \cdot BP = c \cdot CP + a \cdot AP$ o equivalentemente $AC \cdot BP = AB \cdot CP + BC \cdot AP$ il quale altro non è che il **Teorema di Tolomeo** per quadrilateri ciclici. Nel caso in cui P non dovesse appartenere alla circonferenza circoscritta ad ABC, e quindi il quadrilatero $ABCP$ non dovesse essere ciclico, per il triangolo pedale varrebbe la relazione $A_1C_1 < A_1B_1 + B_1C_1$, da cui discende che $b \cdot BP < c \cdot CP + a \cdot AP$ o equivalentemente $AC \cdot BP < AB \cdot CP + BC \cdot AP$ [6].

Se P dovesse coincidere con il circocentro O di ABC, allora $AP = BP = CP = R$, pertanto risulterebbe $\frac{B_1C_1}{BC} = \frac{AO}{2R} = \frac{R}{2R} = \frac{1}{2}$ (e così analogamente per gli altri due lati). Il triangolo $A_1B_1C_1$

tr. mediale

prende il nome di **triangolo mediale** in quanto A_1, B_1 e C_1 sono i punti medi dei lati di ABC. Alcune considerazioni:

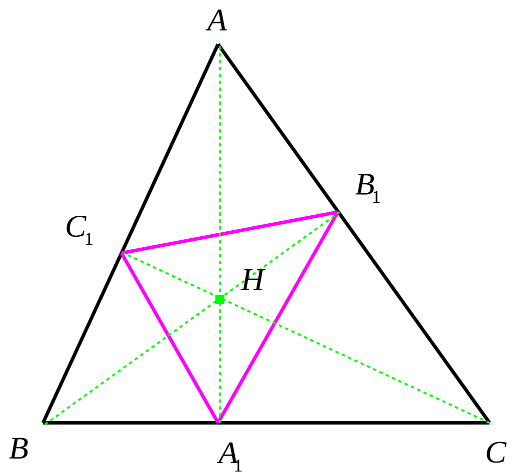
- Il triangolo mediale $A_1B_1C_1$ è simile al triangolo ABC in un rapporto di 1 a 2.
- I triangoli AC_1B_1, BA_1C_1, CB_1A_1 e $A_1B_1C_1$ sono uguali fra loro.
- ABC e $A_1B_1C_1$ hanno lo stesso baricentro. Infatti si consideri la mediana AA_1 di ABC. Il quadrilatero $AC_1A_1B_1$ è un parallelogramma e pertanto ha le diagonali che si incontrano nel punto medio, in particolare C_1M è uguale a MB_1. Ne consegue che A_1M è una mediana di $A_1B_1C_1$ (discorso analogo per BB_1 e CC_1).



6 Il teorema di Tolomeo può anche essere dimostrato sfruttando la similitudine fra triangoli. A riguardo, si veda la lezione di Geometria della Prof.ssa Serre presente sul sito http://www.dma.unifi.it/~mugelli/Incontri_Olimpici_2009/

- Il circocentro di ABC coincide con l'ortocentro di $A_1B_1C_1$. Ciò discende dal fatto che gli assi dei lati di ABC sono le altezze di $A_1B_1C_1$ visto il parallelismo fra i lati del triangolo mediale e di ABC [7].

Se P dovesse coincidere con l'ortocentro H di ABC, il triangolo $A_1B_1C_1$ prende il nome di **triangolo ortico**. In questo caso, oltre ai quadrilateri ciclici AC_1HB_1, BA_1HC_1 e CB_1HA_1, sono ciclici anche i quadrilateri ABA_1B_1, BCB_1C_1 e CAC_1A_1.
Il triangolo ortico di un triangolo ABC è interamente contenuto nel triangolo dato se e solo se quest'ultimo non è ottusangolo. Nel caso di triangolo rettangolo, il suo triangolo ortico si riduce all'altezza relativa all'ipotenusa.



