TRIANGOLI, CIRONFERENZE E PUNTI NOTEVOLI

Mazza Lorenzo

Liceo Scientifico Pio XII – Roma
lorenzomazza@gmail.com

Incontri Olimpici
Cetraro, 9-12 ottobre 2011

L'universo non potrà essere letto finché non avremo imparato il linguaggio ed avremo familiarizzato con i caratteri con cui è scritto. E' scritto in linguaggio matematico, e le lettere sono triangoli, cerchi ed altre figure geometriche, senza le quali è umanamente impossibile comprendere una singola parola.

Galileo Galilei

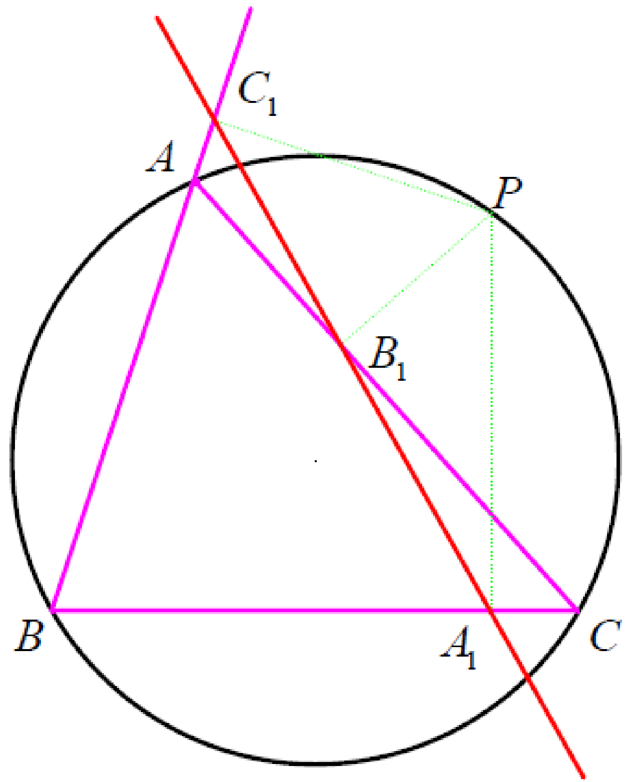
- con ABC si indica un triangolo di vertici A, B e C;
- le lunghezze dei lati sono a (lunghezza di BC), b (lunghezza di AC) e c (lunghezza di AB);
- il circocentro è O, l'ortocentro è H e il baricentro è G;
- il raggio della circonferenza circoscritta è R.

Teorema di Simson

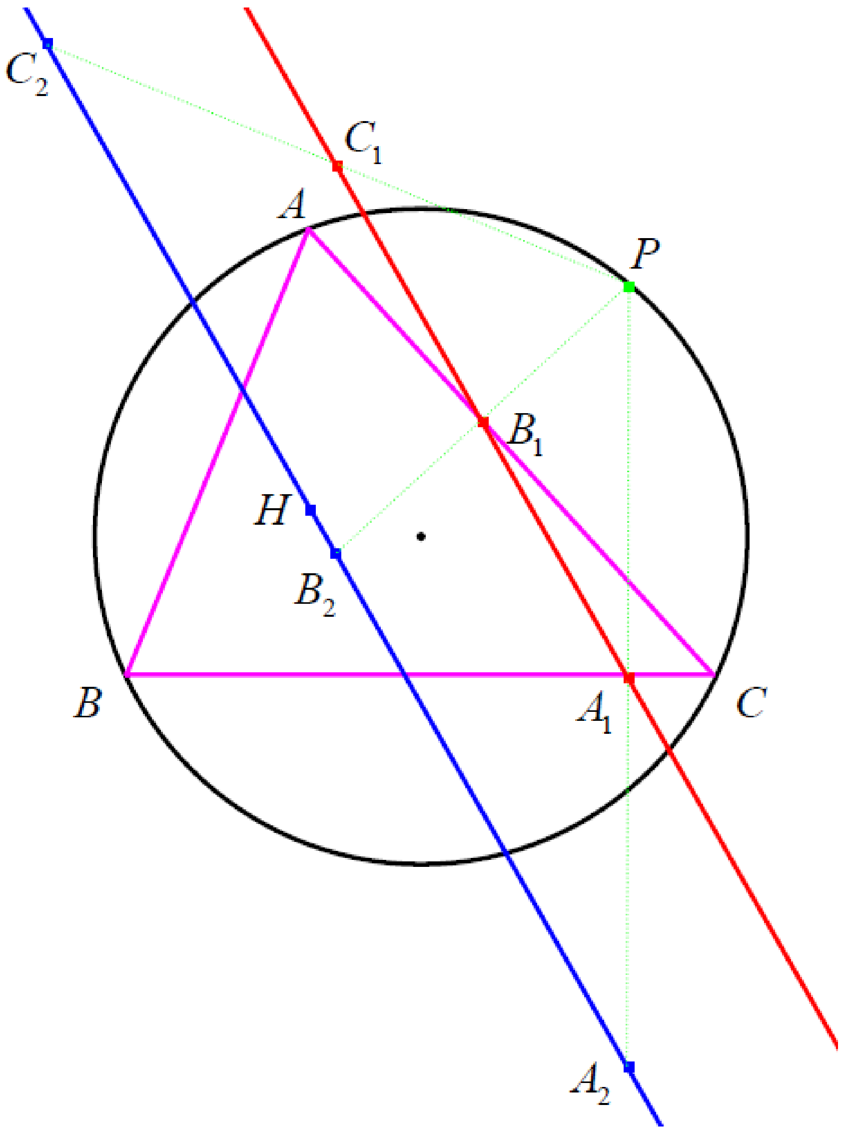
Ricordando Cetraro 2010…

Teorema di Simson: *le proiezioni di un punto P sui lati di un triangolo ABC sono allineate se e solo se P appartiene alla circonferenza circoscritta ad ABC.*

La retta sulla quale giacciono le proiezioni del punto P prende il nome di **retta di Simson** o retta pedale.



