1 Congruenze

1. Esistono numeri della forma 200620062006...2006, ottenuti cioè ripetendo le cifre 2006 un certo numero di volte, che siano quadrati perfetti?

   Soluzione:

   No, in quanto tutti questi numeri sono congrui a 2 mod 4, ma non esistono quadrati congrui a 2 mod 4.

2. Trovare tutte le soluzioni naturali a $2^m - n^2 = 1$.

   Soluzione:

   Se $m \geq 2$, considerare l'equazione modulo 4 dà $-n^2 \equiv 1 \pmod 4 \Rightarrow n^2 \equiv 3 \pmod 4$, assurdo. Restano allora solo i casi $m = 0, 1$, che si controllano separatamente (e forniscono le uniche soluzioni).

3. Dimostrare che se $11|2a + 3b$, allora $11|a^2 - 5b^2$.

   Soluzione:

   Si ha in effetti

   $$2a \equiv -3b \pmod{11} \Rightarrow 4a^2 \equiv 9b^2 \pmod{11}$$

   $$\Rightarrow 3 \cdot 4a^2 \equiv 3 \cdot 9b^2 \pmod{11} \Rightarrow a^2 \equiv 5b^2 \pmod{11}$$

   e questo, per definizione, vuol dire $11|a^2 - 5b^2$.

4. Risolvere $3x^2 - 2y^2 = 1998$ nei naturali.

   Soluzione: Sostituzioni ripetute ($x = 2a, a = 3c; y = 3b, b = 3d$) portano a $2c^2 - 3d^2 = 37$. Letta mod 3, questa equazione diventa $2c^2 \equiv 1 \pmod 3 \Leftrightarrow c^2 \equiv 2 \pmod 3$, assurdo.

5. (Febbraio 2005) Trovare tutte le coppie di interi positivi (m, n) tali che $\dfrac{3^m + 3}{2^n + 2^{n-1}}$ sia un intero.

   Soluzione:

   Dopo aver semplificato un fattore 3, ci chiediamo quando $\dfrac{3^{m-1} + 1}{2^{n-1}}$ sia un intero. Considerando il numeratore mod 8 scopriamo che esso è congruo a 2 o 4, dunque - in particolare - non è divisibile per 8, e si deve perciò avere $n - 1 < 3 \Rightarrow n \leq 3$. Per $n = 1, 2$ non ci sono altre condizioni, perchè il numeratore è pari; per $n = 3$ si deve invece avere $4|3^{m-1} + 1$, che è vera se e solo se m è pari.

6. (Febbraio 2003) Sia $x_n, n \geq 0$, definita per ricorrenza da $x_0 = 2, x_{n+1} = 5 + x_n^2$. Dimostrare che l'unico numero primo in tale successione è 2.

Soluzione:

E' immediato constatare che termini conscutivi della successione hanno parità opposte, perchè $x_{n+1} \equiv 5 + x_n^2 \equiv 1 + x_n \pmod 2$.

Ne segue che tutti i termini con indice pari sono divisibili per 2.

Consideriamo poi la successione modulo 3, ed in particolare mostriamo che x_n è divisibile per 3 se e solo se n è dispari.

Mostriamo questo fatto per induzione: è ovviamente vero per x_0, x_1, e si ha poi:

(a) Se n è pari, allora x_n non è divisibile per 3 per ipotesi induttiva, $x_n = 3k \pm 1$ per qualche k, e quindi $x_{n+1} = (3k \pm 1)^2 + 5 = 9k^2 \pm 2 \cdot 3k + 6 \equiv 0 \pmod 3$, come voluto;

(b) se n è dispari, x_n è divisibile per 3, $x_n = 3k$ per qualche k, e $x_{n+1} = (3k)^2 + 5 \equiv 2 \pmod 3$, cioè non divisibile per 3, come voluto.

Abbiamo quindi dimostrato che tutti i termini della successione sono divisibili o per 2 o per 3, e, dato che la successione è strettamente crescente, l'unico primo in essa contenuto è 2.

7. (Cesenatico 1995/6) Risolvere negli interi $x^2 + 615 = 2^y$

Soluzione: Consideriamo l'equazione mod 3.

Ne ricaviamo che y è pari, perchè $2^y \equiv x^2 \pmod 3$ dà $x \not\equiv 0 \pmod 3 \Rightarrow 2^y \equiv x^2 \equiv 1 \pmod 3$ (in quanto i quadrati di interi non congrui a $0 \pmod 3$ sono congrui a $1 \pmod 3$, come verificato ad esempio nell'esercizio sopra, o come segue dal piccolo teorema di Fermat), e quindi si deve avere $(-1)^y \equiv 1 \pmod 3$.