Per ogni triangolo è possibile dimostrare il seguente teorema:
"L'ortocentro H di un triangolo ABC coincide con l'incentro del triangolo ortico $A_1B_1C_1$".
Essendo BA_1HC_1 ciclico, risulta $C_1\hat{A}_1H = C_1\hat{B}H = C_1\hat{B}B_1$. Essendo CB_1HA_1 ciclico, risulta $H\hat{A}_1B_1 = H\hat{C}B_1 = C_1\hat{C}B_1$. Infine essendo BCB_1C_1 ciclico, risulta $C_1\hat{B}B_1 = C_1\hat{C}B_1$. Pertanto $C_1\hat{A}_1H = H\hat{A}_1B_1$, quindi AA_1 è bisettrice dell'angolo $C_1\hat{A}_1B_1$. Analogamente si dimostra che BB_1 e CC_1 sono bisettrici degli angoli $A_1\hat{B}_1C_1$ e $B_1\hat{C}_1A_1$, da cui ne segue la tesi.

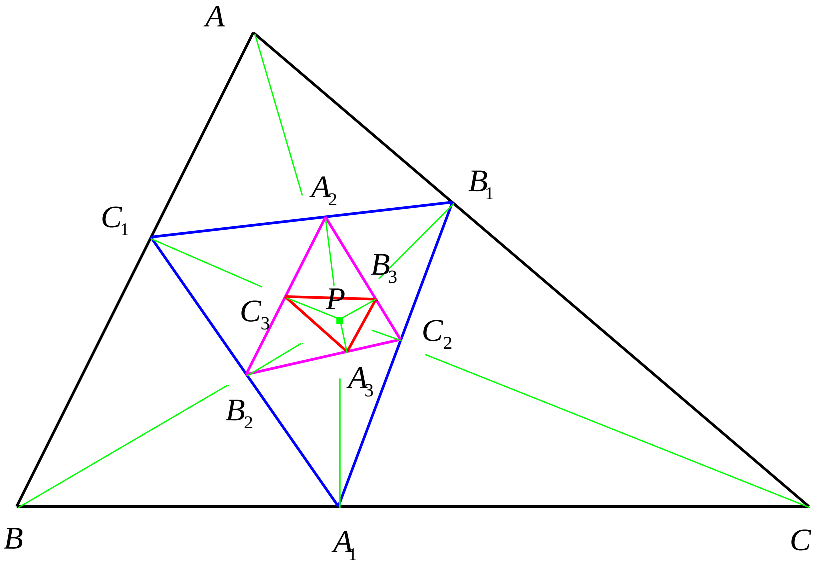
Consideriamo nuovamente il caso in cui P sia un generico punto, stavolta scelto necessariamente all'interno di ABC. Costruito il triangolo pedale $A_1B_1C_1$, è possibile utilizzare lo stesso punto P per costruire il triangolo pedale $A_2B_2C_2$ di $A_1B_1C_1$ (che chiameremo "secondo triangolo pedale") e così via. Risulta:
"*Il terzo triangolo pedale $A_3B_3C_3$ è simile al triangolo ABC di partenza*" [8].

---

7 Indicato con H l'ortocentro di ABC e con O l'ortocentro di $A_1B_1C_1$, risulta $AH = 2A_1O$ visto il rapporto di similitudine fra ABC e $A_1B_1C_1$. Inoltre $AG = 2A_1G$ e, poiché AH e OA_1 sono entrambi perpendicolari a BC, saranno paralleli fra loro. Ne discende che i triangoli AHG e OGA_1 sono simili per il secondo criterio di similitudine, pertanto i tre punti sono allineati e $HG = 2OG$. La retta passante per H, G e O prende il nome di Retta di Eulero. Sullo stesso argomento si può consultare la lezione di Geometria della Prof.ssa Prof.ssa Tedeschi presente sul sito http://www.dma.unifi.it/~mugelli/Incontri_Olimpici_2010/

8 La dimostrazione compare nella sesta edizione del libro di John Casey, *A Sequel to the First Six Books of the Elements of Euclid*, 1892. Nel 1940 il matematico B. M. Stewart ha dimostrato, più in generale, che l'n-simo poligono

