Problemi di geometria

Un po' di vettori

I vettori sono un modo compatto e molte volte comodo di usare le classiche coordinate cartesiane che permette di snellire i conti. La notazione è molto semplice. Innanzitutto bisogna fissare una origine, che chiameremo O (che con una traslazione possiamo sempre portare in $(0,0)$). Dato un punto A di coordinate (x_A, y_A), consideriamo il vettore $\vec{A} = \vec{OA}$

A questo punto valgono le proprietà usuali dei vettori. Ad esempio per costruire il punto C tale che $\vec{A} + \vec{B} = \vec{C}$, lo prendo in modo tale che $OACB$ sia un parallelogrammo (regola del parallelogrammo). Posso anche considerare ad esempio il vettore $\frac{1}{2}\vec{A}$ che non è altro che il vettore che identifica il punto medio tra O ed A; più in generale il vettore $t\vec{A}$ identifica il punto P sulla retta per O e A tale che $\frac{OP}{OA} = t$ e se t è negativo O risulta interno al segmento PA (segmenti orientati).

Inoltre si può far vedere che $\vec{A} - \vec{B} = \vec{BA}$ cioè il vettore che va da B ad A (ad esempio dall'identità $0 = \vec{OA} + \vec{AB} + \vec{BO} = \vec{OA} + \vec{AB} - \vec{OB}$). In un certo senso quindi stiamo usando i vettori per indicare una posizione (ad esempio il punto $\vec{A}$), ma anche uno spostamento: il vettore $\vec{B} - \vec{A}$ è il cammino che va da A a B.

1. Trovare (in funzione dei vettori $\vec{A}, \vec{B}$) il vettore che identifica il punto medio di AB.
2. Trovare il vettore che identifica il punto P sul segmento AB che divide AB in due parti di rapporto $3 : 2$ (cioè tale che $PA : PB = 3 : 2$).
3. Trovare il vettore che identifica il punto P sul segmento AB che divide AB in due parti di rapporto $t : (1-t)$ con $t \in [0,1]$ qualunque; dedurne che i punti del segmento AB sono tutti e soli quelli nella forma $\vec{P} = t\vec{A} + (1-t)\vec{B} \quad t \in [0,1]$; più in generale i punti della retta per A e B sono quelli nella forma $\vec{P} = t\vec{A} + (1-t)\vec{B} \quad t \in \mathbb{R}$. E se volessi il punto Q sul segmento AB che divide AB in due parti di rapporto $k_1 : k_2$? (Hint : $\frac{k_1}{k_1+k_2} = 1 - \frac{k_2}{k_1+k_2}$)
4. Trovare il vettore che identifica il baricentro sia usando le coordinate sia usando la proprietà delle mediane.
5. Detti a, b, c le misure dei lati BC, CA, AB, dimostrare che il piede della bisettrice uscente da A è $\frac{b\vec{B}+c\vec{C}}{b+c}$. Bonus question: dimostrare che l'incentro è $\frac{a\vec{A}+b\vec{B}+c\vec{C}}{a+b+c}$
6. (Preso dalla lezione) $ABCD$ parallelogramma, E, F sui prolungamenti di AB, AD tali che $BE = AB, DF = AD$. Allora D, C, F sono allineati.
7. Sia $ABCD$ un quadrilatero e siano E, F, G, H i punti medi dei lati AB, BC, CD, DA. Dimostrare che EG e FH si incontrano lungo il segmento che congiunge i punti medi di AC e BD.
8. Data Γ una circonferenza e AB una sua corda, si trovi il luogo dell'ortocentro del triangolo ABP (quando non è degenere) con P che varia in Γ. (Hint: dimostrare che, se indico con O, G e H rispettivamente il circocentro, il baricentro e l'ortocentro di un triangolo, allora vale $\vec{G} = \frac{\vec{H}+2\vec{O}}{3}$)

Omotetie

9. Siano s_1, s_2 rette incidenti in P e siano $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ circonferenze tangenti ad entrambe le rette e tali che Γ_2 è tangente alle altre 2. Dimostrare che:
   (i) i centri O_1, O_2, O_3 delle tre circonferenze sono allineati, e sono allineati anche con P;
   (ii) detti r_1, r_2, r_3 i raggi delle tre circonferenze, vale $r_1 r_3 = r_2^2$

10. Siano Γ_1, Γ_2 circonferenze, con Γ_1 tangente internamente a Γ_2 in A. Sia poi BC una corda di Γ_2 tangente a Γ_1 in P e sia M punto medio dell'arco BC che non contiene A. Dimostrare che A, P, M sono allineati.

11. Sia ABC un triangolo, Γ la sua circonferenza inscritta, Γ_1 la circonferenza tangente al lato BC e ai prolungamenti dei lati AB e AC (detta circonferenza ex-inscitta relativa al vertice A). Siano poi T il punto di tangenza tra Γ_1 e BC, S il punto di tangenza tra Γ e BC, $S_1 \in \Gamma$ diametralmente opposto a S, $T_1 \in \Gamma_1$ diametralmente opposto a T. Dimostrare che:

    - A, S_1 e T sono allineati;
    - A, S, T_1 sono allineati;
    - Detto M il punto medio dell'altezza relativa ad A e I l'incentro di ABC, M, I, T sono allineati;
    - Detto K il piede della bisettrice uscente da A, S_1, K, e T_1 sono allineati.

Angoli

12. (Il ritorno del teorema di Simson): Sia ABC un triangolo, P un punto tale che le sue proiezioni sulle rette dei lati siano allineate. Dimostrare che allora P sta sulla circonferenza circoscritta ad ABC.

13. Sia $ABCD$ un quadrilatero ciclico (cioè inscritto in una circonferenza), $P = AC \cap BD$, O il circocentro di APB e H l'ortocentro di PCD. Dimostrare che i punti O, P, H sono allineati.

14. Sia $ABCD$ un quadrato inscritto in una circonferenza Γ. Sia P un punto nell'arco minore AB. Si chiamino $E = CP \cap AB$ e $G = CA \cap PD$. Si dimostri che:

    - $\widehat{APD} = \widehat{BPC} = \widehat{CPD}$;
    - $GEPA$ è ciclico;
    - $GE \perp AC$