POSIZIONE

VERSO L'ISOLA DI CRETA [3279]
Qual è il più grande intero n di 4 cifre tale che il prodotto del numero costituito dalla prima e dalla terza cifra di n con il numero costituito dalla seconda e dalla terza cifra di n sia un numero di tre cifre tutte uguali alla quarta cifra di n?

Soluzione:
Sia $abcd$ il numero cercato.

Dai dati del problema si può scrivere l'equazione:

$$(10a+c)(10b+c)=111d$$

$$(10a+c)(10b+c)=37\cdot 3\cdot d$$

Ora o $10a+c$ o $10b+c$ deve essere 37, che ci permette di concludere che $c=7$ e di conseguenza $d=9$
Se 37 è il primo fattore, il secondo deve essere 27.
Da cui segue che $a=3$, $b=2$.

FATTORIZZAZIONE

Trova il più piccolo n positivo, tale che qualunque siano due fattori a e b positivi tali che $ab=10^n$, almeno uno tra a o b contenga la cifra 0.

Soluzione:
$10^n=2^n\cdot 5^n$
se uno dei due fattori contiene nella sua scomposizione un 2 e un 5 ha certamente uno zero in fondo.
Valutiamo quando tutti i fattori 2 e tutti i fattori 5 vengono divisi:
$a=2^n$, $b=5^n$
Cerchiamo il più piccolo n per cui o a o b contengano uno zero.

Per a dobbiamo arrivare fino a 10, in quanto $2^{10}=1024$
Per b è sufficiente arrivare fino a 8 in quanto $5^8=390625$

$n=8$.

CRIPTARITMETICA [715]
(a lettera uguale corrisponde cifra uguale, dare come risultato ABC)

			A	B	C	x
			A	A	A	=
C	C	C	C	C	C	

Per capire il valore delle cifre, proviamo a scomporre in fattori il risultato finale e il secondo fattore della moltiplicazione:

CCCCCC	C
111111	11
10101	3
3367	7
481	13
37	37
1	

AAA	A
111	3
37	37
1	

Da ciò segue immediatamente che: $A = 7$, visto che $A \neq C$ e l'unico fattore di CCCCCC di una sola cifra è appunto 7.

A questo punto calcolando $777 \cdot 700 = 543900$ si capisce che $C = 5$

A questo punto ricostruire la corretta moltiplicazione è decisamente più facile:

			7	**1**	**5**	**x**
			7	**7**	**7**	**=**
5	**5**	**5**	**5**	**5**	**5**	

CAMBIO DI BASE

TERZO CERCHIO [0138]
L'accesso alla zona del tempio era bloccata da un portale che interrogava: "Quali sono, in base 10 le prime 4 cifre decimali del rapporto tra il maggiore ed il minore dei fattori primi del numero 187_{432} scritto in base 432?"

$187_{432} = 1 \cdot 432^2 + 8 \cdot 432 + 7$
Sia $x = 432$
$x^2 + 8x + 7 = (x + 7)(x + 1) = (432 + 7)(432 + 1) = 439 \cdot 433$
Sia 439 che 433 sono primi, quindi la soluzione richiesta è:

PROBLEMI SUI DIVISORI

DIVISORI DI 6! [30]
Quanti divisori positivi ha il numero 6!

4. [12+18] (Stage Udine)

Determinare tutti i numeri naturali multipli di 6 e che possiedono esattamente 6 divisori naturali. (dare come risultato la somma di tutti i numeri trovati)

1. DROIDI SONDA [14] (IV allenamento on-line)

Darth Vader diede ordine di inviare nei quattro quadranti della galassia migliaia di droidi-sonda, con l'intento di scovare il nascondiglio ribelle. Al sistema di Hoth furono destinati tutti i droidi il cui codice identificativo era uno dei divisori di 12600. Al primo pianeta del sistema erano stati inviati tutti i droidi con codice multiplo di 8, al secondo i droidi rimasti multipli di 12. Ai tre pianeti successivi furono destinati i droidi avanzati in parti uguali. Quanti droidi sono stati inviati su Hoth, quinto pianeta del sistema?