Per la dimostrazione bisogna innanzi tutto osservare che il punto P appartiene alle circonferenze circoscritte ai triangoli AB_1C_1, $A_2B_1C_2$, $A_3B_3C_2$, $A_2B_2C_1$ e $A_3B_2C_3$. Ricordandosi che angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco sono uguali, risulta:



$B\hat{A}P = C_1\hat{A}P = C_1\hat{B}_1P = A_2\hat{B}_1P = A_2\hat{C}_2P = B_3\hat{C}_2P = B_3\hat{A}_3P$ così come

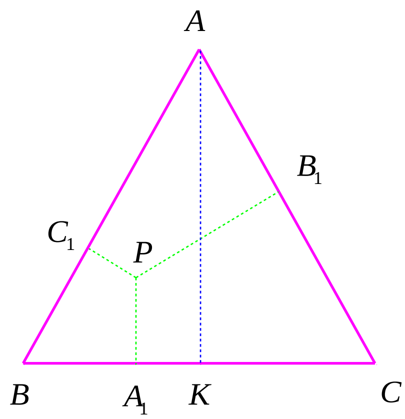
$P\hat{A}C = P\hat{A}B_1 = P\hat{C}_1B_1 = P\hat{C}_1A_2 = P\hat{B}_2A_2 = P\hat{B}_2C_3 = P\hat{A}_3C_3$.

Quindi $\hat{A} = B\hat{A}P + P\hat{A}C = B_3\hat{A}_3P + P\hat{A}_3C_3 = \hat{A}_3$ e in maniera analoga si dimostra che sono uguali le altre coppie di angoli, pertanto i triangoli ABC e $A_3B_3C_3$ sono simili per il 1° criterio di similitudine.

Una volta fissato il punto P, è anche possibile calcolare la somma delle distanze di tale punto dai piedi delle sue altezze. Ciò è particolarmente semplice nel caso di un triangolo equilatero; in particolare sussiste il seguente teorema (noto con il nome di **Teorema di Viviani** [9]):

"*Dato un punto P interno o sui lati di un triangolo equilatero, la somma delle distanze dai lati è uguale all'altezza del triangolo*".

Con riferimento alla figura a lato, si può osservare come l'area del triangolo ABC sia uguale alla somma delle aree dei triangoli PBC, PCA e PAB. Indicata con l la lunghezza dei lati del triangolo e con h l'altezza, risulta:

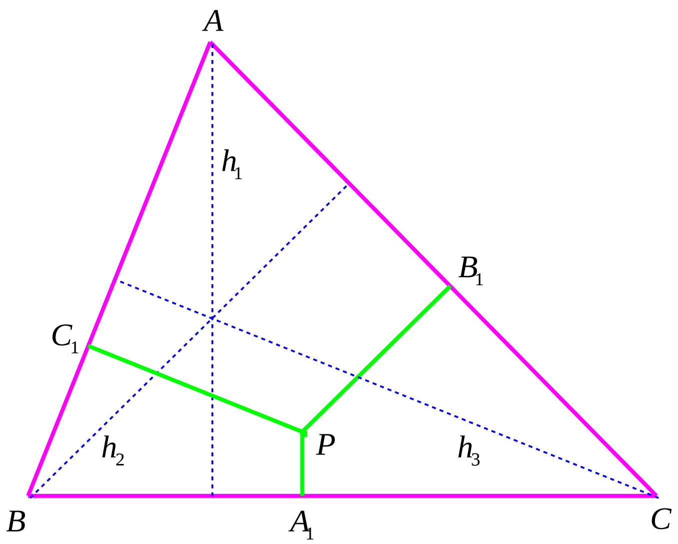


$$\frac{1}{2} l \cdot h = \frac{1}{2} l \cdot PA_1 + \frac{1}{2} l \cdot PB_1 + \frac{1}{2} l \cdot PC_1 = \frac{1}{2} l \cdot \left(PA_1 + PB_1 + PC_1 \right)$$

da cui $h = PA_1 + PB_1 + PC_1$.

pedale di un qualsiasi poligono di n lati è simile al poligono originario (cfr. *Am. Math. Monthly*, vol. 47, Aug.-Sept. 1940, pp. 462-466).