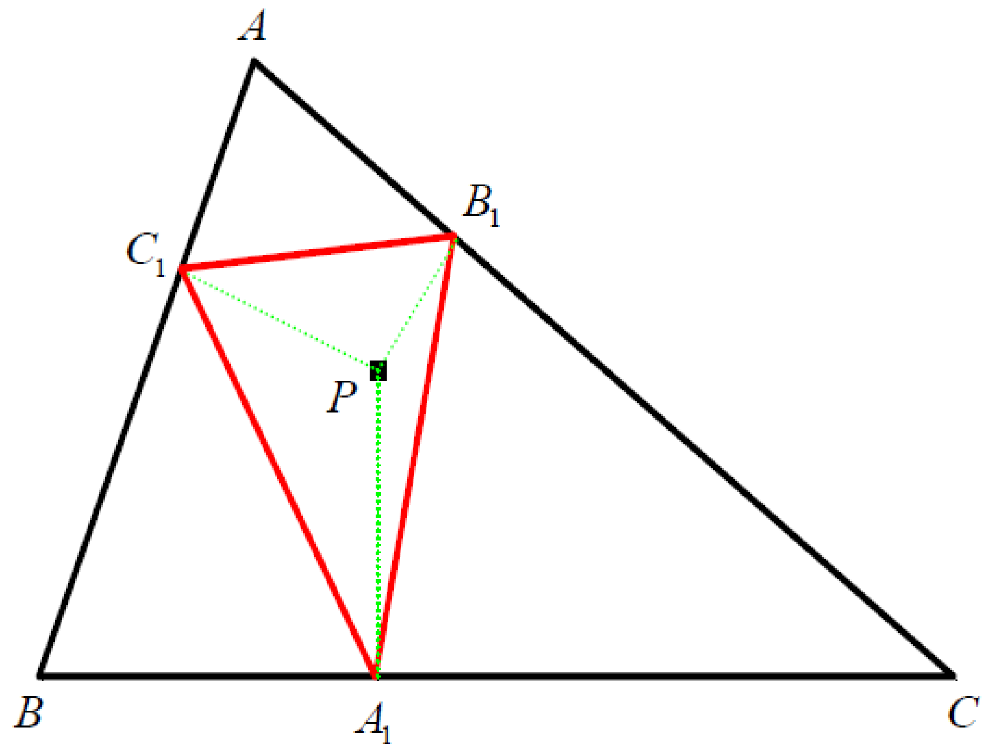
Teorema di Simson



Dal momento che i piedi delle altezze A_1, B_1 e C_1 sono allineati, sono allineati anche i simmetrici A_2, B_2 e C_2 del punto P rispetto ai tre lati del triangolo. Basta infatti applicare un'omotetia di centro P e rapporto 2 la quale manda A_1 in A_2, B_1 in B_2 e C_1 in C_2 e ricordare che ogni omotetia è una collineazione. Inoltre, dal momento che le omotetie mandano rette in rette parallele, la retta passante per A_2, B_2 e C_2 è parallela alla retta di Simson.

Triangolo pedale

Se il punto P non dovesse appartenere alla circonferenza circoscritta al triangolo ABC, i piedi delle altezze A_1, B_1 e C_1 condotti da P sui lati di ABC non saranno più allineati. Il triangolo $A_1B_1C_1$ prende il nome di **triangolo pedale** e il punto P sarà il "punto pedale di ABC".

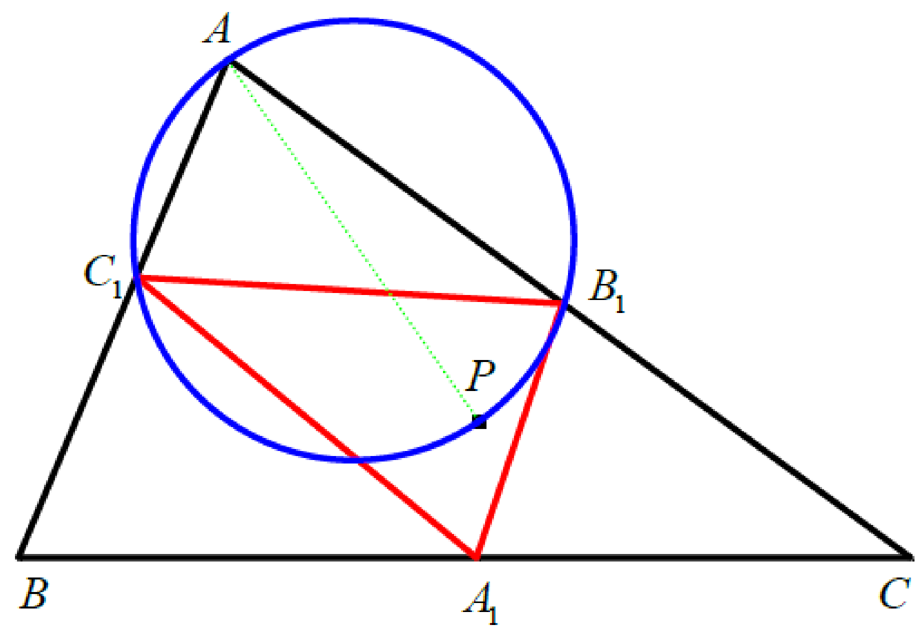


Triangolo pedale

Il quadrilatero AC_1PB_1 è ciclico in quanto $A\hat{B}_1P = A\hat{C}_1P = 90^\circ$ e AP è un diametro. Applicando il teorema della corda ad AB_1C_1 si ha

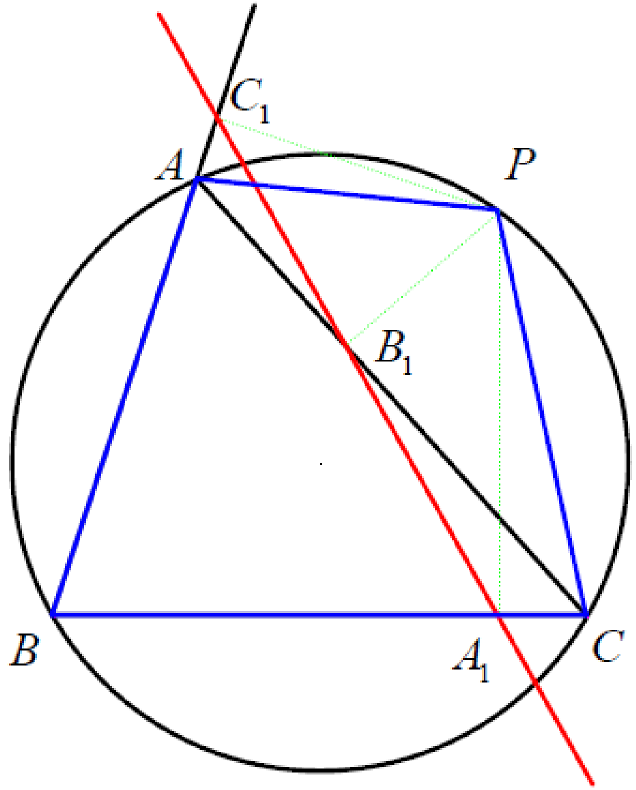
$\dfrac{B_1C_1}{sen\alpha} = AP$ (ove $B\hat{A}C = \alpha$).

Analogamente risulta $\dfrac{BC}{sen\alpha} = 2R$.

