Polinomi

$$p(x) = a_n x^n + \ldots + a_0$$

$$a_i \in \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$$

Principio di identità

f, g poli, di grado $\leq n$.

1. $f = g$ come poli (sono $=$ i coeff)
2. $f(x) = g(x)$ per $n+1$ valori di x
3. $f(x) = g(x)$ $\forall x$

Allora 1 $\Leftrightarrow$ 2 $\Leftrightarrow$ 3

Dim 2 $\Rightarrow$ 1

Chiamiamo $x_1, \ldots, x_{n+1}$

$$f(x) - g(x) = (x - x_1)\, q_1(x)$$

$$= (x - x_1)(x - x_2)\, q_2(x)$$

$$\vdots$$

$$= (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_{n+1})\, q_{n+1}(x) \neq 0$$

deg $\leq n$

grado $\geq n+1$ o $\boxed{0}$

Esercizio: trovare $p(x)$ di grado ≤ 2 t.c.

$$p(1) = 3 \qquad p(3) = 2 \qquad p(4) = 5$$

Sol 1

$$p(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

$$\begin{cases} a_2 + a_1 + a_0 = 3 \\ a_2 9 + 3 a_1 + a_0 = 2 \\ a_2 16 + a_1 \cdot 4 + a_0 = 5 \end{cases}$$

Si risolve ...

Sol 2

$$p(x) = A(x-1)(x-3) + B(x-1)(x-4) + C(x-3)(x-4)$$

$$3 = p(1) = \quad 0 \qquad\qquad 0 \qquad\qquad C(-2)(-3)$$

$$C = \frac{1}{2}$$

$$2 = p(3) = B\,2 \cdot (-1) \quad \Rightarrow \quad B = -1$$

$$5 = p(4) = A\,3 \cdot 1 \quad \Rightarrow \quad A = 5/3$$

$$p(x) = \frac{5}{3}(x-1)(x-3) - (x-1)(x-4) + \frac{1}{2}(x-3)(x-4)$$

Oss: c'è un unico poli con la proprietà

Oss: date $(x_i, y_i)_{i=1,\dots,n+1}$ esiste unico $p(x)$ di grado $\leq n$ t.c.

$$p(x_i) = y_i$$

Dim: come sopra.

<u>Esercizio</u>: $p(x)$ poli t.c. grado di p è 24, monico

$p(1) = 1 \quad p(2) = 2 \ \ldots \quad p(24) = 24$

termine di grado + alto è 1

Trovare $p(25)$.

Idea: $q(x) = p(x) - x$.

$q(x)$ ha radici $1, 2, \ldots, 24$

$$q(x) = (x-1)(x-2)\ldots(x-24)\,q'(x)$$

ha grado 0

è 1

$$p(25) = q(25) + 25$$
$$= 24 \cdot 23 \cdot 22 \cdots 1 + 25$$
$$= 24! + 25$$

Esercizio: Trovare tutti i poli p di grado dispari t.c.

$$p(x^2+1) = p(x)^2 + 1 \qquad \forall x$$

Oss 1. $p(x) = \lambda x$

$$\lambda(x^2+1) = \lambda^2 x^2 + 1$$

$$\begin{cases} \lambda = \lambda^2 \\ \lambda = 1 \end{cases}$$

$p(x) = x$ che è soluzione

Idea: consideriamo $a \in \mathbb{R}$ t.c. $\boxed{p(a) = a}$

[perché esiste? $p(x) - x$ è annullato da a

ok perché ha grado dispari)

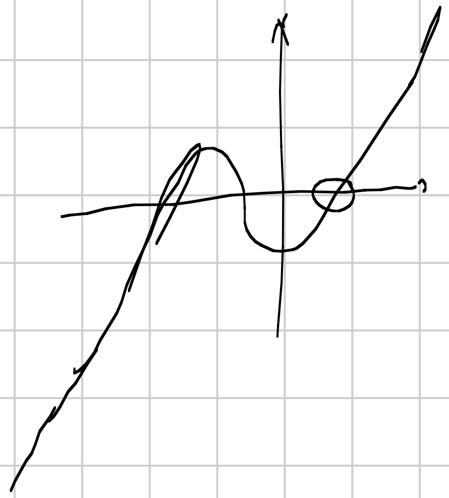
$$p(a^2+1) = [p(a)]^2 + 1$$
$$= a^2 + 1$$

Anche a^2+1 risolve
$$p(x) = x.$$

$$a < a^2+1 < (a^2+1)^2 + 1 < \dots$$
$\hookrightarrow$ $a < 2a \leq a^2+1$

risolvono $p(x) - x = 0$.

Quindi $p(x) \equiv x$.



Polinomi a coeff interi

Teorema delle radici razionali

Ex: x^3+x+1 è riducibile in $\mathbb{Q}$?

