Divisione Armonica*

Ercole Suppa
Liceo Scientifico A. Einstein, Teramo
e-mail: ercolesuppa@gmail.com

Cetraro, 17-20 ottobre 2010

Sommario

In questa nota viene presentata la divisione armonica e la sua applicazione in alcuni problemi di geometria elementare.

1 Divisione armonica

1.1 Segmenti orientati

Sia d una retta orientata e siano $A, B \in d$. Si definisce *segmento orientato*, e si indica con AB, il segmento che congiunge i punti A e B, orientato da A a B. La *misura algebrica* (o *lunghezza con segno*) di un segmento orientato AB è la lunghezza del segmento stesso presa con il segno $+$ o con il segno $-$ a seconda che il verso del segmento sia concorde o discorde con il verso positivo della retta.

In molti testi di geometria viene usato il simbolo $\overline{AB}$ per indicare la misura algebrica del segmento orientato AB. Noi invece, per semplicità, indicheremo con AB sia il *segmento* di vertici A e B, sia la *distanza* da A a B, sia la *misura algebrica* del segmento AB. Sarà chiaro dal contesto il significato da attribuire ad AB.

Se A, B, C, D sono quattro punti allineati valgono le seguenti proprietà:

- $AB + BA = 0$
- $AB + BC + CA = 0$ (*relazione di Chasles*)
- $AB \cdot CD + AC \cdot DB + AD \cdot BC = 0$ (*relazione di Eulero*)

1.2 Rapporto semplice e birapporto

Si definisce *rapporto semplice* di tre punti allineati A, B, C la quantità:

$$(A, B, C) = \frac{AC}{BC}$$

dove AC e BC indicano le misure algebriche dei segmenti orientati.

*Alla memoria del caro amico ed impareggiabile maestro Italo D'Ignazio.

Questo rapporto dipende unicamente dal modo in cui si susseguono le lettere nel simbolo (A, B, C) e gode delle seguenti proprietà:

- (A, B, C) non dipende dall'orientazione della retta d, in quanto cambiando orientazione alla retta cambiano il segno di entrambi i segmenti AC e BC e quindi il loro rapporto resta invariato;
- $(A, B, C) < 0$ se e solo se C è interno al segmento AB;
- $(A, B, C) > 0$ se e solo se C è esterno al segmento AB;
- $(A, B, C) = -1$ se e solo se C è il punto medio di AB;
- $(A, B, C) = 0$ se e solo se $C = A$;
- $(A, B, C) = \infty$ se e solo se $C = B$;
- $(A, B, C) = 1$ se e solo se $C = d_\infty$ (=punto improprio della retta d).

Si definisce *birapporto* di quattro punti A, B, C, D, appartenenti a una retta orientata d, la quantità:

$$(A, B, C, D) = \frac{(A, B, C)}{(A, B, D)} = \frac{AC \cdot BD}{AD \cdot BC}$$

dove AC, AD, BC, BD denotano le lunghezze con segno.

La scelta iniziale dell'orientazione della retta è solo uno strumento ausiliario: il birapporto è in realtà indipendente da questa scelta. Infatti cambiando orientazione alla retta cambiano di segno tutti e quattro i numeri AC, AD, BC, BD e quindi il risultato della frazione resta invariato.

Il birapporto $(A, B, C, D) = k$ dipende dall'ordine dei 4 punti, ci sono quindi $4! = 24$ possibilità. Se vengono scambiati i primi due punti o gli ultimi due punti il birapporto diventa $1/k$ mentre, se vengono scambiati i due punti centrali o i due punti estremi, diventa $1-k$. Tramite questi scambi è possibile ottenere qualsiasi trasposizione e quindi qualsiasi permutazione dei 4 punti. Si ottengono le uguaglianze seguenti:

$$\begin{aligned}
(A, B, C, D) &= (B, A, D, C) = (C, D, A, B) = (D, C, B, A) = k, \\
(A, B, D, C) &= (C, D, B, A) = (B, A, C, D) = (D, C, A, B) = \frac{1}{k}, \\
(A, C, B, D) &= (D, B, C, A) = (C, A, D, B) = (B, D, A, C) = 1 - k, \\
(A, D, B, C) &= (C, B, D, A) = (D, A, C, B) = (B, C, A, D) = \frac{k-1}{k}, \\
(A, D, C, B) &= (B, C, D, A) = (D, A, B, C) = (C, B, A, D) = \frac{k}{k-1}, \\
(A, C, D, B) &= (B, D, C, A) = (C, A, D, B) = (D, B, A, C) = \frac{1}{1-k}.
\end{aligned}$$

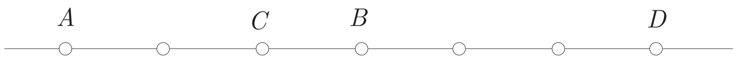
Si può dimostrare che il birapporto di quattro punti allineati non varia se il piano viene sottoposto ad una trasformazione proiettiva. Pertanto il birapporto è un *invariante proiettivo*.