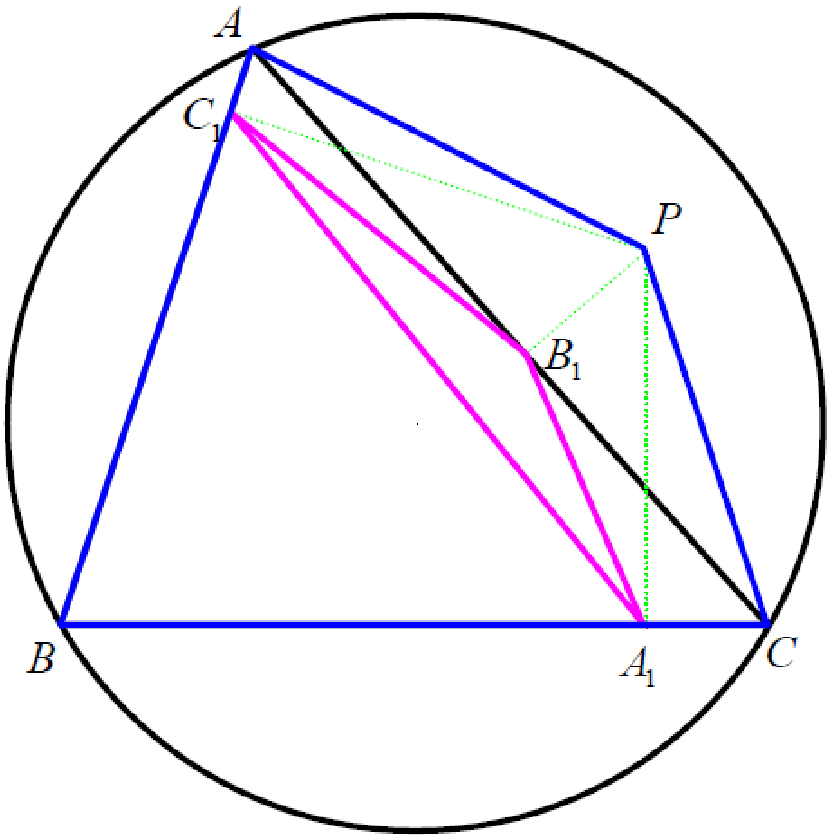


Dividendo membro a membro si ottiene $\dfrac{B_1C_1}{BC} = \dfrac{AP}{2R}$. Procedendo con lo stesso ragionamento per gli altri lati del triangolo pedale, si giunge a scrivere le seguenti relazioni: $B_1C_1 = \dfrac{a \cdot AP}{2R}$; $\quad A_1C_1 = \dfrac{b \cdot BP}{2R}$; $\quad A_1B_1 = \dfrac{c \cdot CP}{2R}$.

Se P appartiene alla circonferenza circoscritta ad ABC (e quindi il quadrilatero $ABCP$ è ciclico) i punti A_1, B_1 e C_1 sono allineati; supponendo che B_1 sia compreso fra A_1 e C_1, risulta verificata la relazione $A_1C_1 = A_1B_1 + B_1C_1$; moltiplicando entrambi i membri per $2R$ si ottiene $b \cdot BP = c \cdot CP + a \cdot AP$ cioè $AC \cdot BP = AB \cdot CP + BC \cdot AP$ (**Teorema di Tolomeo** per quadrilateri ciclici).



Teorema di Tolomeo



Nel caso in cui P non appartenga alla circonferenza circoscritta ad ABC (e quindi il quadrilatero $ABCP$ non è ciclico), dal momento che $A_1C_1 < A_1B_1 + B_1C_1$, risulta che $b \cdot BP < c \cdot CP + a \cdot AP$, cioè

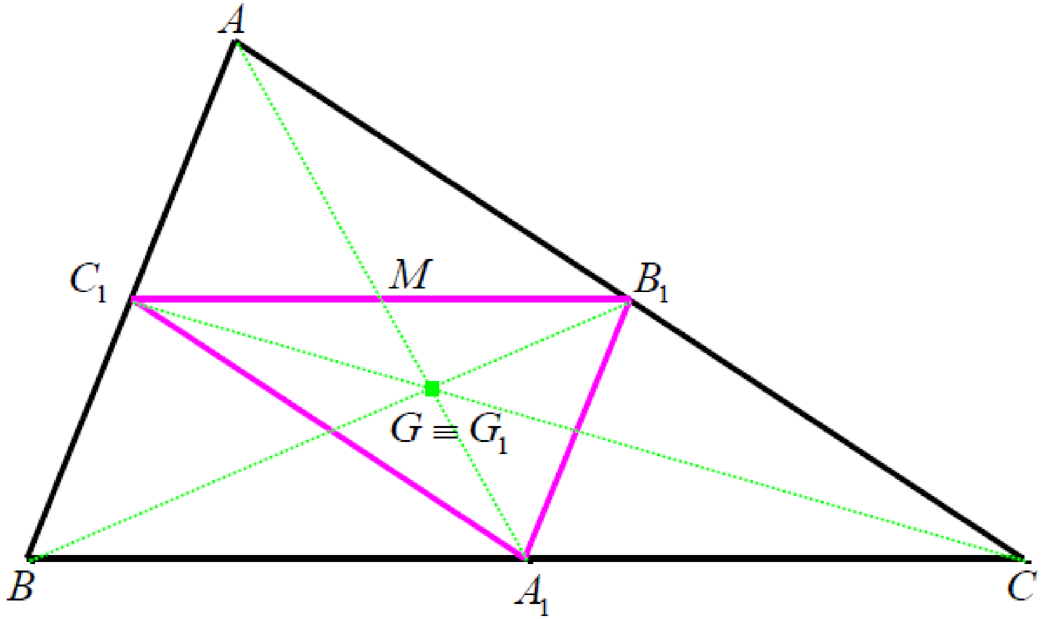
$$AC \cdot BP < AB \cdot CP + BC \cdot AP$$

(**Teorema di Tolomeo** per quadrilateri non ciclici).

Triangolo mediale

Se $P \equiv O$, allora $AP = BP = CP = R$, pertanto risulta $\dfrac{B_1C_1}{BC} = \dfrac{AO}{2R} = \dfrac{R}{2R} = \dfrac{1}{2}$.

Il triangolo $A_1B_1C_1$ prende il nome di **triangolo mediale** in quanto A_1, B_1 e C_1 sono i punti medi dei lati di ABC.

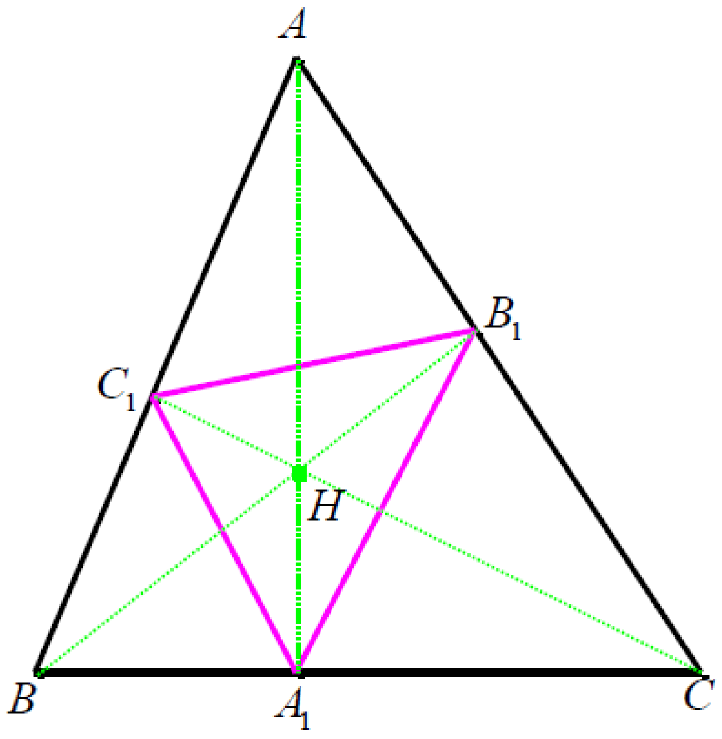


- Il triangolo mediale $A_1B_1C_1$ è simile al triangolo ABC in un rapporto di 1 a 2.
- I triangoli AC_1B_1, BA_1C_1, CB_1A_1 e $A_1B_1C_1$ sono uguali fra loro.
- ABC e $A_1B_1C_1$ hanno lo stesso baricentro.
- Il circocentro di ABC coincide con l'ortocentro di $A_1B_1C_1$.

