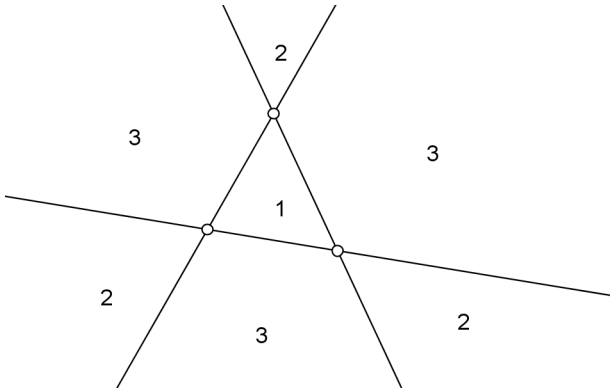
Soluzioni dei problemi di geometria

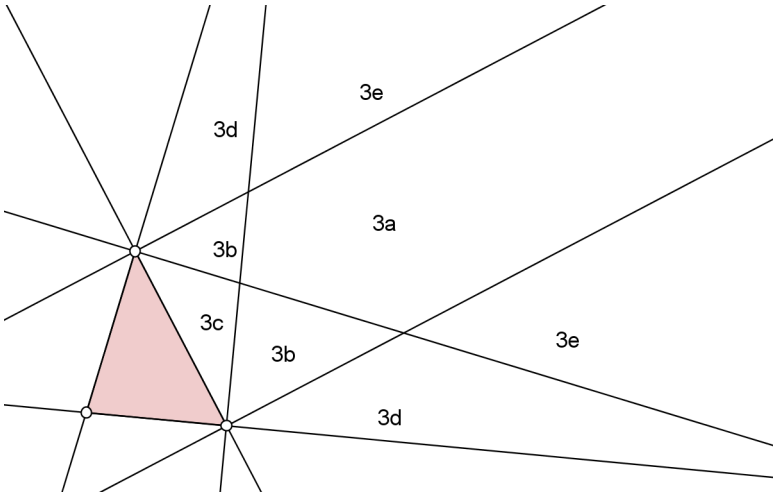
Angoli

- (Il ritorno del teorema di Simson): Sia ABC un triangolo, P un punto tale che le sue proiezioni sulle rette dei lati siano allineate. Dimostrare che allora P sta sulla circonferenza circoscritta ad ABC.

  Dimostrazione. Tratto solo il caso ABC acutangolo; il caso retto e quello ottusangolo si trattano in modo simile. All'inizio bisogna fare un po' di configurazioni, che risultano differenti nella risoluzione. Dato il piano in cui giace il triangolo ABC, esso sarà diviso in 7 parti dalle rette su cui giacciono i lati: il triangolo (marcata con un 1), le 3 zone a cono (marcate con il 2) e rimanenti 3 zone (marcate con il 3).

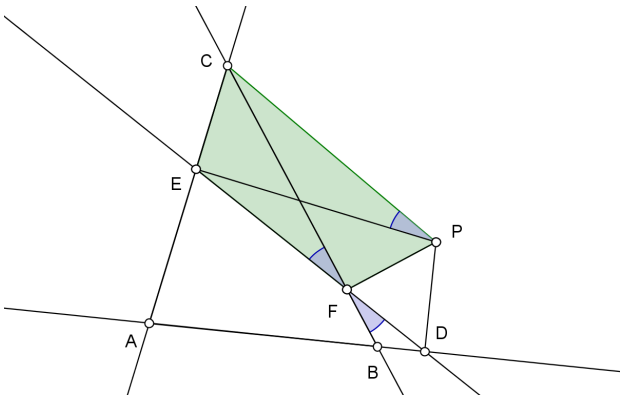


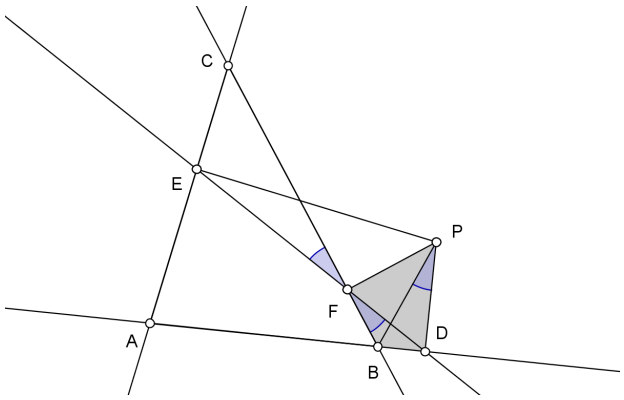
  Si vede facilmente che se il punto P è dentro al triangolo o un una delle zone 2 sicuramente le proiezioni non sono allineate. Quindi se abbiamo un punto P che ha le proiezioni allineate sarà sicuramente in una delle zone 3. Osserviamo ora che una retta qualsiasi interseca il perimetro del triangolo in 0 punti oppure 2 punti. In particolare se le proiezioni di P sono allineate allora o nessuna appartiene ai lati interni o ce ne sono 2.