Poniamo perciò $y = 2a$, $2^a = z$ e riscriviamo l'equazione come $z^2 - x^2 = 615$: abbiamo ricondotto l'esercizio a scrivere 615 come differenza di quadrati, e questo è un problema ben più facile.

Fattorizzando come $(z-x)(z+x) = 615$ otteniamo che $(z-x)+(z+x) = 2z = 2^{a+1}$ è una potenza di 2, perciò, detto $h = z - x$, dobbiamo verificare per quali h scelti tra i divisori di $615 = 3 \cdot 5 \cdot 41$ si abbia che $h + \frac{615}{h}$ sia una potenza di 2.

Possiamo supporre $x > 0$ e quindi $h > 0$, e possiamo inoltre verificare tale condizione - stante la simmetria dell'espressione in h e $615/h$ - solo per $h = 1, 3, 5, 41$. E' adesso immediato controllare che solo $h = 5$ fornisce una potenza di 2, e risostituendo all'indietro otteniamo $2^{a+1} = 5 + 615/5 = 128 \Rightarrow a = 6, y = 12, x = \pm 59$.

8. (IMO 2009/1) Sia n un intero positivo, e siano $a_1, ..., a_k$ $(k \geq 2)$ interi distinti scelti in $\{1, 2, ..., n\}$, tali che $n | a_i(a_{i+1} - 1)$ per $i = 1, ..., k-1$.

   Dimostrare che allora n non divide $a_k(a_1 - 1)$.

   Soluzione:

   Riscrivendo l'ipotesi in termini di congruenze si ha $a_i \cdot a_{i+1} \equiv a_i \pmod{n}$. Osserviamo allora che per induzione sappiamo dimostrare $a_j a_1 \equiv a_1 \pmod{n}$: infatti

$$a_1 \equiv a_1 \cdot a_2 \equiv a_1 \cdot (a_2 a_3) \equiv (a_1 a_2) \cdot a_3 \equiv a_1 \cdot a_3 \pmod{n}$$

   e similmente, sfruttando l'ipotesi induttiva $a_1 a_j \equiv a_1$,

$$a_1 \equiv a_1 \cdot a_j \equiv a_1(a_j \cdot a_{j+1}) \equiv (a_1 \cdot a_j) \cdot a_{j+1} \equiv a_1 \cdot a_{j+1} \pmod{n}$$

   Ma allora, se per assurdo fosse $a_1 \cdot a_k \equiv a_k$, avremmo $a_k \equiv a_1 \cdot a_k \equiv a_1 \pmod{n}$, ma questo è impossibile, perchè $a_1 \equiv a_k \pmod{n}$, insieme al fatto che entrambi sono compresi tra 1 ed n, darebbe $a_1 = a_k$, mentre per ipotesi sono stati scelti diversi.

2 Fattorizzazioni

1. (Febbraio 2001) Risolvere negli interi $a^3 + b^3 = 91$.

   Soluzione:

   Fattorizzando l'espressione a sinistra troviamo che $(a+b)(a^2 - ab + b^2) = 91 = 7 \cdot 13$.

   Osserviamo intanto che $a^2 - ab + b^2$ è sempre non negativo, perchè è uguale sia a $(a+b)^2 - 3ab$, sia a $(a-b)^2 + ab$, ed a seconda del segno di ab almeno uno dei due è positivo; altrimenti, con in mente l'idea di completare il quadrato, si può osservare che tale quantità è uguale a $(a - b/2)^2 + \frac{3}{4}b^2 \geq 0$.

   Questo esclude il caso dei divisori negativi di 91, e lascia quindi come uniche possibilità $a+b = 1, 7, 13, 91$ e, corrispondentemente, $a^2 - ab + b^2 = 91, 13, 7, 1$

   Questi sono 4 sistemi di due equazioni in due incognite, che possono essere risolti facilmente tramite la formula per le equazioni di secondo grado; per risparmiare calcoli, conviene risolvere direttamente il caso generale e sostituire poi i valori $h = 1, 7, 13, 91$:

   $$\begin{cases} a + b = h \\ a^2 - ab + b^2 = 91/h \end{cases}$$

   $$\begin{cases} a + b = h \\ a^2 - a(h-a) + (h-a)^2 = 91/h \end{cases}$$

   L'equazione di secondo grado per a ha $\Delta = \frac{91 \cdot 12}{h} - 3h^2$, che deve essere un quadrato (condizione necessaria, ma non sufficiente, a priori). Si verifica facilmente che lo è per $h = 1, 7$, mentre per $h = 13$ è già un numero negativo (inutile quindi provare $h = 91$)

   I primi due casi portano effettivamente alle soluzioni $(-5, 6), (6, -5)$ e $(3, 4), (4, 3)$.