$f(x) = a_n x^n + \_\_ + a_0$ ha una radice p/q razionale

$$\Rightarrow \begin{cases} p \mid a_0 \\ q \mid a_n \end{cases}$$

Sol ex:

x^3+x+1 ha una radice in $\mathbb{Q}$?

Le uniche possibili radici (per il teo) sono 1 e -1.

Sostituendole, no. Quindi è irriducibile.

Dim teorema

$$a_n \frac{p^n}{\cancel{q^n}} + a_{n-1} \frac{p^{n-1}}{\cancel{q^{n-1}}} q + \ldots + a_1 \frac{p}{\cancel{q}} q^{n-1} + a_0 q^n = 0$$

(moltiplico per q^n)

$p \mid a_0 q^n$ ma $(p, q) = 1 \Rightarrow p \mid a_0$

$q \mid a_n p^n$ " " " $\Rightarrow q \mid a_n$

Esercizio p poli a coeff interi, $p(1) = 1$ $p(7) = 7$.

Dimostrare che $p(4) - 4$ è divisibile per 9

Sol 1

$$p(x) = (x-1)\,q_1(x) + 1$$

$$7 = 6\,q_1(7) + 1 \Rightarrow q_1(7) = 1$$

Ruffini: $q_1(x) = (x-7)\,q_2(x) + 1$

Sostituendo

$$p(x) = (x-1)(x-7)\,q_2(x) + x \cancel{-1} \cancel{+1}$$

$$p(4) - 4 = \underbrace{-3 \cdot 3}_{9}\,\underbrace{q_2(x)}_{\in \mathbb{Z}} \cancel{+4} \cancel{-4}$$

Sol 2

Consideriamo $p(x)-x$. Per hp si annulla in 1 e 7

$$p(x)-x = (x-1)(x-7)\,q(x)$$

Valuto in $x=4$

$$p(4)-4 = -9 \cdot q(4)$$

Esercizio Trovare il più piccolo $a \in \mathbb{N}$ t.c. $\forall\, p(x)$ poli a coeff interi con $p(8)=8$ $p(15)=15$

e $p(x) = x+a$ ha una soluzione intera.

$$p(x)-x = (x-8)(x-15)\,q(x) = a$$

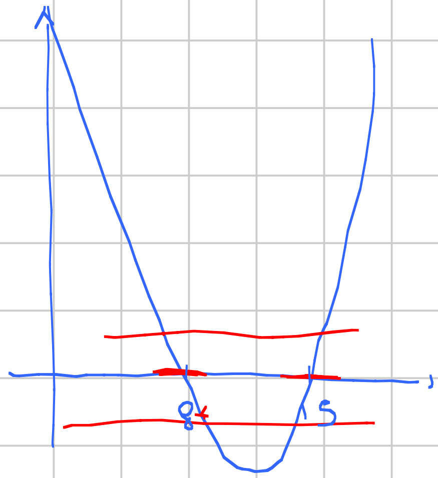
$q(x)$ sarà $+1$ -1

$a = 6$

$x = 9, 10, 11 — 14$

$x = 9$

$p(9) - 9, = 1 \cdot (-6)\ (-1) = \boxed{6}$



Oss: $a-b \mid a^n - b^n$

perché

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + b^{n-1})$$

$$= a^n - \cancel{a^{n-1}b} + \cancel{a^{n-1}b} - \dots$$

Oss: se n è pari $a+b \mid a^n - b^n$

$n = 2k$ $\quad (a+b)(a-b) = a^2 - b^2 \mid a^{2k} - b^{2k}$

Oss: $p(x)$ poli a coeff interi

$$a-b \mid p(a)-p(b)$$

(ottengo il precedente con $p(x) = x^n$)

Dim 1

$p(x) = a_n x^n + \dots + a_0$

$$p(a)-p(b) = a_n(a^n-b^n) + a_{n-1}(a^{n-1}-b^{n-1}) + \dots + a_1(a-b)$$

per l'oss è divisibile per $a-b$

Ogni addendo è divisibile per $a-b$.