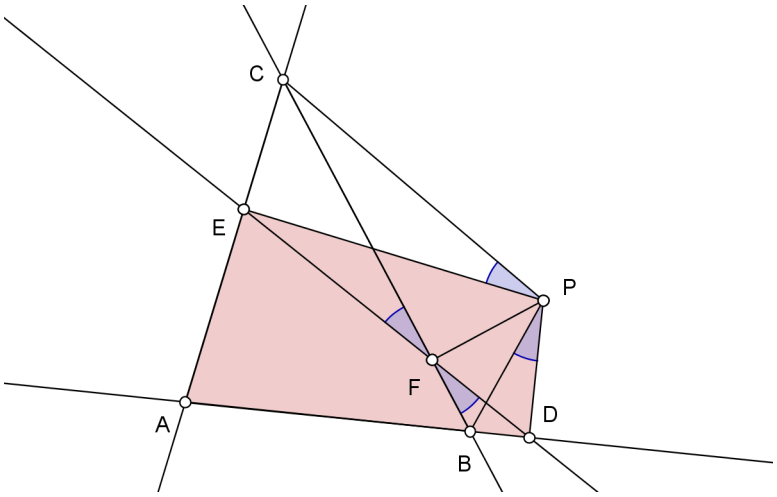
  Ora dividiamo questa zona 3 in 8 zone, in pratica a seconda di dove vanno a cadere le proiezioni di P: quindi distinguiamo a seconda che capiti nella zona $3a$ (una proiezione sul perimetro, quindi non va bene), nella zona $3c$ (3 proiezioni interne, quindi non va bene), nella zona $3d$ (una sola proiezione sul perimetro, quindi non va bene), nella zona $3e$ (nella quale si vede che non potranno essere allineati) o $3b$, l'unica in cui può essere il punto P che soddisfa le ipotesi del teorema.

Quindi abbiamo la nostra figura con il punto P nella zona $3b$ e tracciamo le 3 perpendicolari. Per quanto detto a lezione, questi angoli retti ci fanno individuare 3 quadrilateri ciclici che sono: $CEFP$, $FBDP$ e $DPEA$. Li sfrutteremo esattamente in questo ordine. Innanzitutto notiamo che l'allineamento è equivalente al fatto che $B\hat{F}D = E\hat{F}C$ che sono gli angoli opposti al vertice (ma vale anche il viceversa poichè B, F, C sono allineati).





Usando il primo quadrilatero ciclico (figura a sinistra) otteniamo che $E\hat{F}C = E\hat{P}C$ poichè angoli alla circonferenza che sottendono lo stesso arco EC; dalla ciclicità di $FBDP$ similmente ricaviamo che $B\hat{F}D = B\hat{P}D$ e quindi, usando il fatto di prima otteniamo che $E\hat{P}C = B\hat{P}D$ se e solo se D, E, F sono allineati. Usiamo infine l'ultimo quadrilatero ciclico che conosciamo.

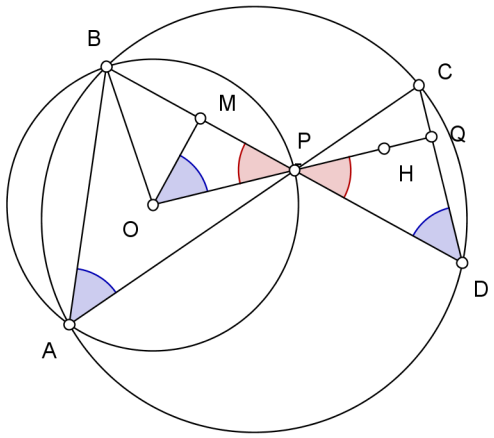


Dalla ciclicità di $ADPE$ sappiamo che $D\hat{P}E + D\hat{A}E = 180^o$. Notiamo ora che D, E, F erano allineati se e solo se $B\hat{P}E = E\hat{P}D$ che vale se e solo se $B\hat{P}C = D\hat{P}E (= 180^o - D\hat{A}E = 180^o - B\hat{A}C)$ semplicemente sottraendo membro a membro l'angolo in comune $E\hat{P}B$. Da cui D, E, F sono allineati se e solo se $B\hat{P}C + B\hat{A}C = 180^o$ cioè esattamente se $ABPC$ è ciclico cioè che P sta sulla circonferenza circoscritta ad ABC.

- Sia $ABCD$ un quadrilatero ciclico (cioè inscritto in una circonferenza), $P = AC \cap BD$, O il circocentro di APB e H l'ortocentro di PCD. Dimostrare che i punti O, P, H sono allineati.

  Dimostrazione. Si prendano M il punto medio di BP, Q il piede dell'altezza relativa a P nel triangolo CPD. Naturalmente avrò $B\hat{A}C = B\hat{D}C$ poichè angoli alla circonferenza che sottendono lo stesso arco. Inoltre considerando la circonferenza circoscritta ad ABP so che $B\hat{O}P = 2B\hat{A}P$ perchè angolo al centro e angolo alla circonferenza che sottendono lo stesso arco. Inoltre poichè POB è isoscele in quanto $PO = OB$ (raggi della stessa circonferenza), avrò che la mediana OM è anche bisettrice da cui $2M\hat{O}P = B\hat{O}P = 2B\hat{A}P$ e dunque $M\hat{O}P = B\hat{A}P = P\hat{D}C$.