2. Risolvere nei naturali $3^n - 1 = a^3$.

   Soluzione:

   Riscrivendo l'equazione come $3^n = (a+1)(a^2 - a + 1)$ si ha che $a+1, a^2 - a + 1$ sono potenze di 3. Detto $a + 1 = 3^k$ si ha $a^2 - a + 1 = 3^{2k} - 3^{k+1} + 3 = 3^j$. Ma per $k \geq 1$ si ha $3^{2k} - 3^{k+1} + 3 \equiv 3 \pmod 9$, dunque o $k = 0$ o $3^{2k} - 3^{k+1} + 3 = 3$, cioè o $a = 0$, o $k = 1 \Rightarrow a = 2$, che effettivamente sono soluzioni.

3. Dato p numero primo, trovare tutte le coppie di naturali (m, n) tali che

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{p}$$

Soluzione (standard):

Minimi comuni multipli e 'completamento' di $mn - pm - pn$ portano a $(m-p)(n-p) = p^2$. A questo punto $m - p \in \left\{\pm 1, \pm p, \pm p^2\right\}$. Scrivendo esplicitamente m si hanno le possibilità $p+1, p-1, 0, 2p, p+p^2, p-p^2$. Siccome $m \in \mathbb{N}$, sono accettabili solo $m = p+1, p-1, 2p, p(p+1)$; ricavando, a questo punto, gli n corrispondenti, si scarta ancora $m = p-1$, perchè darebbe $n = p - p^2 < 0$, e si hanno quindi infine le soluzioni

$$(p+1, p+p^2); (2p, 2p); (p+p^2, p+1)$$

Soluzione (veloce):

Siccome $m, n > p$ scriviamo $m = p + a, n = p + b$. Sostituendo e sviluppando tutto si ottiene $p^2 = ab$, da cui immediatamente le soluzioni di sopra.

4. (Analogo al precedente, Febbraio 2000) Risolvere nei naturali

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} - \frac{1}{mn} = \frac{2}{5}$$

Soluzione (divisibilità):

Dopo il minimo comune multiplo ci troviamo con $2mn - 5m - 5n = -5$. Nel tentativo di simmetrizzare un po' la scrittura, moltiplichiamo tutto per 2, ottenendo

$$(2m)(2n) - 5(2m) - 5(2n) = -10$$

E' a questo punto abbastanza chiaro come completare il membro di sinistra per poterlo fattorizzare:

$$(2m)(2n) - 5(2m) - 5(2n) + 25 = -10 + 25$$

e cioè $(2m-5)(2n-5) = 15$. A questo punto è un elenco di casi, perchè $2m-5$ deve essere un divisore intero di 15 (attenzione al fatto che potrebbe anche essere negativo!).

Soluzione (disuguaglianze):

Data la simmetria dell'equazione, possiamo supporre $m \geq n$.

Le seguenti disuguaglianze:

$$\frac{2}{5} = \frac{1}{m} + \frac{1}{n} - \frac{1}{mn} < \frac{1}{n} + \frac{1}{n} = \frac{2}{n}$$

$$\frac{2}{5} = \frac{1}{m} + \frac{1}{n} - \frac{1}{mn} = \frac{1}{n} + \frac{n-1}{mn} \geq \frac{1}{n}$$

forniscono $\frac{5}{2} \leq n < 5$, cioè $n = 3$ o $n = 4$, e sostituendo si trovano velocemente i corrispondenti valori di m (attenzione al fatto che abbiamo supposto $m \geq n$, ma alla fine dovremo includere anche le soluzioni con $m \leq n$)

5. (Cesenatico 2006/2) Risolvere nei naturali $p^n + 144 = m^2$, dove p è un numero primo.