Dim 2

Per Ruffini $\quad p(x) = (x-b)\,q(x) + p(b)$

$x=a \quad p(a)-p(b) = (a-b)\,q(a)$

Esercizio: $p(x)$ poli a coeff interi

$$p^{(k)}(x) = \underbrace{p(p\_\_(p}_{k \text{ volte}}(x))\_)$$

Supponiamo

$$p^{(k)}(a) = a.$$

Allora

$$p^{(2)}(a) = a$$

Dim:

Usiamo l'oss con a $b = p(a)$

$$\underbrace{a - p(a)}_{= \pm 1} \mid p(a) - p^{(2)}(a) \mid p^{(2)}(a) - p^{(3)}(a) \mid \dots \mid p^{(k)}(a) - p^{(k-1)}(a)$$

$$p^{(k)}(a) - p^{(k-1)}(a) = \underbrace{a - p(a)}$$

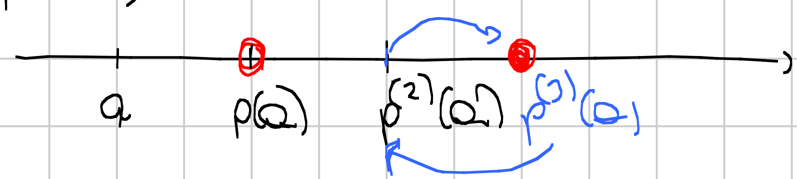
$= \pm 1$

Ci sono 2 casi:

① $a - \cancel{p(a)} = -(\cancel{p(a)} - p^{(2)}(a)) \Rightarrow \boxed{a = p^{(2)}(a)}$ ok

② $a - p(a) = p(a) - p^{(2)}(a)$

$p(a) - p^{(2)}(a) = \pm (p^{(2)}(a) - p^{(3)}(a))$



② è assurdo

Successioni per ricorrenza

$a_0, a_1, a_2 \ldots$

Un modo per def una succ

$$\begin{cases} F_0 = 0 \\ F_1 = 1 \\ \boxed{F_{n+1} = F_n + F_{n-1}} \end{cases}$$

(SUCC DI FIBONACCI) 0 1 1 2 3 5 8 13 ...

Domanda: vorrei una formula chiusa per F_n.

Idea 1: dimentichiamo F_0 e F_1. Cerchiamo soluzione

$$F_n = \lambda^n$$

$$\lambda^{n+1} = \lambda^n + \lambda^{n-1} \Rightarrow \lambda^2 - \lambda - 1 = 0$$

Ha sol $\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

Idea 2: G_n che risolve, H_n che risolve, allora

$$F_n := c_1 G_n + c_2 H_n$$

risolve.

G_n, H_n risolvono

$$F_{n+1} = c_1 G_{n+1} + c_2 H_{n+1} = \boxed{c_1 G_n} + c_1 G_{n-1} + \boxed{c_2 H_n} + c_2 H_{n-1}$$

$$= F_n + F_{n-1}.$$

Quindi

$$F_n = c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

risolve la ricorrenza

Imponiamo le condiz iniziali

$$\begin{cases} 0 = F_0 = c_1 + c_2 \\ 1 = F_1 = c_1 \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} + c_2 \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1 = -c_2 \\ 1 = c_1 \left(\dfrac{\cancel{1}+\sqrt{5}}{2} - \dfrac{\cancel{1}-\sqrt{5}}{2} \right) \end{cases} \qquad \begin{cases} c_2 = -\dfrac{1}{\sqrt{5}} \\ c_1 = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n$$

<u>Esercizio</u>: guardiamo la succ di Fibonacci mod p (p intero)
Dimostrare che è periodica.

<u>Esempio</u>: mod 4 $\quad \underbrace{0\ 1\ 1\ 2\ 3\ 1}\ \underbrace{0\ 1\ 1\ 2\ 3\ 1}\ 0 \ldots$

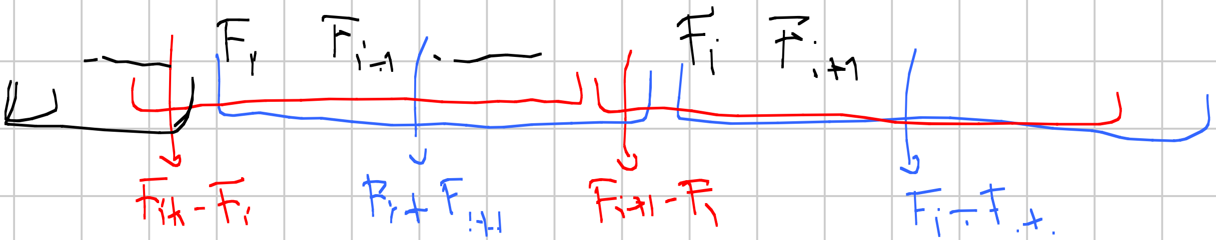
<u>Sol</u>:

$\{(F_i, F_{i+1}) : i \in \mathbb{N}\} \subseteq \{0 \ldots p-1\} \times \{0, \ldots, p-1\}$

↳ guardo i resti mod p

insieme finito

C'è una coppia che si ripete



Perché non c'è antiperiodo?

Formalmente: consideriamo la "prima" coppia che si ripete

Deve essere $(0,1)$

$e \; 5 = k^2 - pk$

Esercizio: se $\cancel{p}$ è primo il periodo divide $p-1$.