Triangolo ortico

Se $P \equiv H$, il triangolo $A_1B_1C_1$ prende il nome di **triangolo ortico**. In questo caso, oltre ai quadrilateri ciclici AC_1HB_1, BA_1HC_1 e CB_1HA_1, sono ciclici anche i quadrilateri ABA_1B_1, BCB_1C_1 e CAC_1A_1.

Il triangolo ortico di un triangolo ABC è interamente contenuto nel triangolo dato se e solo se quest'ultimo non è ottusangolo. Nel caso di triangolo rettangolo, il suo triangolo ortico si riduce all'altezza relativa all'ipotenusa.



Triangolo ortico

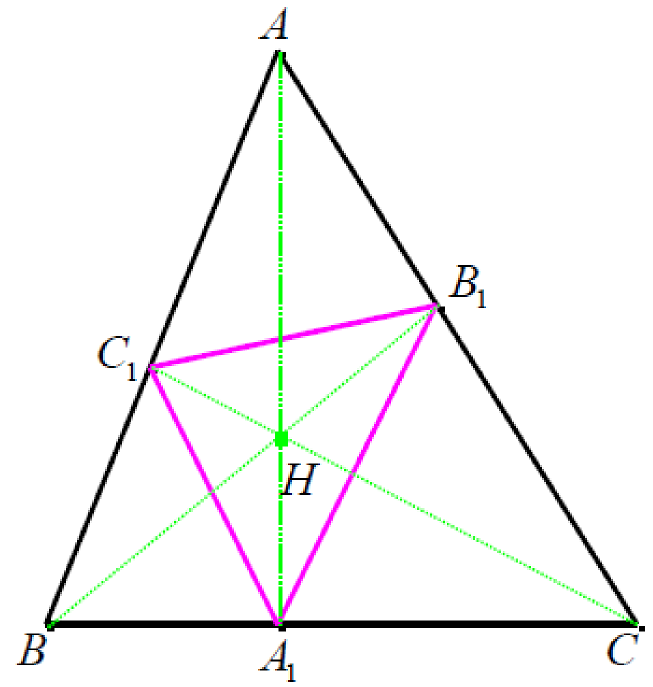
"L'ortocentro H di un triangolo ABC coincide con l'incentro del triangolo ortico $A_1B_1C_1$".

BA_1HC_1 ciclico, da cui $C_1\hat{A}_1H = C_1\hat{B}H = C_1\hat{B}B_1$.

CB_1HA_1 ciclico, da cui $H\hat{A}_1B_1 = H\hat{C}B_1 = C_1\hat{C}B_1$.

BCB_1C_1 ciclico, da cui $C_1\hat{B}B_1 = C_1\hat{C}B_1$.

Pertanto $C_1\hat{A}_1H = H\hat{A}_1B_1$, quindi AA_1 è bisettrice dell'angolo $C_1\hat{A}_1B_1$. Analogamente si dimostra che BB_1 e CC_1 sono bisettrici degli angoli $A_1\hat{B}_1C_1$ e $B_1\hat{C}_1A_1$.



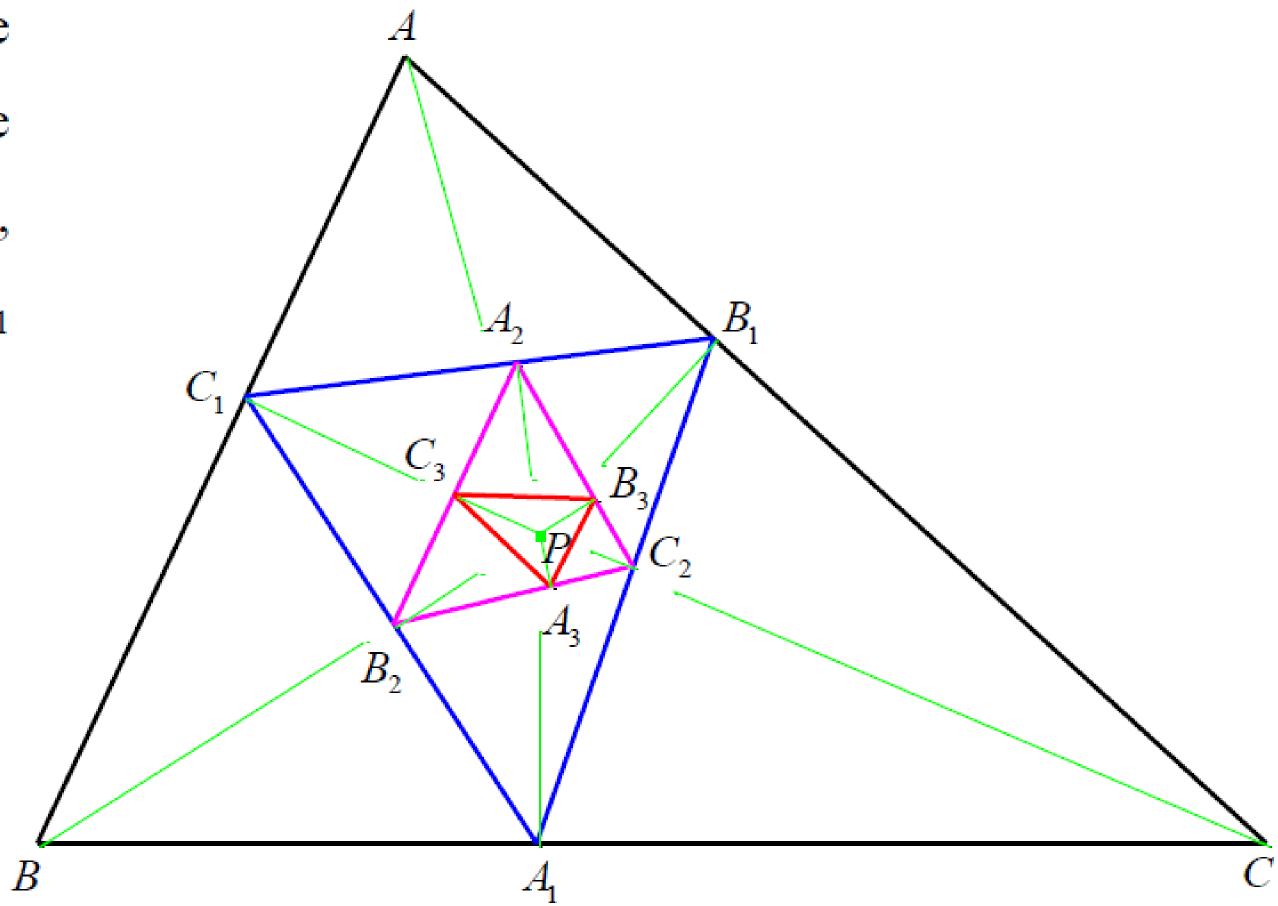
Triangolo pedale

Sia P un generico punto interno ad ABC. Costruito il triangolo pedale $A_1B_1C_1$, è possibile utilizzare lo stesso punto P per costruire il triangolo pedale $A_2B_2C_2$ di $A_1B_1C_1$ (che chiameremo "secondo triangolo pedale") e così via. Risulta:

"*Il terzo triangolo pedale $A_3B_3C_3$ è simile al triangolo ABC di partenza*".