1.3 Divisione armonica di una retta

Se d una retta orientata e A, B, C, D sono quattro punti di d, la quaterna ordinata (A, B, C, D) è detta una *divisione* della retta d. Una divisione (A, B, C, D) è detta *armonica* se

$$\frac{AC}{CB} = -\frac{AD}{DB} \qquad \Longleftrightarrow \qquad AC \cdot BD + AD \cdot BC = 0$$

ossia se C e D dividono il segmento AB, internamente ed esternamente, nello stesso rapporto.



Se (A, B, C, D) è una divisione armonica diciamo che i punti C e D *dividono armonicamente* il segmento AB e scriviamo:

$$(AB; CD) = -1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad (A, B, C, D) = -1$$

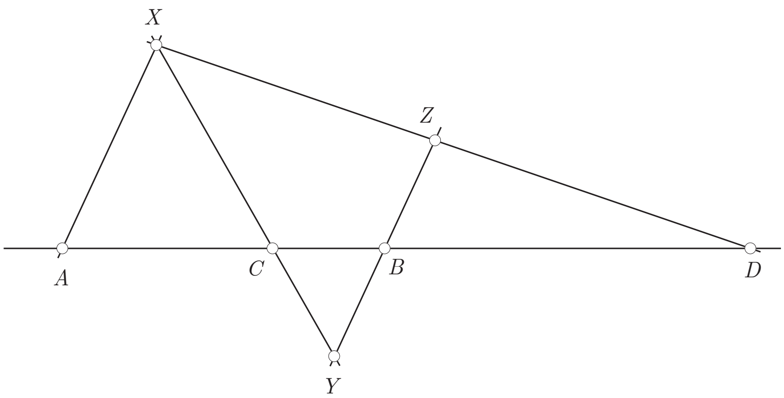
I punti C e D sono detti *coniugati armonici* rispetto ad A e B.

Osservazione 1. Se (A, B, C, D) è una divisione armonica allora i rapporti semplici (A, B, C) e (A, B, D) sono di segno discorde, quindi i punti C, D sono uno interno e l'altro esterno al segmento AB (in tal caso diciamo che le coppie $\{A, B\}$ e $\{C, D\}$ *si separano armonicamente*).

1.4 Costruzione del coniugato armonico

Dati tre punti allineati A, B, C una semplice costruzione del coniugato armonico di C rispetto ad AB e la seguente:

- prendere un punto $X \notin AB$;
- tracciare la retta AX;
- tracciare la retta passante per B parallela ad AX e sia Y la sua intersezione con la retta XC;
- costruire il punto Z simmetrico di Y rispetto a B;
- costruire il punto $D = XZ \cap AB$



Per dimostrare che D è armonico coniugato di C rispetto ad AB basta sfruttare le similitudini $DBZ \sim DAX$, $CYB \sim CXA$ ed osservare che $YB = BZ$.

1.5 Proprietà della divisione armonica

La divisione armonica gode delle proprietà espresse nei seguenti teoremi:

Teorema 1. *C, D dividono armonicamente AB se e solo se A, B dividono armonicamente CD.*

Dimostrazione.

$$(A,B,C,D) = -1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{AC}{CB} = -\frac{AD}{DB} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{CA}{AD} = -\frac{CB}{BD} \quad \Leftrightarrow \quad (C,D,A,B) = -1$$

□

Teorema 2. *Il coniugato armonico rispetto ad AB del punto medio di AB è il punto all'infinito della retta AB.*

Dimostrazione. Se C è il punto medio di AB allora $(A,B,C) = -1$. Ne segue che se D è il coniugato armonico di C rispetto ad AB deve essere $(A,B,D) = 1$, ossia D è il punto all'infinito della retta AB. □

Teorema 3. *Sia (A,B,C,D) una divisione della retta d e siano M, N i punti medi dei segmenti CD, AB rispettivamente. Sono equivalenti le seguenti proprietà:*

($\mathbf{P}_1$) *(A,B,C,D) è una divisione armonica,*

($\mathbf{P}_2$) $\dfrac{2}{AB} = \dfrac{1}{AC} + \dfrac{1}{AD}$

($\mathbf{P}_3$) $MA \cdot MB = MC^2$.

($\mathbf{P}_4$) $CA \cdot CB = CD \cdot CN$

($\mathbf{P}_5$) $AB^2 + CD^2 = 4MN^2$

Dimostrazione. Si fissi sulla retta d un sistema di coordinate con origine in un punto O, si indichino con a, b, c, d, m, n le rispettive ascisse di A, B, C, D, M, N e si noti che $2m = c+d$, $2n = a+b$.

