

Successioni per ricorrenza

1. Sia F_n l' n -esimo numero di Fibonacci. $F_0 = 0, F_1 = 1, \dots$. Dimostrare la formula:

$$\sum_{i=1}^n F_i^2 = F_n F_{n+1}$$

2. Siano α, β le radici di $x^2 - 2011x + 1102$. Dimostrare che $\alpha^{2011} + \beta^{2011}$ è un numero intero.
3. Trovare la trentesima cifra dopo la virgola di $(\sqrt{3} + 2)^{101011}$.

Esercizi sui polinomi

Tecniche utilizzate: teorema di Ruffini, relazioni radici-coefficienti, induzione, disuguaglianza di riarrangiamento.

1. Dimostrare che se $x + \frac{1}{x}$ è un numero intero, anche $x^n + \frac{1}{x^n}$ lo è, per ogni naturale n .
2. Siano a, b numeri interi. Dimostrare che $P(x) = (x - a)^2(x - b)^2 + 1$ non si può scrivere come prodotto di polinomi a coefficienti interi di grado minore.
3. **(Febbraio 2007)** Sia $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$. Sapendo che la somma di due delle radici del polinomio vale zero, quale fra le seguenti relazioni tra i coefficienti di $P(x)$ è sempre vera? [R: (A) $abc = 0$ (B) $c = ab$ (C) $c = a + b$ (D) $b^2 = ac$ (E) nessuna]
4. Dimostrare la disuguaglianza:

$$3(ab + bc + ca) \leq (a + b + c)^2$$

5. **(Cesenatico 2002)** Determinare per quali valori di n tutte le soluzioni dell'equazione $x^3 - 3x + n$ sono numeri interi.