Triangolo pedale

P appartiene alle circonferenze circoscritte ai triangoli AB_1C_1, $A_2B_1C_2$, $A_3B_3C_2$, $A_2B_2C_1$ e $A_3B_2C_3$.

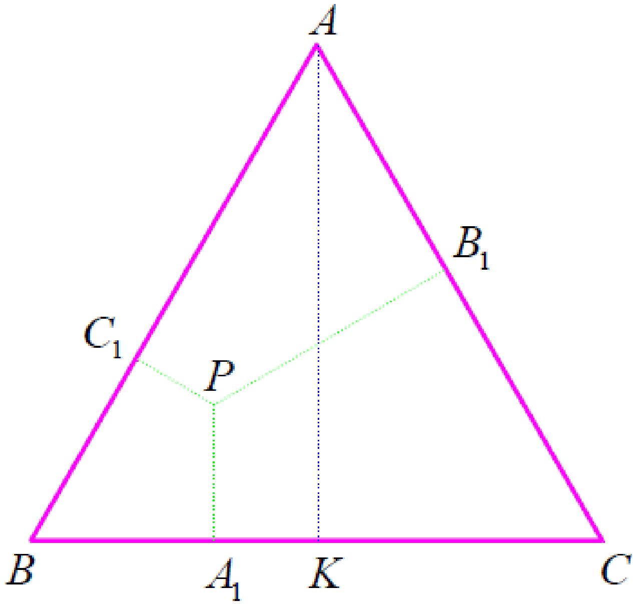


$B\hat{A}P = C_1\hat{B}_1P = A_2\hat{C}_2P = B_3\hat{A}_3P$ e $P\hat{A}C = P\hat{C}_1B_1 = P\hat{B}_2A_2 = P\hat{A}_3C_3$ pertanto risulta che $\hat{A} = B\hat{A}P + P\hat{A}C = B_3\hat{A}_3P + P\hat{A}_3C_3 = \hat{A}_3$. Discorso analogo per $\hat{B}$ e $\hat{C}$.

Teorema di Viviani

"Dato un punto P interno o sui lati di un triangolo equilatero, la somma delle distanze dai lati è uguale all'altezza del triangolo".

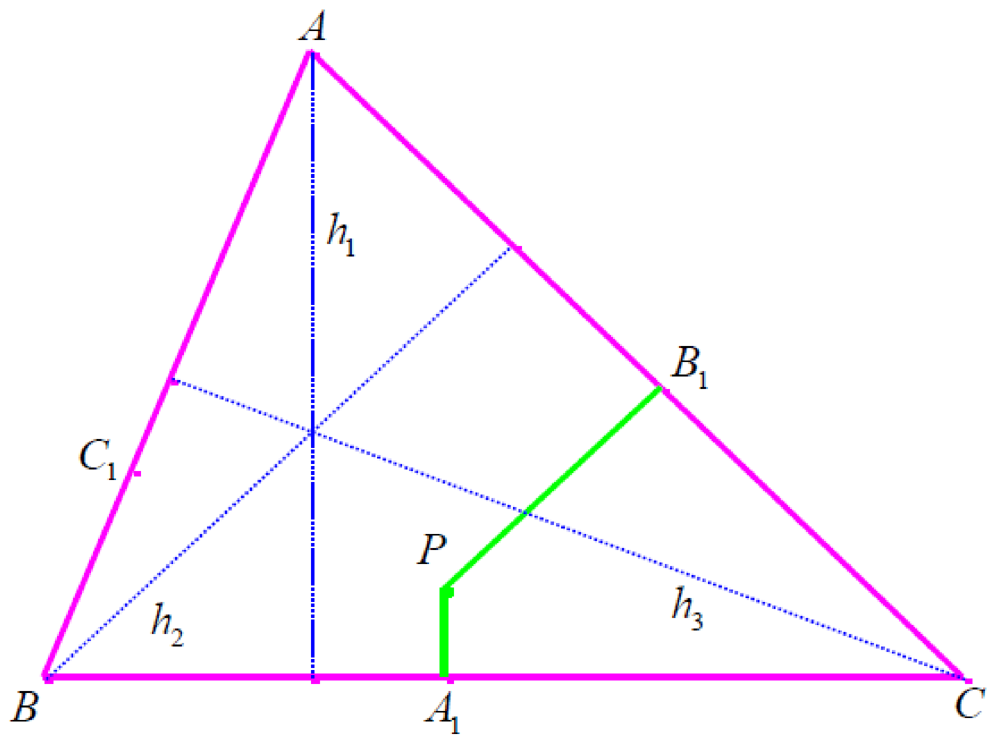
Con riferimento alla figura a lato, si può osservare come l'area del triangolo ABC sia uguale alla somma delle aree dei triangoli PBC, PCA e PAB. Indicata con l la lunghezza dei lati del triangolo e con h l'altezza, risulta:



$$\frac{1}{2}l\cdot h=\frac{1}{2}l\cdot PA_1+\frac{1}{2}l\cdot PB_1+\frac{1}{2}l\cdot PC_1=$$

$$=\frac{1}{2}l\cdot\left(PA_1+PB_1+PC_1\right)\text{ da cui } h=PA_1+PB_1+PC_1\,.$$