($\mathbf{P}_1 \Leftrightarrow \mathbf{P}_2$) Se scegliamo $O = A$, tenuto conto che $a = 0$, abbiamo:

$$\begin{array}{ll}
(A,B,C,D) = -1 & \Leftrightarrow \\
AC \cdot BD + AD \cdot BC = 0 & \Leftrightarrow \\
(c-a)(d-b) + (d-a)(c-b) = 0 & \Leftrightarrow \\
c(d-b) + d(c-b) = 0 & \Leftrightarrow \\
2cd = bc + bd & \Leftrightarrow \\
\dfrac{2}{b} = \dfrac{1}{c} + \dfrac{1}{d} & \Leftrightarrow \\
\dfrac{2}{AB} = \dfrac{1}{AC} + \dfrac{1}{AD} &
\end{array}$$

($\mathbf{P}_1 \Leftrightarrow \mathbf{P}_3$) Se scegliamo $O = M$, tenuto conto che $d = -c$, abbiamo:

$$\begin{aligned}
&(A, B, C, D) = -1 && \Leftrightarrow \\
&AC \cdot BD + AD \cdot BC = 0 && \Leftrightarrow \\
&(c - a)(d - b) + (d - a)(c - b) = 0 && \Leftrightarrow \\
&(c - a)(-c - b) + (-c - a)(c - b) = 0 && \Leftrightarrow \\
&ab = c^2 && \Leftrightarrow \\
&MA \cdot MB = MC^2 &&
\end{aligned}$$

($\mathbf{P}_1 \Leftrightarrow \mathbf{P}_4$) Se scegliamo $O = C$, tenuto conto che $c = 0$, abbiamo:

$$\begin{aligned}
&(A, B, C, D) = -1 && \Leftrightarrow \\
&AC \cdot BD + AD \cdot BC = 0 && \Leftrightarrow \\
&(c - a)(d - b) + (d - a)(c - b) = 0 && \Leftrightarrow \\
&(-a)(d - b) + (d - a)(-b) = 0 && \Leftrightarrow \\
&- ad + ab - bd + ab = 0 && \Leftrightarrow \\
&ab = d \cdot \frac{a + b}{2} && \Leftrightarrow \\
&ab = d \cdot n && \Leftrightarrow \\
&CA \cdot CB = CD \cdot CN &&
\end{aligned}$$

($\mathbf{P}_1 \Leftrightarrow \mathbf{P}_5$)

$$\begin{aligned}
&(A, B, C, D) = -1 && \Leftrightarrow \\
&AC \cdot BD + AD \cdot BC = 0 && \Leftrightarrow \\
&(c - a)(d - b) + (d - a)(c - b) = 0 && \Leftrightarrow \\
&(a + b)(c + d) = 2(ab + cd) && \Leftrightarrow \\
&(b - a)^2 + (d - c)^2 = [(a + b) - (c + d)]^2 && \Leftrightarrow \\
&AB^2 + CD^2 = 4MN^2 &&
\end{aligned}$$

$\square$

Osservazione 2. Il termine *armonico* deriva dalla proprietà $\mathbf{P}_2$: essa indica infatti che AB è la media armonica di AC e AD.

Osservazione 3. Le uguaglianze espresse nelle relazioni $\mathbf{P}_2$, $\mathbf{P}_3$, $\mathbf{P}_4$ sono chiamate rispettivamente *relazione di Cartesio*, *relazione di Newton* e *relazione di MacLaurin*.

Osservazione 4. Dato che $(AB; CD) = (CD; AB)$ le proprietà P_2, P_3, P_4 possono essere scritte anche nella forma:

$$(P_2) : \frac{2}{CD} = \frac{1}{CA} + \frac{1}{CB} \quad , \quad (P_3) : NA^2 = NC \cdot ND \quad , \quad (P_4) : AC \cdot AD = AB \cdot AM$$

Teorema 4. *Sia (A, B, C, D) una divisione della retta d, sia $C \in AB$ e sia $P \notin d$. Allora se due delle seguenti proposizioni sono vere, anche la terza è vera.*

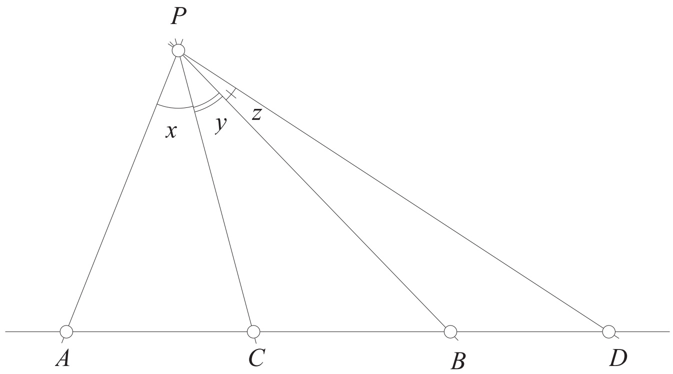
(1) *la divisione (A, B, C, D) è armonica;*

(2) *$PC \perp PD$;*

(3) *$\angle APC = \angle CPB$.*

Dimostrazione.