  Ora considero i due triangoli OMP e PQD che hanno $M\hat{O}P = P\hat{D}Q$ per quanto detto prima e $O\hat{M}P = P\hat{Q}D$ in quanto angoli retti. In particolare hanno anche il terzo angolo uguale, cioè $M\hat{P}O = Q\hat{P}D = H\hat{P}D$, che unito al fatto che P, D, M sono allineati, dà che O, P, H sono allineati anch'essi.



- Sia $ABCD$ un quadrato inscritto in una circonferenza Γ. Sia P un punto nell'arco minore AB. Si chiamino $E = CP \cap AB$ e $G = CA \cap PD$. Si dimostri che:
  - $\widehat{APD} = \widehat{BPC} = \widehat{CPD}$;
  - $GEPA$ è ciclico;
  - $GE \perp AC$

Dimostrazione. Prologo: Qual è il luogo dei punti che vedono un segmento AB sotto un determinato angolo α? Se questo angolo è 90° sappiamo che la soluzione sarà la circonferenza che ha per diametro AB, mentre se è diverso da 90° non è difficile vedere che il luogo sarà l'unione di due archi di circonferenza speculari rispetto ad AB dove il centro di uno di questi archi sarà un punto O tale che $A\hat{O}B$ è il doppio dell'angolo α (provare per credere!! Attenzione che questa costruzione funziona solo per α angolo acuto, ma è facile trovare quella per quando è ottuso). Quindi in particolare se ho $A\hat{P}B = A\hat{Q}B$ e P e Q sono nello stesso semipiano rispetto alla retta AB avrò che entrambi i punti appartengono al luogo $\left\{X \text{ t.c. } A\hat{X}B\right\}$ che è un arco di circonferenza e quindi P, Q, A, B giacciono su una stessa circonferenza e dunque $PABQ$ è ciclico.
Tutto questo si può riassumere in un enunciato del tipo:

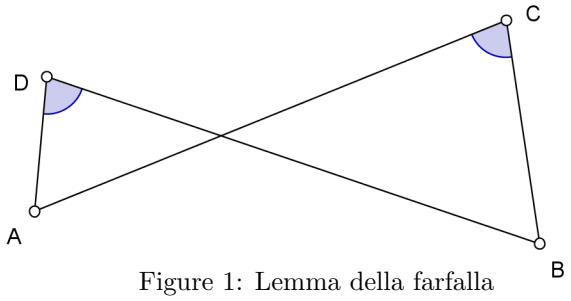
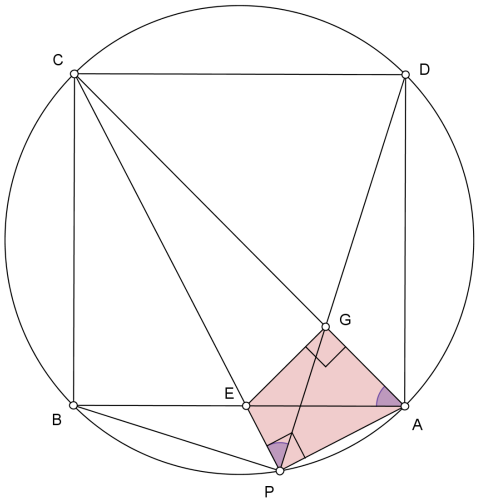


Figure 1: Lemma della farfalla

Lemma (della farfalla) Sia $ABCD$ un quadrilatero, in modo che $ADBC$ sia un quadrilatero intrecciato. Allora $ABCD$ è ciclico *se e solo se* $A\hat{D}B = A\hat{C}D$. Dalla figura esplicativa dovrebbe essere chiaro cos'è la "'farfalla"'...

Ma passiamo al nostro problema: il primo punto è molto facile... Poiché $BC = CD = DA$ avremo che gli angoli alla circonferenza che li sottendono sono uguali , quindi in particolare, visti da P risultano: $A\hat{P}D = D\hat{P}C = C\hat{P}B = 45^o$ perchè sottendono un quarto di circonferenza. Ma da questo ragionamento ricaviamo anche che $C\hat{P}D = B\hat{A}C$, ma ora, applicando il "'lemma della farfalla"' al quadrilatero $GEPA$ otteniamo che, poiché $E\hat{P}G = E\hat{A}G = 45^o$ allora $GEPA$ è ciclico.
Per fare l'ultimo punto ora basta osservare che $E\hat{P}A = C\hat{P}A$ è un angolo retto e dunque EA è un diametro della circonferenza circoscritta a $GEPA$ e quindi anche l'altro angolo è retto poiché sottende un diametro. Abbiamo dunque dimostrato che $E\hat{G}A$ è retto e dunque $EG \perp AC$.