   Soluzione:

   Riscriviamo l'equazione come $p^n = m^2 - 144 = (m + 12)(m - 12)$. Ne segue che $m+12, m-12$ sono potenze di p, cioè risolvere questa equazione è equivalente a risolvere il sistema

$$\begin{cases} m + 12 = p^a \\ m - 12 = p^b \end{cases}$$

   Osservazione: Prima di risolvere il problema in sé, mostriamo che può esistere solo un numero finito di soluzioni. Infatti, notiamo che $a \geq b + 1$, e quindi $m + 12 = p^a \geq p \cdot p^b = p \cdot (m - 12)$, da cui $12\frac{p+1}{p-1} \geq m$. Il membro di sinistra ha un massimo per $p = 2$, perchè $\frac{p+1}{p-1} = 1 + \frac{2}{p-1}$, dunque otteniamo $m \leq 36$, cioè esiste al più un numero finito di soluzioni.

   Per una soluzione puramente aritmetica, invece, procediamo come segue: per differenza tra le due equazioni del sistema otteniamo $24 = p^b(p^{a-b}-1)$. Distinguiamo due casi:

   (a) Se $b = 0$ si deve avere $25 = p^{a-b}$, cioè $p = 5$, e dalla seconda equazione del sistema $m = 13$, che è effettivamente soluzione ($5^2 + 12^2 = 13^2$)

   (b) Se $b > 0$, $p|24$, da cui $p \in \{2, 3\}$, ed inoltre $p^b|24$, quindi per $p = 3$ dev'essere $b = 1$, che porta a $m = 15$. Per $p = 2$ si ha $24 = 2^b(2^{b-a} - 1)$, da cui $2^b = 8$ ed $m = 20$, che è un'ultima soluzione.

3 Varie

1. (Cesenatico 1996) Dimostrare che l'equazione $a^2 + b^2 = c^2 + 3$ ha infinite soluzioni intere positive.

   Soluzione:

   Vorrei ricondurmi ad un problema 'lineare', invece che di secondo grado. Provo a porre $c = a + d$, il che trasforma l'equazione in $b^2 - d^2 - 3 = 2ad$. Risolvendo per a

   $$a = \frac{b^2 - d^2 - 3}{2d}$$

   si nota subito che se (b, d) è una coppia che rende la precedente espressione intera, allora anche $(b + 2d, d)$ lo è.

   Visto che $(b, d) = (2, 1)$ è appunto una coppia che fornisce un a intero, abbiamo in particolare la famiglia infinita di soluzioni $b \equiv 0 \pmod 2, d = 1 \Rightarrow (a, b, c) = (2e^2 - 2, 2e, 2e^2 - 1)$ (per essere precisi, dovremmo considerare queste soluzioni solo per $e \geq 2$, perchè il problema richiede interi positivi; similmente, avremmo dovuto prendere come soluzione minima $(4, 1)$, ma non sarebbe cambiato nulla di sostanziale nella soluzione)

2. (Cesenatico 2001) Risolvere negli interi positivi $x^{2001} = 2001^y$, sapendo che $2001 = 3 \cdot 23 \cdot 29$

   Soluzione:

   Poniamo $d = (2001, x)$, $x = da$, $2001 = db$ ed osserviamo che la condizione del testo è equivalente a $(da)^{\frac{b}{a}} \in \mathbb{N}$.

   Dal momento che b ed a sono coprimi per costruzione, questo equivale a richiedere che da sia una potenza a-esima perfetta (questo è chiaro pensando in termini di esponenti nella fattorizzazione in primi dell'intero da: tutti gli esponenti, moltiplicati per b/a, devono restare interi, cioè tutti gli esponenti devono essere multipli di a).

   Si deve pertanto avere $da = k^a$ per qualche k. Siccome $d|2001$, d è prodotto di primi tutti distinti, il che ci dice che $d|k^a \Rightarrow d|k$. Ma allora $k = df$ ed avremmo $da = (df)^a = d^a \cdot f^a$.

   Ora, se $f = 1$ abbiamo $a = d^{a-1}$, che ha come unica soluzione $a = 1$ (Infatti o $d = 1$, e quindi $a = 1$, oppure $d \geq 3$ e si ha $d^{a-1} \geq (1 + 2)^{a-1} = 1 + 2(a - 1) + ... \geq 1 + 2(a - 1) = 2a - 1 > a$ se $a > 1$).

   Se invece $f > 1$ e per assurdo fosse anche $a > 1$, si avrebbe $da = d^a \cdot f^a > d \cdot a$, che è chiaramente impossibile.

   Quindi abbiamo dimostrato che $a = 1$. Ma questo è equivalente a dire $x|2001$, ed è chiaro che ogni tale x fornisce una soluzione, in virtù della scrittura $(da)^{\frac{b}{a}} \in \mathbb{N}$ letta con $a = 1$.