- Supponiamo che le proposizioni (1) e (2) siano vere e poniamo $x = \angle APC$, $y = \angle CPB$, $z = \angle BPD$, come indicato in figura



Poichè (A, B, C, D) è una divisione armonica allora, tenendo conto del teorema dei seni e delle formule di prostaferesi e di Werner[1], abbiamo:

$$
\begin{aligned}
&\frac{AC}{CB} = \frac{AD}{BD} \quad \Rightarrow \\
&\frac{PA}{PB} \cdot \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} y} = \frac{PA}{PB} \cdot \frac{\operatorname{sen}(x+y+z)}{\operatorname{sen} z} \quad \Rightarrow \\
&\operatorname{sen} x \operatorname{sen} z = \operatorname{sen}(x+y+z) \operatorname{sen} y \quad \Rightarrow \\
&\cos(x-z) - \cos(x+z) = \cos(x+z) - \cos(x+2y+z) \\
&\cos(x-z) + \cos(x+2y+z) = 2\cos(x+z) \quad \Rightarrow \\
&\cos(x+y) \cdot \cos(y+z) = \cos(x+z) \qquad (*)
\end{aligned}
$$

Dato che $PC \perp PD$ abbiamo $y + z = 90°$ e allora, tenuto conto di (*) abbiamo

$$\cos(x+z) = 0 \quad \Rightarrow \quad x + z = 90° \quad \Rightarrow \quad x = y \quad \Rightarrow \quad \angle APC = \angle CPB$$

- Supponiamo che (1) e (3) sono vere. Allora PC è la bisettrice interna di $\angle APB$. Se D' è la traccia della bisettrice esterna di $\angle APB$ sul lato BCè facile[2] dimostrare che (A, B, C, D') è una divisione armonica. Pertanto $(AB; CD') = (AB; CD) = -1$ e, dall'unicità dal coniugato armonico segue che $D = D'$. Allora $PD = PD'$ e quindi $PC \perp PD$, poichè le bisettrici di un angolo sono perpendicolari.

- Se (2) e (3) sono vere PC e PD sono le bisettrici (interna ed esterna) dell'angolo $\angle APB$. Usando i teoremi delle bisettrici, si dimostra facilmente che $(A, B, C, D) = -1$.

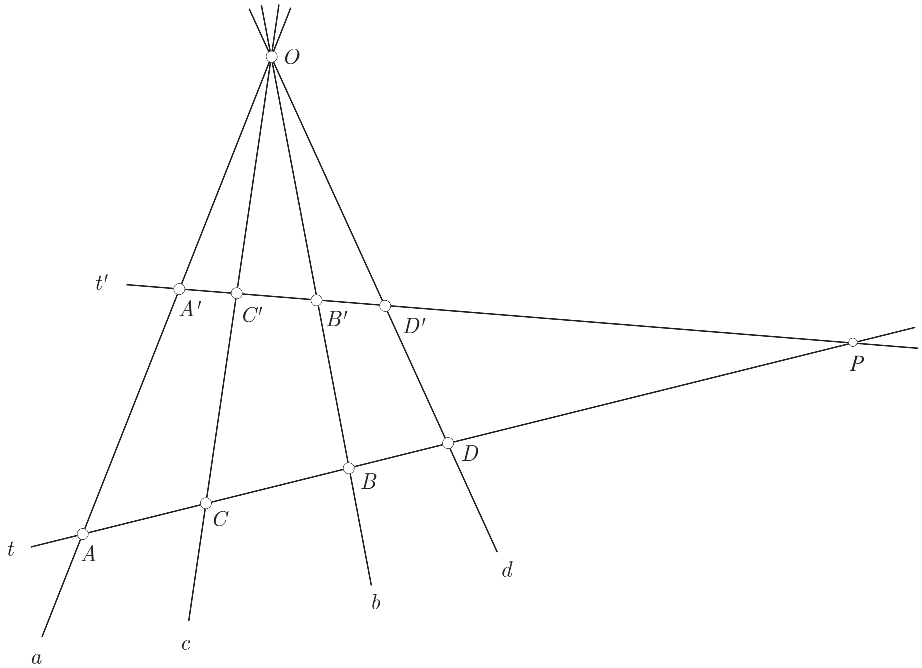
[1]Formule di *Werner*: $\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y = \frac{1}{2}[\cos(x-y) - \cos(x+y)]$
[2]Vedere Esempio 1 a pag.10

1.6 Fasci armonici

Definizione. *Si chiama **fascio armonico** un insieme di quattro rette condotte da un punto O ai quattro punti di una divisione armonica (A, B, C, D). Il punto O si chiama **centro** e le rette $a = OA$, $b = OB$, $c = OC$, $d = OD$ si chiamano **raggi**. Il fascio si indica con $O(a, b, c, d)$ oppure con $O(A, B, C, D)$.*

Teorema 5. (**Teorema fondamentale dei fasci armonici**) *Un fascio armonico determina una divisione armonica su qualunque retta secante i quattro raggi del fascio.*

Dimostrazione. Sia $O(A, B, C, D)$ il fascio armonico, sia $t = AB$, sia t' una trasversale e siano $A' = OA \cap t'$, $B' = OB \cap t'$, $C' = OC \cap t'$, $D' = OD \cap t'$.