[9] Vincenzo Viviani (1622 - 1703). Fu matematico e astronomo, allievo di Torricelli e discepolo di G. Galieli.



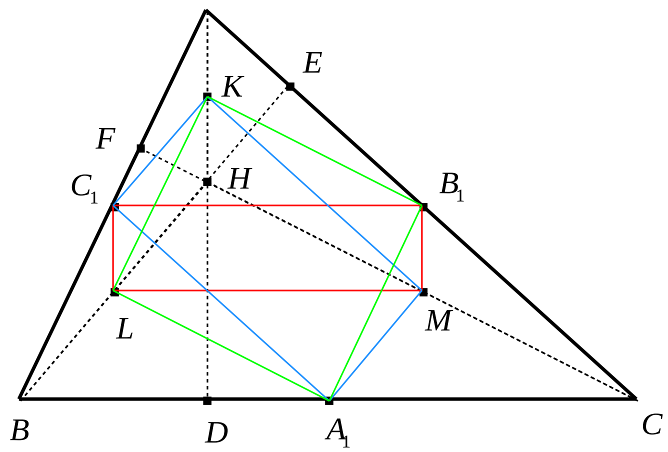
Il teorema di Viviani può essere generalizzato al caso di triangoli qualunque [10]. Preso un punto P interno o sui lati di un triangolo ABC, indicate con PA_1, PB_1 e PC_1 le distanze di P dai lati (o dai loro prolungamenti) del triangolo e con h_1, h_2 e h_3 le altezze del triangolo rispettivamente parallele a PA_1, PB_1 e PC_1, sussiste l'uguaglianza

$$\frac{PA_1}{h_1}+\frac{PB_1}{h_2}+\frac{PC_1}{h_3}=1\,.$$

Difatti in maniera analoga a quanto visto prima l'area S di ABC è pari alla somma delle aree di PBC, PCA e PAB, cioè $S=\frac{1}{2}BC\cdot PA_1+\frac{1}{2}AC\cdot PB_1+\frac{1}{2}AB\cdot PC_1$.

Dividendo primo e secondo membro per S si ottiene $1=\frac{BC\cdot PA_1}{2S}+\frac{AC\cdot PB_1}{2S}+\frac{AB\cdot PC_1}{2S}$ e quindi la tesi a meno di osservare che $\frac{BC}{2S}=\frac{1}{h_1}$, $\frac{AC}{2S}=\frac{1}{h_2}$ e $\frac{AB}{2S}=\frac{1}{h_3}$.

Sia dato un triangolo ABC. Indichiamo con A_1, B_1 e C_1 i punti medi dei lati del triangolo, con D, E e F i piedi delle altezze e con K, L e M i punti medi dei segmenti AH, BH e CH [11].



---

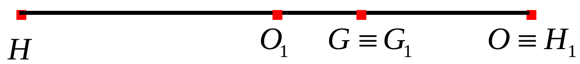
[10] Il teorema di Viviani può anche essere generalizzato al caso di poligoni regolari di n lati: dato un punto P interno o sui lati di un poligono regolare di n lati, indicata con a l'apotema del poligono e con $p_1, p_2, \ldots, p_n$ le distanze del punto P dai lati, allora risulta $p_1+p_2+\ldots+p_n=n\cdot a$.

[11] K, L e M, punti medi dei segmenti AH, BH e CH, prendono il nome di punti di Eulero e il triangolo KLM prende il nome di triangolo di Eulero. Un'interessante proprietà, che non dimostriamo (cfr. Thébault V. "Problem 4328" *Amer. Math. Monthly* 56, 39-40, 1949 e Thébault V.; Ramler O. J. and Goormaghtigh R. "Solution to Problem 4328: Euler Lines", *Amer. Math. Monthly* 58, 45, 1951), riguarda le rette di Eulero dei triangoli AFE, BDF e CED: esse concorrono in un punto che giace sulla circonferenza dei nove punti e ciascuna di esse passa per un punto di Eulero. Il triangolo di Eulero, inoltre, è uguale al triangolo mediale (cfr. Kimberling C. "Triangle Centers and Central Triangles", *Congr. Numer.* 129, 1-295, 1998).