Teorema di Viviani



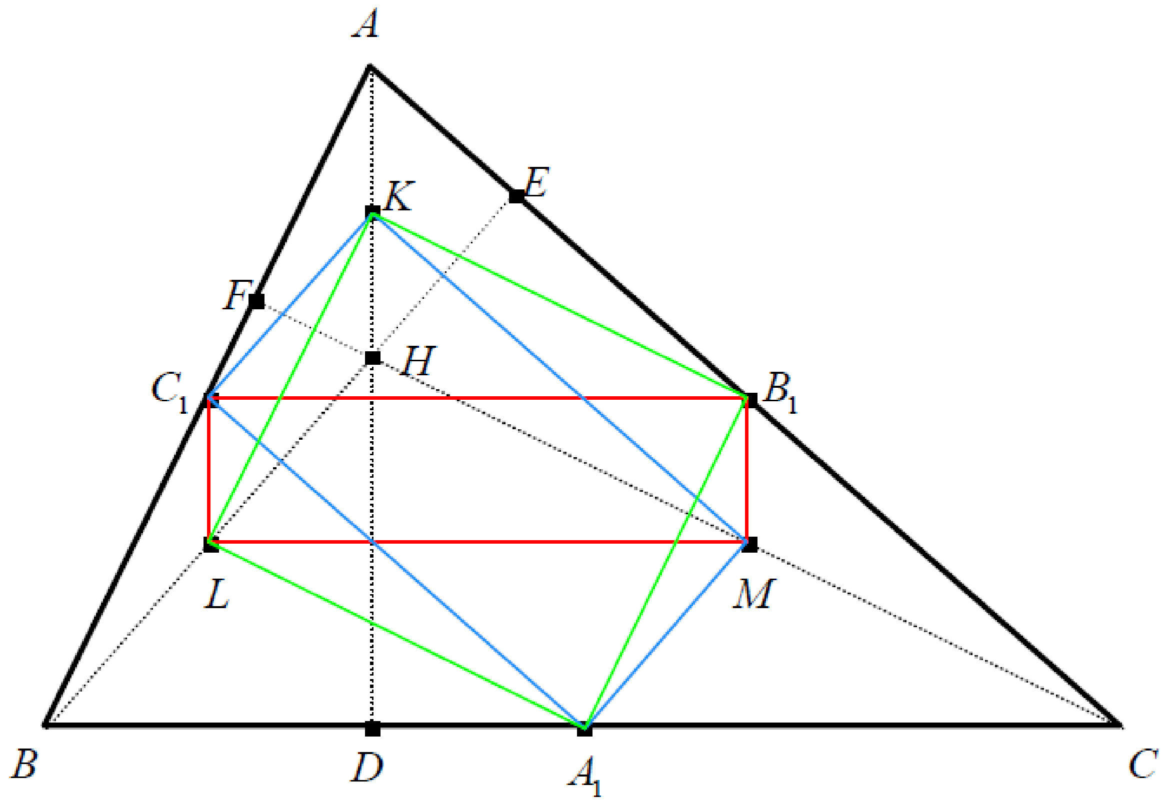
Generalizziamo: preso un punto P interno o sui lati di un triangolo ABC, indicate con h_1, h_2 e h_3 le altezze del triangolo rispettivamente parallele a PA_1, PB_1 e PC_1, sussiste l'uguaglianza $\frac{PA_1}{h_1}+\frac{PB_1}{h_2}+\frac{PC_1}{h_3}=1$. Infatti:

$S=\frac{1}{2}BC\cdot PA_1+\frac{1}{2}AC\cdot PB_1+\frac{1}{2}AB\cdot PC_1$, da cui $1=\frac{BC\cdot PA_1}{2S}+\frac{AC\cdot PB_1}{2S}+\frac{AB\cdot PC_1}{2S}$

e quindi la tesi a meno di osservare che $\frac{BC}{2S}=\frac{1}{h_1}$, $\frac{AC}{2S}=\frac{1}{h_2}$ e $\frac{AB}{2S}=\frac{1}{h_3}$.

Circonferenza dei nove punti

Sia dato un triangolo ABC. Indichiamo con A_1, B_1 e C_1 i punti medi dei lati del triangolo, con D, E e F i piedi delle altezze e con K, L e M i punti medi dei segmenti AH, BH e CH.



Circonferenza dei nove punti

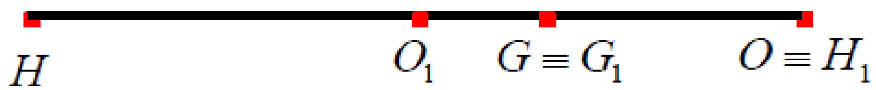
In ABC risulta che C_1B_1 è parallelo a BC e in HBC risulta che LM è parallelo a BC, pertanto LM e C_1B_1 sono paralleli fra loro. Con lo stesso ragionamento sui triangoli BAH e CAH si osserva che segmenti C_1L e B_1M sono paralleli tra loro, pertanto B_1C_1LM è un parallelogramma. Inoltre la perpendicolarità fra BC e AH implica che B_1C_1LM è un rettangolo. Analogamente si dimostra che A_1B_1KL e C_1A_1MK sono rettangoli.

I segmenti A_1K, B_1L e C_1M possono pertanto essere visti come diametri di un'unica circonferenza passante per K, L, M, A_1, B_1 e C_1. Dalla perpendicolarità degli angoli $A_1\hat{D}K$, $M\hat{F}C_1$ e $L\hat{E}B_1$ discende che anche D, E e F passano per la stessa circonferenza, la quale prende il nome di **circonferenza dei nove punti** (o **circonferenza di Eulero** o **circonferenza di Feuerbach**).

Circonferenza dei nove punti

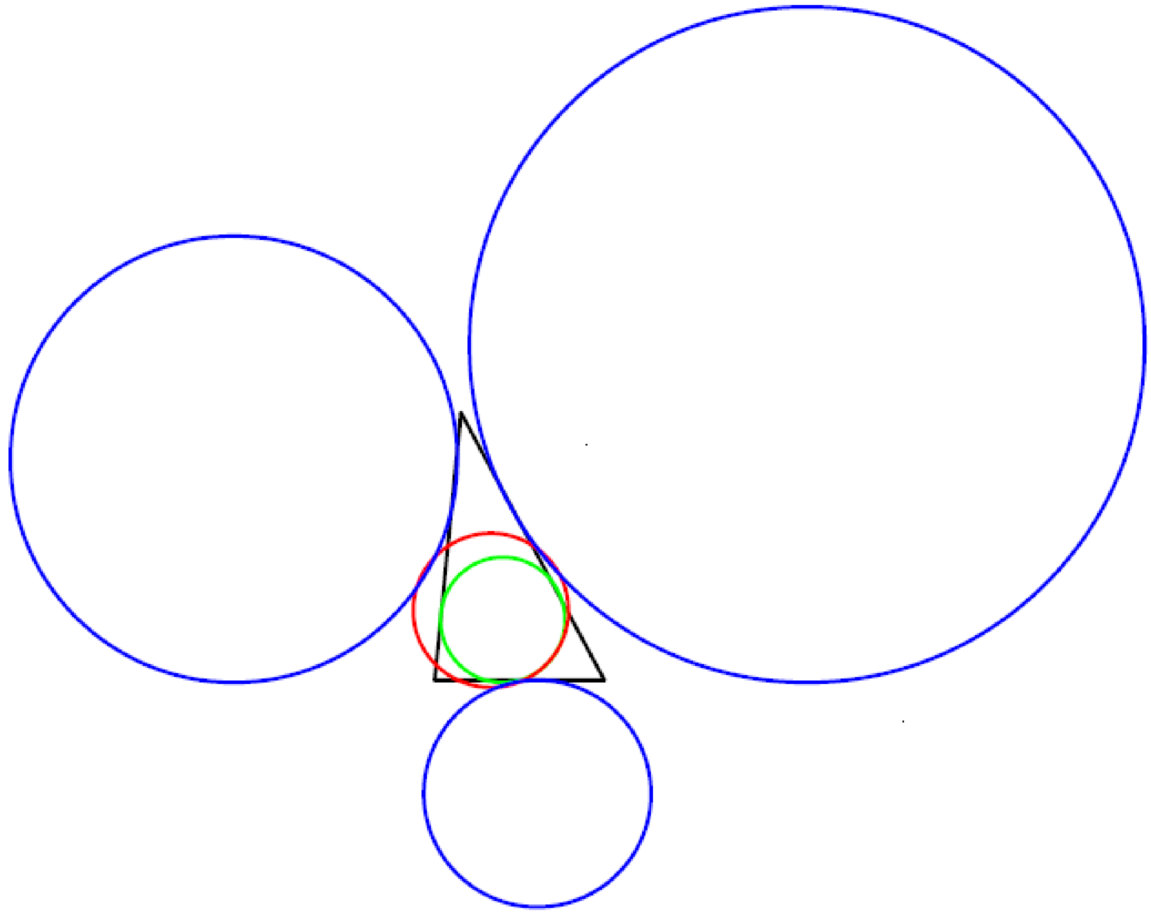
Appare chiaro come essa sia la circonferenza circoscritta al triangolo mediale $A_1B_1C_1$ e al triangolo ortico DEF. Il suo raggio è pari alla metà del raggio R della circonferenza circoscritta ad ABC.