Se t e t' sono parallele, usando la similitudine, si dimostra facilmente che

$$(A', B', C', D') = -1$$

Supponiamo, pertanto, che t e t' siano incidenti ed indichiamo con P il loro punto di intersezione. Dal teorema di Menelao applicato al triangolo APA', relativamente alle trasversali CC' e DD' abbiamo:

$$\frac{AC}{CP} \cdot \frac{PC'}{C'A'} \cdot \frac{A'O}{OA} = -1 \qquad , \qquad \frac{A'D'}{D'P} \cdot \frac{PD}{DA} \cdot \frac{AO}{OA'} = -1 \tag{1}$$

Dal teorema di Menelao applicato al triangolo BPB', relativamente alle trasversali CC' e DD' abbiamo:

$$\frac{B'C'}{C'P} \cdot \frac{PC}{CB} \cdot \frac{BO}{OB'} = -1 \qquad , \qquad \frac{BD}{DP} \cdot \frac{PD'}{D'B'} \cdot \frac{B'O}{OB} = -1 \tag{2}$$

Moltiplicando (1) e (2) abbiamo:

$$\frac{AC \cdot A'D' \cdot B'C' \cdot BD}{C'A' \cdot DA \cdot CB \cdot D'B'} = 1$$

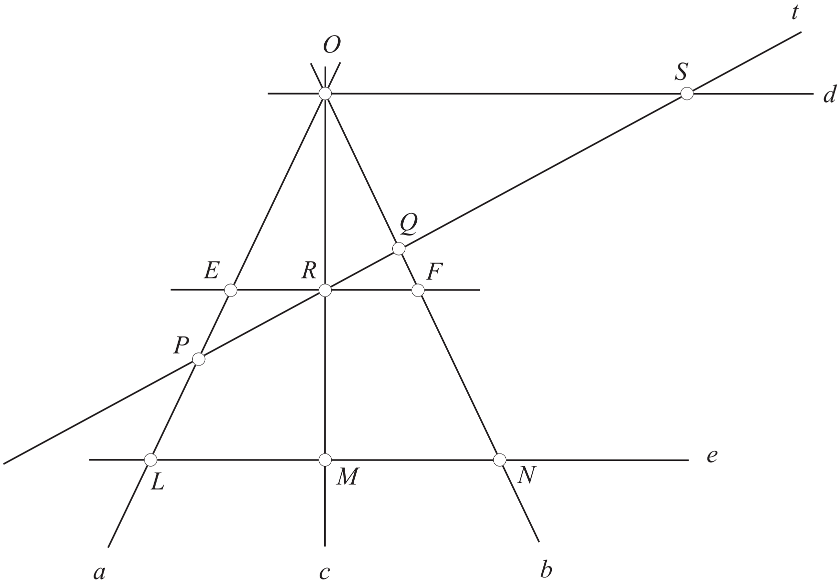
e quindi

$$(A', B', C', D') = \frac{A'C' \cdot B'D'}{A'D' \cdot B'C'} = \frac{AC \cdot BD}{AD \cdot BC} = (A, B, C, D) = -1 \qquad \square$$

Nella risoluzioni di problemi, mediante i fasci armonici, risultano molto utili i due teoremi seguenti:

Teorema 6. *Se un fascio di quattro rette concorrenti è tagliato da una parallela ad una di esse che forma due segmenti uguali con le altre tre rette del fascio, allora il fascio è armonico.*

Dimostrazione. Sia $O(a, b, c, d)$ il fascio e sia e una retta parallela a d che interseca le rette a, b, c nei punti L, M, N tali che $LM = MN$.



Dobbiamo dimostrare che una generica trasversale $t = PRQS$ è divisa armonicamente dal fascio. Per questo si tracci per il punto R una retta EF parallela a d ed osserviamo che $ER = RF$ (dato che $LM = MN$). Dalle similitudini dei triangoli $ERP \sim OSP$ e $RQF \sim SQO$ abbiamo:

$$\frac{ER}{OS} = \frac{PR}{PS} \quad , \quad \frac{RF}{OS} = \frac{RQ}{QS} \tag{1}$$

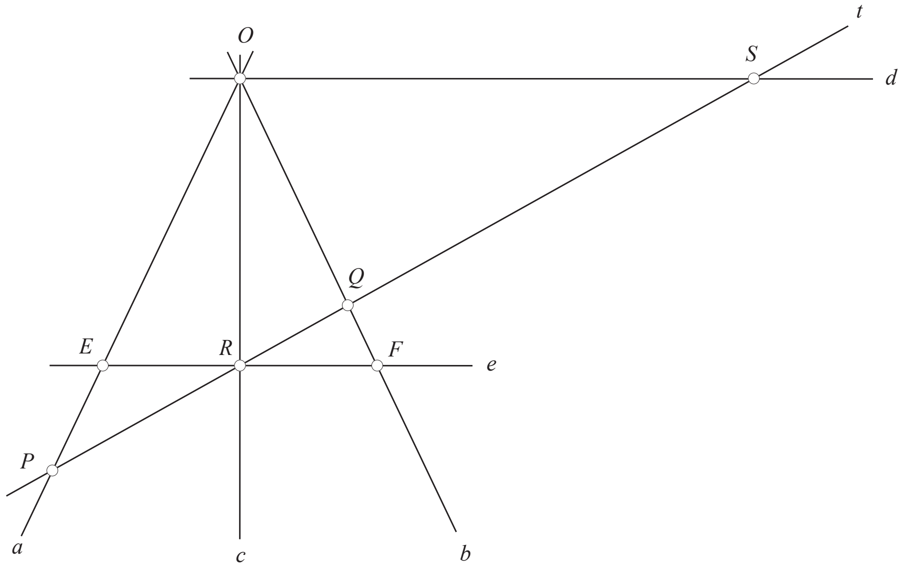
Dalla (1), tenuto conto che $ER = RF$, segue che