Il segmento C_1B_1 è parallelo a BC in quanto unisce i punti medi dei lati AB e AC del triangolo ABC. Analogamente, con riferimento al triangolo HBC, anche LM è parallelo a BC, pertanto LM e C_1B_1 sono paralleli fra loro. Con lo stesso ragionamento sui triangoli BAH e CAH si osserva che segmenti C_1L e B_1M sono paralleli tra loro, pertanto B_1C_1LM è un parallelogramma. Inoltre la perpendicolarità fra BC e AH implica che B_1C_1LM è un rettangolo. Analogamente è possibile dimostrare che A_1B_1KL e C_1A_1MK sono rettangoli. Dal momento che fra loro hanno in comune due vertici opposti, a due a due hanno in comune anche una diagonale (ad es. B_1C_1LM e C_1A_1MK hanno in comune la diagonale C_1M); i segmenti A_1K, B_1L e C_1M possono pertanto essere visti come diametri di un'unica circonferenza passante per K, L, M, A_1, B_1 e C_1. Dalla perpendicolarità degli angoli $A_1\hat{D}K$, $M\hat{F}C_1$ e $L\hat{E}B_1$ discende che anche D, E e F passano per la stessa circonferenza, la quale prende il nome di **circonferenza dei nove punti**, conosciuta come **circonferenza di Eulero** o **circonferenza di Feuerbach** [12].

Appare chiaro come essa sia la circonferenza circoscritta al triangolo mediale $A_1B_1C_1$ e al triangolo ortico DEF. Il suo raggio è pari alla metà del raggio R della circonferenza circoscritta ad ABC.

Nel triangolo ABC risulta che $HG = 2GO$ (vedi nota 7); nel triangolo mediale $A_1B_1C_1$, indicati con H_1, G_1 e O_1 l'ortocentro, il baricentro e il circoncentro, per quanto detto in precedenza avremo $O \equiv H_1$ e $G \equiv G_1$; risulterà che $H_1G_1 = 2G_1O_1$ con O_1 centro della circonferenza circoscritta al triangolo mediale (quindi centro della circonferenza dei nove punti) nonché punto medio di OH.



Ci limitiamo infine ad enunciare, senza dimostrare, il **teorema di Feuerbach**:

"La circonferenza dei nove punti di un triangolo ABC è tangente alla circonferenza inscritta e alle tre circonferenze ex-inscritte ad ABC" [13].

---

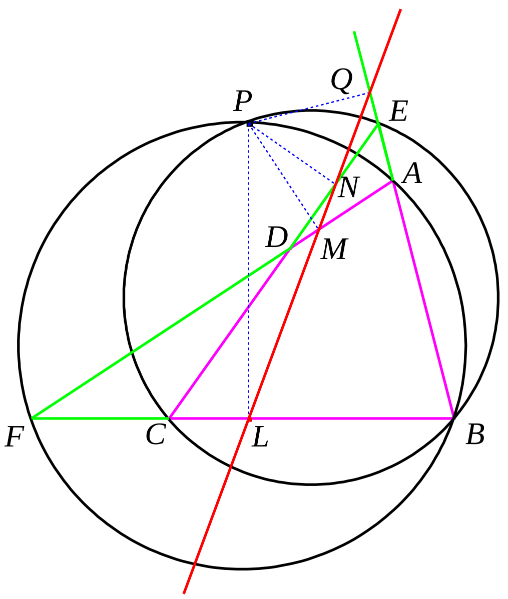
[12] A dispetto del nome dato alla circonferenza, la dimostrazione completa di questo teorema non è da attribuirsi ad Eulero ma a J.V. Poncelet, il quale la pubblicò nel 1821. Eulero, nel 1765, era comunque riuscito a provare che triangolo ortico e triangolo mediale hanno la stessa circonferenza circoscritta (cfr Coxeter H.S.M. and Greitzer S.L. "Geometry Revisited", *The Mathematical Association of America* 19, 1967).