HIGH SCHOOL MATH CONTEST [36]

Quanti quadrati perfetti dividono il numero $4! \cdot 5! \cdot 6!$

DIVISORI [9]

Quanti sono i numeri naturali strettamente minori di 100 che hanno un numero dispari di divisori?

Soluzione:

I quadrati perfetti.

Infatti se il numero di divisori è dato da: $d(k) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)\dots(\alpha_n + 1)$ e deve essere un numero dispari, allora tutti gli α_i devono essere pari e quindi

$$k = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_n^{\alpha_n} = p_1^{2\alpha'_1} \cdot p_2^{2\alpha'_2} \cdot \dots \cdot p_n^{2\alpha'_n} = \left(p_1^{\alpha'_1} \cdot p_2^{\alpha'_2} \cdot \dots \cdot p_n^{\alpha'_n}\right)^2$$

DIVISORI [180]

Qual è il più piccolo intero positivo con sei divisori dispari e dodici divisori pari?

Come prima osservazione, possiamo dire che il numero sarà pari e che 2 comparirà nella sua fattorizzazione.

$$k = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_n^{\alpha_n}$$

Avendo in totale 18 divisori, dovrà accadere che il numero cercato ha al più 3 numeri primi nella sua fattorizzazione:

$$d(k) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)\dots(\alpha_n + 1) = 18 = 2 \cdot 3 \cdot 3$$

Divisori dispari:

escludiamo il 2 dalla fattorizzazione ($\alpha_1 = 2$)e devono restare

$(\alpha_2 + 1)\dots(\alpha_n + 1) = 6 \cdot 1 = 3 \cdot 2$ $\qquad$ $\alpha_2 = 5$ oppure $\alpha_2 = 2$ e $\alpha_3 = 1$

Il numero k più piccolo lo ottengo in questo ultimo caso: $k = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 180$

PROBLEMI SULLE DIVISIONI INTERE

DIVISIONE INTERA

trovare tutti i numeri interi nella forma $n = \frac{x+9}{x-1}$

casi più complicati:

$$a = \frac{b^2 + 3b + 1}{b - 4}$$

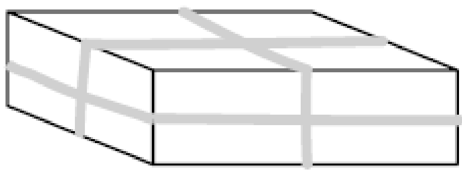
$$a = \frac{b + 3}{2b + 1}$$

DESIDERIO [20-21-24-35]

Desiderio, mentre parla al telefono con Angelo, giocherella con carta e penna. Alla fine della lunga telefonata, ha tracciato diverse rette che (a due a due) sono sempre parallele o perpendicolari. Queste rette dividono il piano in un certo numero di rettangoli e di regioni illimitate. Il numero dei rettangoli è esattamente il doppio del numero delle regioni illimitate.
Quante rette ha tracciato Desiderio ?

(Desiderio ha tracciato 20 oppure 21 oppure 24 oppure 35 rette)

La festa della mamma [(1,4,16); (2,3,14); (2,4,8); (2,5,6); (4,4,4)]



Per la sua festa, la mamma di Chiara e Anna riceve dalle figlie un regalo imballato in una scatola a forma di parallelepipedo rettangolo, le cui dimensioni sono tutte dei numeri interi di centimetri. La lunghezza del nastro utilizzato intorno al pacchetto (senza contare il fiocco) - espressa in centimetri – è uguale alla metà della misura della superficie della carta da regalo (superficie totale del parallelepipedo), espressa in centimetri quadrati.
Quali sono le tre dimensioni del pacchetto, indicate in ordine crescente?