$$\frac{PR}{PS} = \frac{RQ}{QS} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{PR}{RQ} = -\frac{PS}{SQ}$$

e questo dimostra che la divisione (P, Q, R, S) è armonica. $\square$

Teorema 7. *Se un fascio armonico è tagliato da una trasversale parallela ad una delle rette del fascio, le altre tre rette determinano sulla trasversale due segmenti conguenti.*

Dimostrazione. Sia $O(a, b, c, d)$ il fascio e sia e una trasversale parallela a d che interseca le rette a, b, c nei punti E, F, R rispettivamente. Dobbiamo dimostrare che $ER = RF$.



Per il punto R tracciamo una trasversale t che incontra le rette del fascio nei punti P, Q, R, S. Dalle similitudini dei triangoli $ERP \sim OSP$ e $RQF \sim SQO$ abbiamo:

$$\frac{ER}{OS} = \frac{PR}{PS} \quad , \quad \frac{RF}{OS} = \frac{RQ}{QS} \tag{1}$$

Siccome il fascio $O(a, b, c, d)$ è armonico, la divisione (P, Q, R, S) è armonica, quindi

$$\frac{PR}{RQ} = -\frac{PS}{SQ} \quad \Rightarrow \quad \frac{PR}{RQ} = \frac{PS}{QS} \quad \Rightarrow \quad \frac{PR}{PS} = \frac{RQ}{QS} \tag{2}$$

Dalla (1) e la (2) discende che

$$\frac{ER}{OS} = \frac{RF}{OS} \quad \Rightarrow \quad ER = RF$$

□

Teorema 8. *Se un fascio armonico è tagliato da una trasversale che determina con tre rette del fascio due segmenti congruenti allora tale trasversale è parallela alla quarta retta del fascio.*

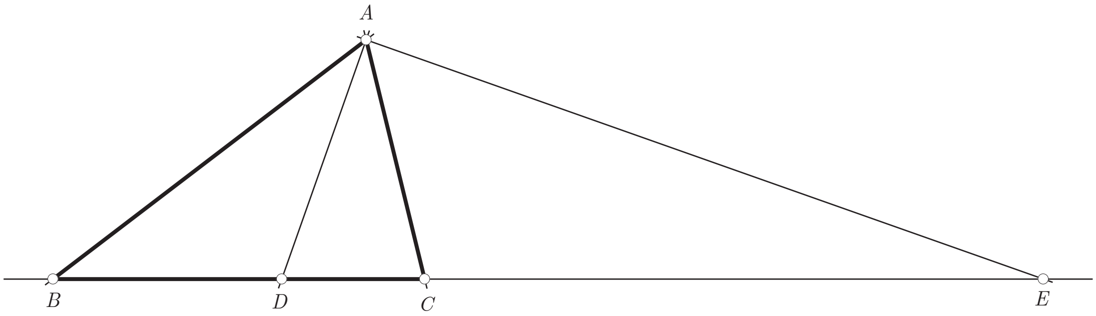
Dimostrazione. E' lasciata per esercizio al lettore[3]. □

Osservazione 5. Utilizzando i teoremi 5, 6 e 7 si può dimostrare il Teorema 4 in maniera più semplice. I dettagli della dimostrazione sono lasciati per esercizio.

[3]Utilizzare il Teorema 6 e l'unicità del quarto armonico.

1.7 Divisioni armoniche notevoli.

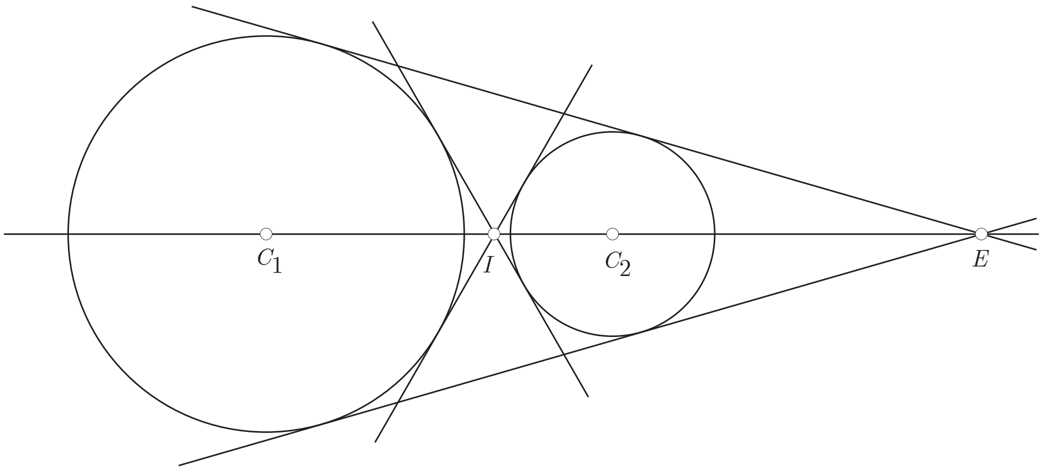
Esempio 1. (**Bisettrici di un triangolo**) *Sia ABC un triangolo (con $AB \neq AC$) e siano D, E le tracce delle bisettrici interna ed esterna dell'angolo A sul lato BC. La quaterna (B, C, D, E) è una divisione armonica della retta BC.*