[13] Per la dimostrazione del teorema: Coxeter H.S.M. and Greitzer S.L. "Geometry Revisited", *The Mathematical Association of America* 19, 1967.

Ricordiamo che una circonferenza si dice ex-inscritta quando è tangente ad un lato di un triangolo e al prolungamento degli altri due. I tre centri di tali circonferenze prendono il nome di excentri.

Esercizi

Problema 1: *Trovare un punto tale che i piedi delle quattro perpendicolari condotte da esso sui lati di un quadrilatero ABCD siano allineati.*



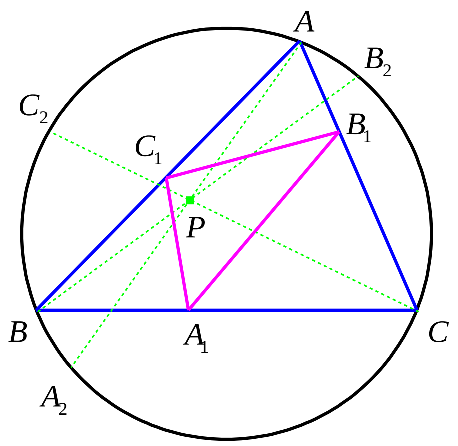
Si prolungano i lati opposti *AB* e *CD* fino ad incontrarsi in *E* e i lati *BC* e *AD* in *F*. I triangoli *ECB* e *FAB* contengono entrambi i lati *AB* e *BC*, oltre a contenere rispettivamente i lati *CD* e *AD* del quadrilatero *ABCD*. Le circonferenze circoscritte ai due triangoli si incontrano in *B* e in un punto *P*. Per il Teorema di Simson i piedi delle altezze *L*, *N*, *Q* sui lati del triangolo *EBC* sono allineati, così come sono allineati i piedi delle altezze *L*, *M* e *Q* sui lati del triangolo *FAB*. Le due rette, avendo due punti in comune, coincidono; pertanto *P* rappresenta il punto richiesto.

Problema 2: *E' dato un triangolo ABC e un suo punto interno P. Le retta AP, BP e CP intersecano la circonferenza circoscritta al triangolo rispettivamente nei punti A_2, B_2 e C_2. Dimostra che il triangolo pedale $A_1B_1C_1$ è simile a $A_2B_2C_2$.*

I quadrilateri A_1CB_1P e AC_1PB_1 sono banalmente ciclici, pertanto ne risulta $A_1\hat{B}_1P = A_1\hat{C}P = B\hat{C}P$ e $P\hat{B}_1C_1 = P\hat{A}B$, da cui ne consegue che

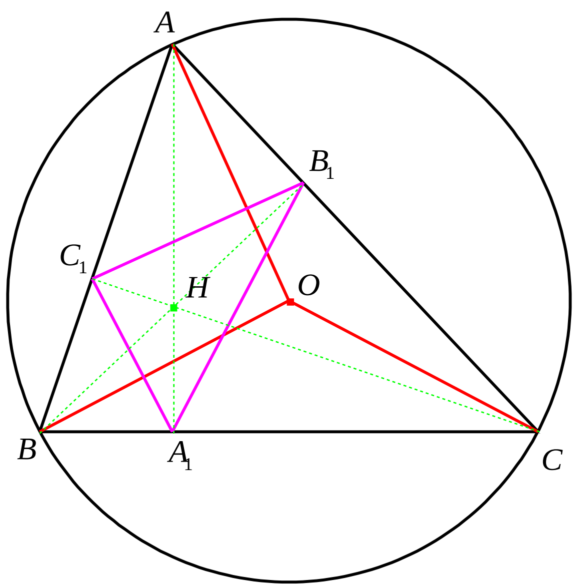
$$A_1\hat{B}_1C_1 = B\hat{C}P + P\hat{A}B = B\hat{B}_2C_2 + B\hat{B}_2A_2 = A_2\hat{B}_2C_2 .$$

Analogamente si dimostra l'uguaglianza delle altre coppie di angoli; i due triangoli sono simili per il primo criterio di similitudine fra triangoli.