Nel triangolo ABC risulta che $HG = 2GO$; nel triangolo mediale $A_1B_1C_1$, indicati con H_1, G_1 e O_1 l'ortocentro, il baricentro e il circoncentro, per quanto detto in precedenza avremo $O \equiv H_1$ e $G \equiv G_1$; risulterà che $H_1G_1 = 2G_1O_1$ con O_1 centro della circonferenza circoscritta al triangolo mediale (quindi centro della circonferenza dei nove punti) nonché punto medio di OH.

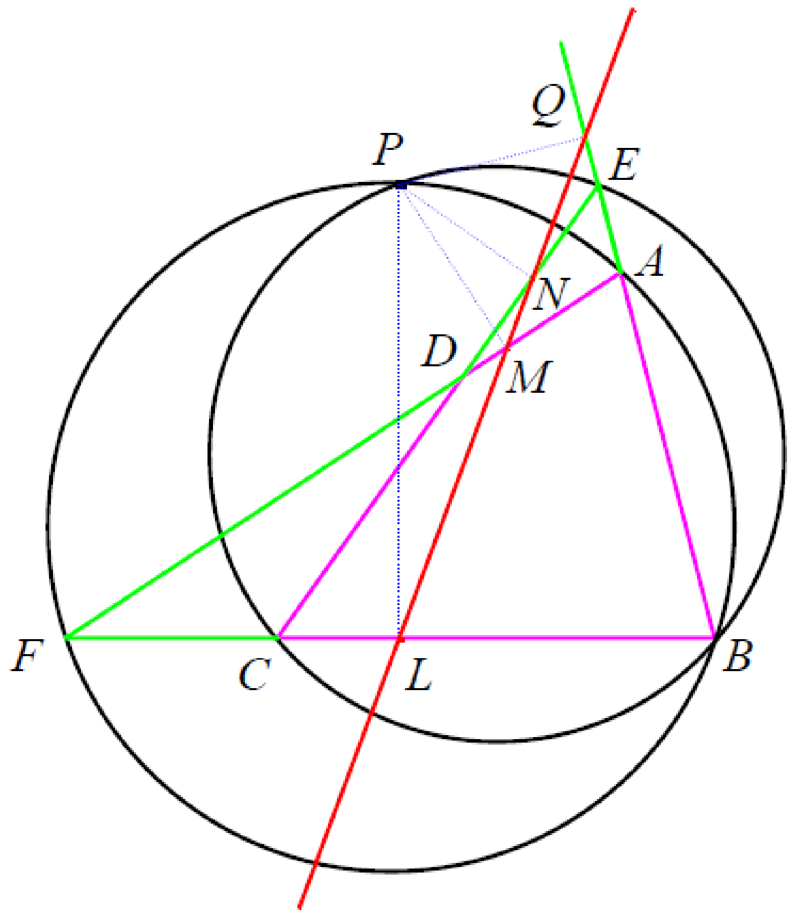


Teorema di Feuerbach

"La circonferenza dei nove punti di un triangolo ABC è tangente alla circonferenza inscritta e alle tre circonferenze ex-inscritte ad ABC".



Problema 1: *Trovare un punto tale che i piedi delle quattro perpendicolari condotte da esso sui lati di un quadrilatero ABCD siano allineati.*

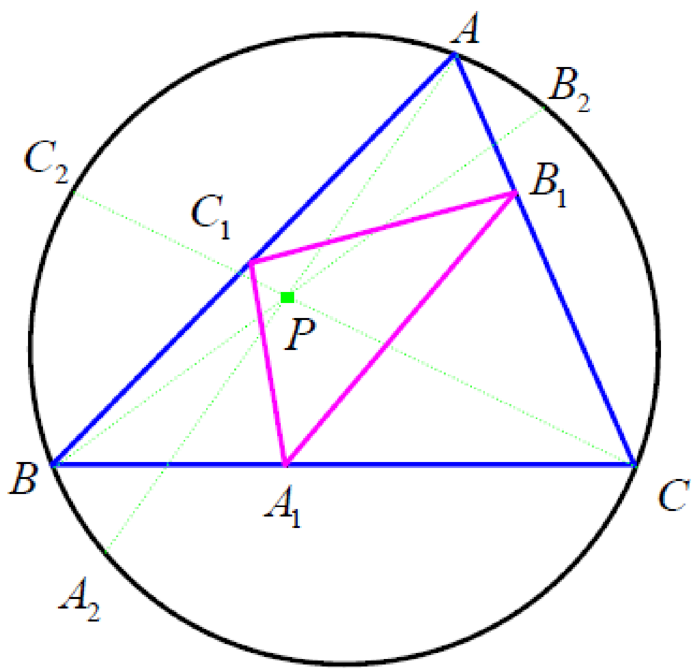


Esercizi

Soluzione problema 1: Si prolungano i lati opposti AB e CD fino ad incontrarsi in E e i lati BC e AD in F. I triangoli ECB e FAB contengono entrambi i lati AB e BC, oltre a contenere rispettivamente i lati CD e AD del quadrilatero $ABCD$. Le circonferenze circoscritte ai due triangoli si incontrano in B e in un punto P. Per il Teorema di Simson i piedi delle altezze L, N, Q sui lati del triangolo EBC sono allineati, così come sono allineati i piedi delle altezze L, M e Q sui lati del triangolo FAB. Le due rette, avendo due punti in comune, coincidono; pertanto P rappresenta il punto richiesto.