Dimostrazione. Dal teorema della bisettrice interna (ed esterna) abbiamo:

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{BE}{CE} = -\frac{BE}{EC} \quad \Leftrightarrow \quad (B, C, D, E) = -1 \qquad \square$$

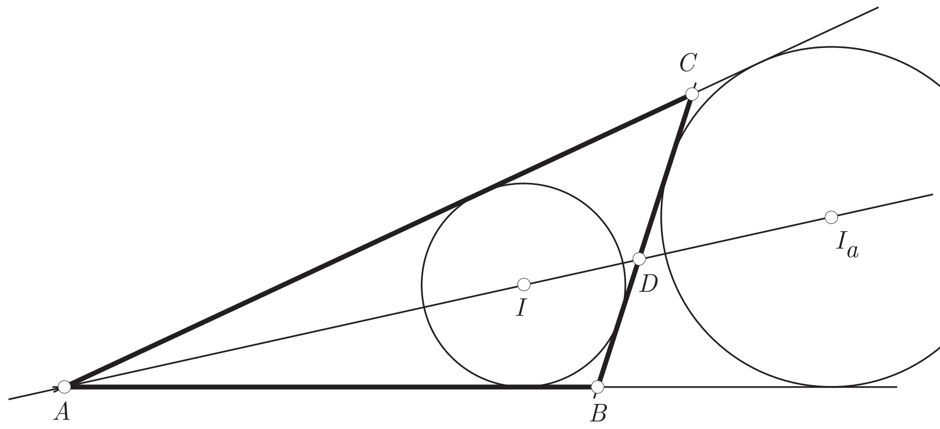
Esempio 2. (**Centri di omotetia**) *Consideriamo due cerchi $\mathcal{C}_i = \mathcal{C}(C_i, r_i)$, $(i = 1, 2)$, con $r_1 \neq r_2$ ed indichiamo con I, E i centri di omotetia interno ed esterno, rispettivamente. La quaterna (C_1, C_2, I, E) è una divisione armonica della retta C_1C_2.*



Dimostrazione. Poichè I ed E sono i centri di omotetia, è evidente che

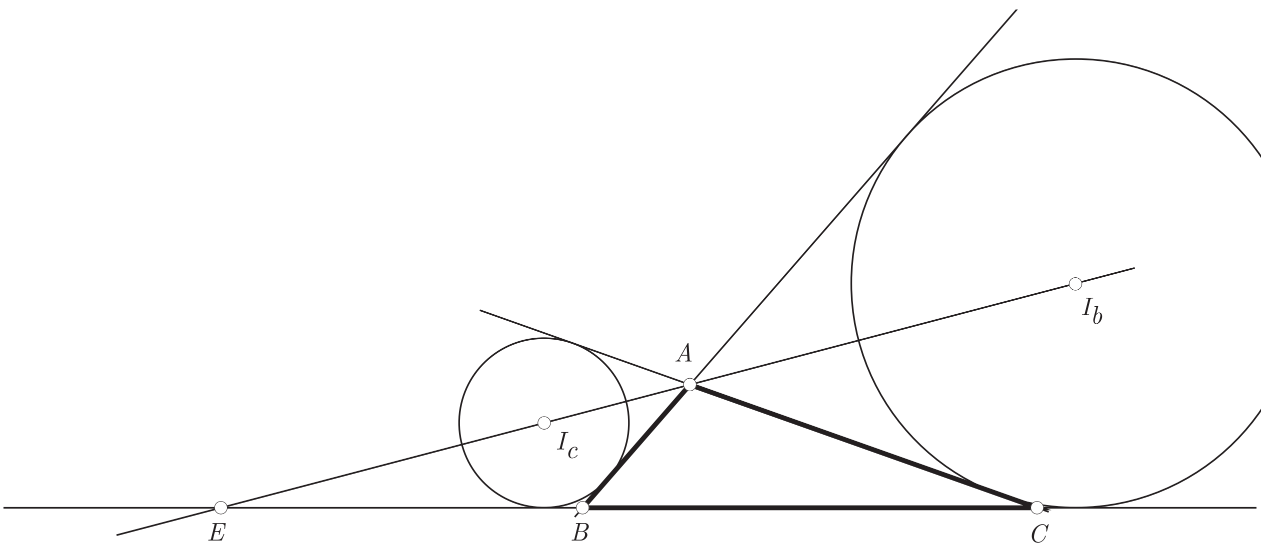
$$\frac{C_1I}{IC_2} = \frac{r_1}{r_2} = -\frac{C_1E}{EC_2} \quad \Leftrightarrow \quad (C_1, C_2, I, E) = -1 \qquad \square$$