Problema 3: *E' dato un triangolo ABC di area S. Indicato con p il semiperimetro del triangolo ortico $A_1B_1C_1$, dimostrare che $S = p \cdot R$* [14].

[14] E' anche possibile dimostrare che il triangolo ortico è, fra tutti i triangoli inscrivibili in un dato triangolo, quello con perimetro minimo (problema di Fagnano).



Dimostriamo dapprima che i tre raggi *OA*, *OB* e *OC* sono perpendicolari ai lati del triangolo ortico $A_1B_1C_1$. Infatti poiché $B\hat{O}C = 2\alpha$ (essendo angolo al centro che insiste sullo stesso arco di $B\hat{A}C = \alpha$) e poiché il triangolo *BOC* è isoscele sulla base *BC*, risulta che $O\hat{B}C = 90^\circ - \alpha$. Inoltre essendo AC_1A_1C ciclico, $C\hat{A}C_1 + C_1\hat{A}_1C = 180^\circ$, pertanto $C_1\hat{A}_1B = \alpha$. Ne consegue che A_1C_1 è perpendicolare a *OB*. Analogamente è possibile dimostrare la perpendicolarità dei raggi *OA* e *OC* rispettivamente con i segmenti B_1C_1 e A_1B_1.

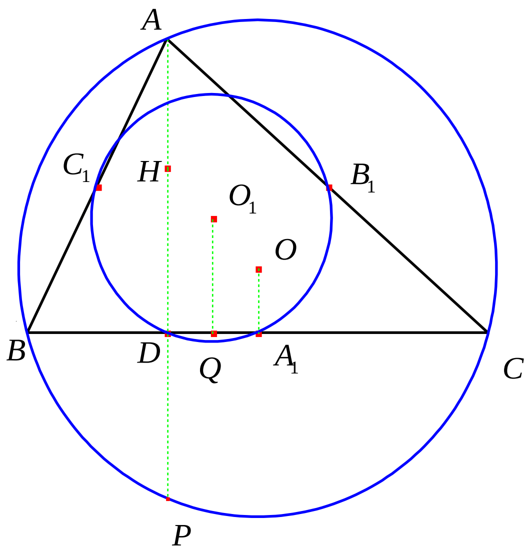
Il triangolo *ABC* può essere scomposto in tre quadrilateri (OB_1AC_1, OC_1BA_1 e OA_1CB_1), ciascuno con le diagonali perpendicolari. Pertanto le loro aree possono essere calcolate effettuando il semiprodotto delle diagonali. Risulta:

$$S = \frac{1}{2}B_1C_1 \cdot OA + \frac{1}{2}A_1C_1 \cdot OB + \frac{1}{2}A_1B_1 \cdot OC = \frac{1}{2}R \cdot \left(B_1C_1 + A_1C_1 + A_1B_1 \right) = \frac{1}{2}R \cdot 2p = R \cdot p$$

Problema 4*: Sia P l'intersezione dell'altezza relativa al lato BC con la circonferenza circoscritta ad un triangolo ABC. Dimostrare che la distanza del centro* O_1 *della circonferenza dei nove punti*

cerchio 9 punti

dal lato BC è pari a $\frac{1}{4} \cdot AP$.



Con riferimento alla figura, essendo *HD* e OA_1 paralleli fra loro, il quadrilatero HDA_1O è un trapezio con O_1 punto medio di *OH*. Pertanto, indicata con *Q* la sua proiezione su *BC*, risulta $O_1Q = \frac{1}{2}\left(A_1O + HD \right)$.