Esercizi

Problema 2: *E' dato un triangolo ABC e un suo punto interno P. Le retta AP, BP e CP intersecano la circonferenza circoscritta al triangolo rispettivamente nei punti A_2, B_2 e C_2. Dimostra che il triangolo pedale $A_1B_1C_1$ è simile a $A_2B_2C_2$.*



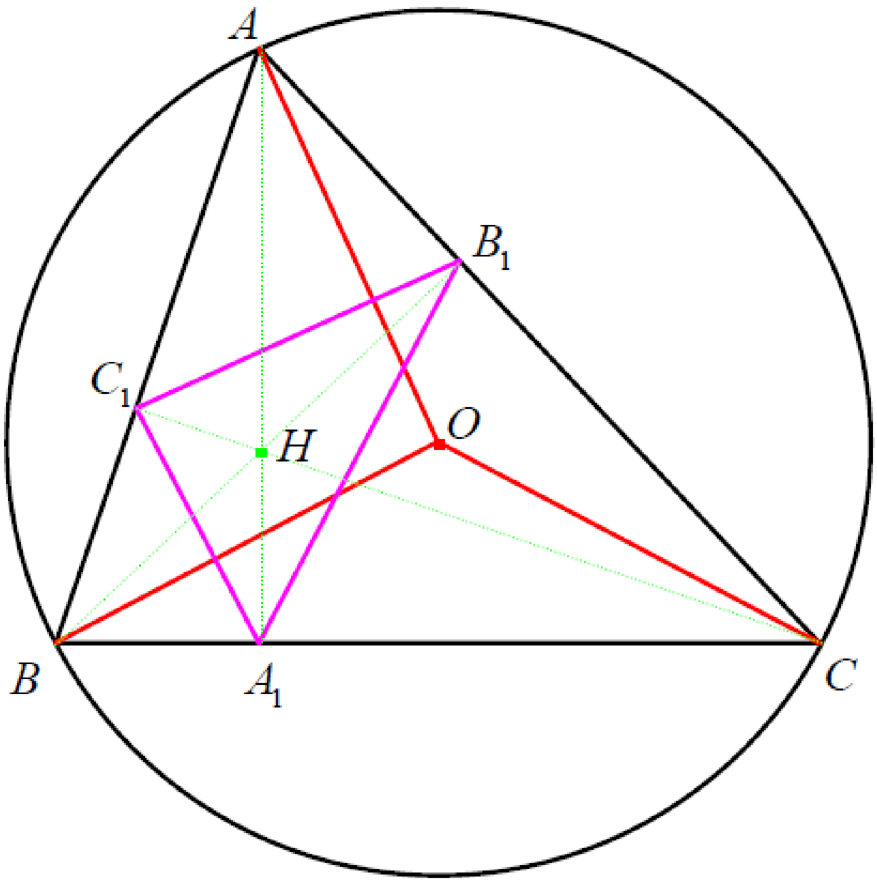
Esercizi

Soluzione problema 2: I quadrilateri A_1CB_1P e AC_1PB_1 sono banalmente ciclici, pertanto ne risulta $A_1\hat{B}_1P = A_1\hat{C}P = B\hat{C}P$ e $P\hat{B}_1C_1 = P\hat{A}B$, da cui ne consegue che

$$A_1\hat{B}_1C_1 = B\hat{C}P + P\hat{A}B = B\hat{B}_2C_2 + B\hat{B}_2A_2 = A_2\hat{B}_2C_2 .$$

Analogamente si dimostra l'uguaglianza delle altre coppie di angoli; i due triangoli sono simili per il primo criterio di similitudine fra triangoli.

Problema 3: *E' dato un triangolo ABC di area S. Indicato con p il semiperimetro del triangolo ortico* $A_1B_1C_1$, *dimostrare che* $S = p \cdot R$.

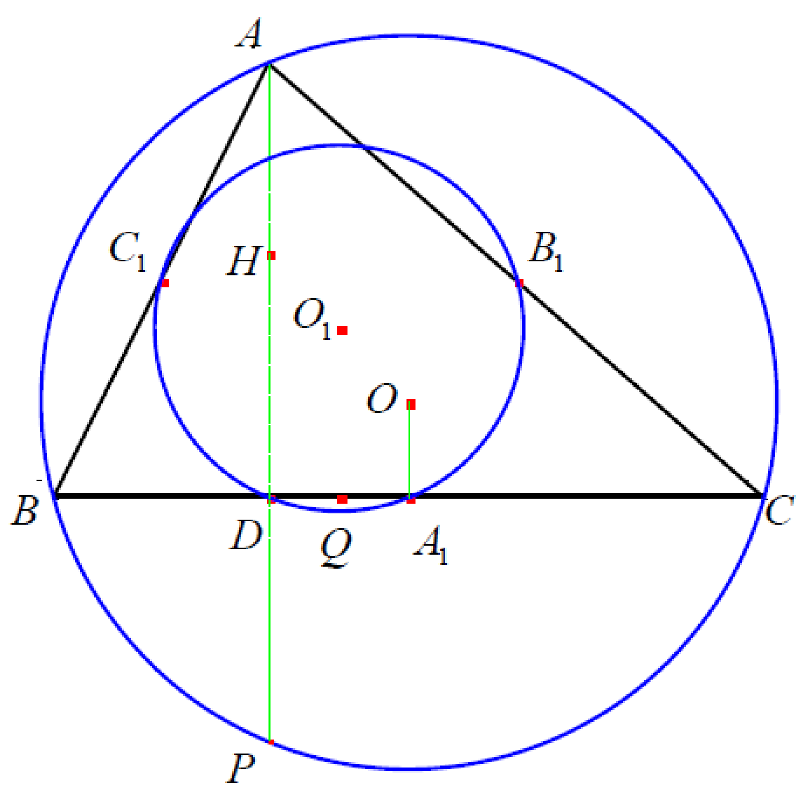


Soluzione problema 3: Dimostriamo dapprima che i tre raggi OA, OB e OC sono perpendicolari ai lati del triangolo ortico $A_1B_1C_1$. Infatti poiché $B\hat{O}C = 2\alpha$ (essendo angolo al centro che insiste sullo stesso arco di $B\hat{A}C = \alpha$) e poiché il triangolo BOC è isoscele sulla base BC, risulta che $O\hat{B}C = 90^\circ - \alpha$. Inoltre essendo AC_1A_1C ciclico, $C\hat{A}C_1 + C_1\hat{A}_1C = 180^\circ$, pertanto $C_1\hat{A}_1B = \alpha$. Ne consegue che A_1C_1 è perpendicolare a OB. Analogamente è possibile dimostrare la perpendicolarità dei raggi OA e OC rispettivamente con i segmenti B_1C_1 e A_1B_1.

Il triangolo ABC può essere scomposto in tre quadrilateri (OB_1AC_1, OC_1BA_1 e OA_1CB_1), ciascuno con le diagonali perpendicolari. Pertanto le loro aree possono essere calcolate effettuando il semiprodotto delle diagonali. Risulta:

$$S = \frac{1}{2}B_1C_1 \cdot OA + \frac{1}{2}A_1C_1 \cdot OB + \frac{1}{2}A_1B_1 \cdot OC = \frac{1}{2}R \cdot \left(B_1C_1 + A_1C_1 + A_1B_1\right) = \frac{1}{2}R \cdot 2p = R \cdot p$$

***Problema 4**: Sia P l'intersezione dell'altezza relativa al lato BC con la circonferenza circoscritta ad un triangolo ABC. Dimostrare che la distanza del centro O_1 della circonferenza dei nove punti dal lato BC è pari a* $\frac{1}{4} \cdot AP$.



Soluzione problema 4: Con riferimento alla figura, essendo HD e OA_1 paralleli fra loro, il quadrilatero HDA_1O è un trapezio con O_1 punto medio di OH. Pertanto, indicata con Q la sua proiezione su BC, risulta $O_1Q = \frac{1}{2}\left(A_1O + HD\right)$.

Ora $A_1O = \frac{1}{2}AH$ e $HD = \frac{1}{2}HP$, pertanto

$$O_1Q = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}AH + \frac{1}{2}HP\right) = \frac{1}{4}\left(AH + HP\right) = \frac{1}{4}AP.$$