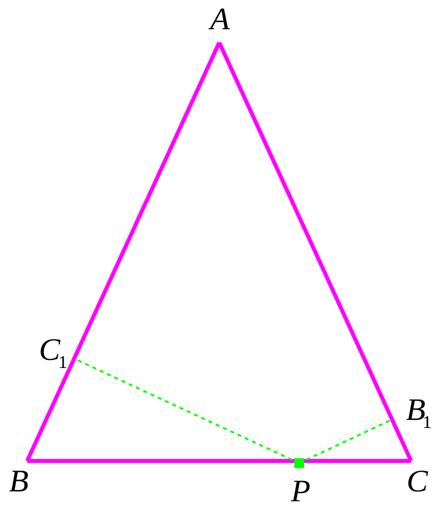
Ora $A_1O = \frac{1}{2}AH$ e $HD = \frac{1}{2}HP$ [15], pertanto

$$O_1Q = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}AH + \frac{1}{2}HP \right) = \frac{1}{4}\left(AH + HP \right) = \frac{1}{4}AP .$$

---

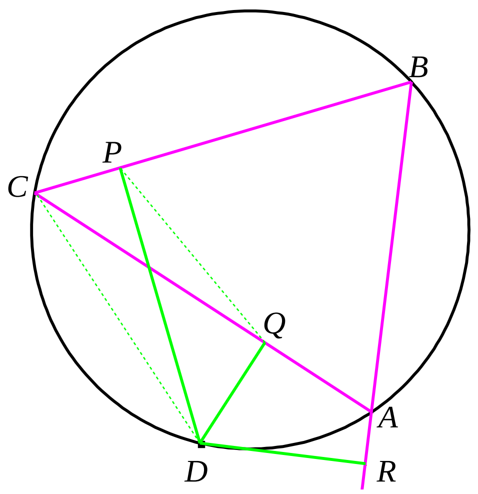
15 Per quest'ultima relazione si faccia riferimento alla lezione di Geometria del Prof. Barsanti presente sul sito http://www.dma.unifi.it/~mugelli/Incontri_Olimpici_2009/, problema n. 9.

Problema 5: *E' dato un triangolo isoscele ABC. Dimostrare che, preso un punto P sulla base BC, la somma delle sue distanze PB_1 e PC_1 dai lati obliqui è pari all'altezza h_2 relativa ai lati obliqui.*



Per il teorema di Viviani sappiamo che $\frac{PA_1}{h_1}+\frac{PB_1}{h_2}+\frac{PC_1}{h_3}=1$ ove PA_1 è la distanza del punto P dalla base BC, h_1 l'altezza relativa alla base BC e h_2, h_3 le altezze relative ai lati obliqui AC e BC. Dal momento che $PA_1=0$ e $h_2=h_3$, si ottiene che $\frac{PB_1}{h_2}+\frac{PC_1}{h_2}=1$, quindi $PB_1+PC_1=h_2$.

Problema 6 (IMO 2003 n. 4): *Sia ABCD un quadrilatero ciclico. Siano P, Q e R i piedi delle perpendicolari condotte da D rispettivamente sui lati BC, CA e AB. Dimostrare che $PQ=QR$ se e solo se le bisettrici di $A\hat{B}C$ e $A\hat{D}C$ si incontrano su AC.*



Per il teorema di Simson, i punti P, Q e R sono allineati. Dal momento che $D\hat{P}C=D\hat{Q}C=90°$, il quadrilatero $DQPC$ è ciclico e pertanto $D\hat{C}A=D\hat{P}Q=D\hat{P}R$; anche il quadrilatero $DQRA$ è ciclico e quindi $D\hat{A}C=D\hat{R}P$. Ne consegue che i triangoli DCA e DPR sono simili. Analogamente si dimostra che sono simili i triangoli DAB e DQP così come DBC e DRQ. Pertanto risulta: $\frac{DA}{DC}=\frac{DR}{DP}=\frac{DB\cdot\frac{QR}{BC}}{DB\cdot\frac{PQ}{BA}}=\frac{QR}{PQ}\cdot\frac{BA}{BC}$. Ne consegue che $PQ=QR$ se e soltanto se $\frac{DA}{DC}=\frac{BA}{BC}$ ove quest'ultima relazione è del tutto equivalente a chiedere che le bisettrici di $A\hat{B}C$ e $A\hat{D}C$ si incontrino su AC a meno di ricordare il teorema della bisettrice.