Esempio 3. (**Incentro ed A-excentro**) *Sia ABC un triangolo, siano I e I_a l'incentro e l'excentro relativo al vertice A, sia $D = AI \cap BC$. La quaterna (A, D, I, I_a) è una divisione armonica della retta AI.*



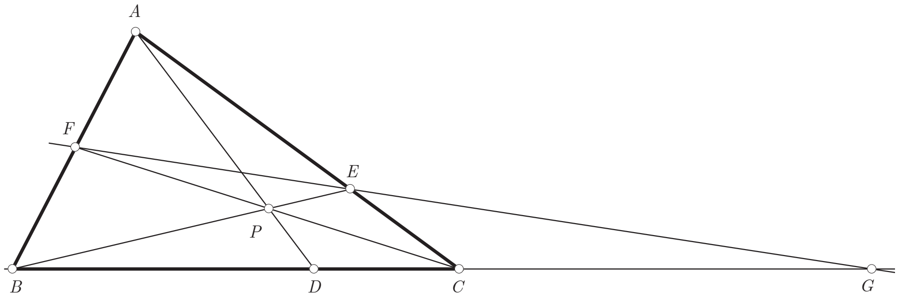
Dimostrazione. Poichè A e D sono rispettivamente i centri di similitudine esterno ed interno tra (I) ed (I_a), la tesi discende dall'Esempio 2 (**Centri di omotetia**). □

Esempio 4. (**Excentri**) *Sia ABC un triangolo, siano I_b e I_c gli excentri relativi ai vertici B, C e sia $E = I_bI_c \cap BC$. La quaterna (E, A, I_c, I_b) è una divisione armonica della retta I_bI_c.*



Dimostrazione. Poichè E ed A sono rispettivamente i centri di similitudine esterno ed interno tra (I_c) e (I_b), la tesi discende dall'Esempio 2 (**Centri di omotetia**). □

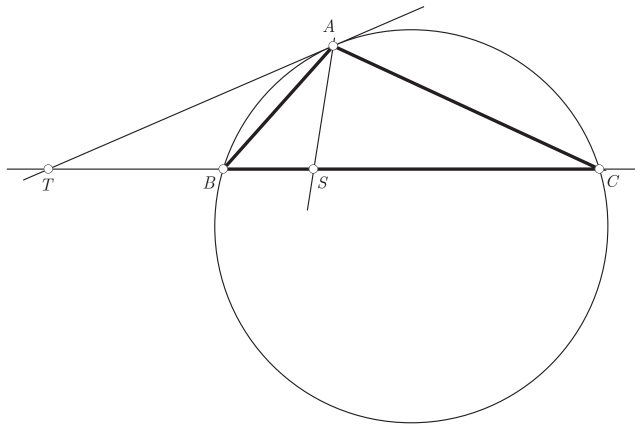
Esempio 5. (**Ceviane**) *Sia ABC un triangolo e sia P un punto non appertenente ai lati AB, BC, CA. Siano $D = AP \cap BC$, $E = BP \cap CA$, $F = CP \cap AB$, $G = BC \cap YZ$. La quaterna (B, C, D, G) è una divisione armonica della retta BC.*



Dimostrazione. Applicando i teoremi di Ceva e Menelao abbiamo

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1 \quad , \quad \frac{AF}{FB} \cdot \frac{BG}{GC} \cdot \frac{CE}{EA} = -1 \quad \Rightarrow \quad \frac{BD}{DC} = -\frac{BG}{GC}$$

Esempio 6. (**Simmediana**) *Sia ABC un triangolo, sia γ la sua circonferenza circonscritta, sia S l'intersezione della simmediana uscente da A con BC e sia T intersezione della tangente a γ nel punto A con la retta BC. La quaterna (T, S, B, C) è una divisione armonica della retta BC.*



Dimostrazione. Dal teorema dei seni si ricava facilmente[4] che

$$\frac{TB}{TC} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{\operatorname{sen} \angle TAB}{\operatorname{sen} \angle TAC} = \frac{c}{b} \cdot \frac{\operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} B} = \frac{c^2}{b^2} \tag{1}$$

e, d'altra parte è noto[5] che la simmediana soddisfa la relazione

$$\frac{BS}{SC} = \frac{c^2}{b^2} \tag{2}$$

Dalla (1) e la (2) abbiamo

$$\frac{TB}{TC} = \frac{BS}{SC} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{TB}{BS} = -\frac{TC}{CS} \quad \Leftrightarrow \quad (T, S, B, C) = -1 \qquad \square$$

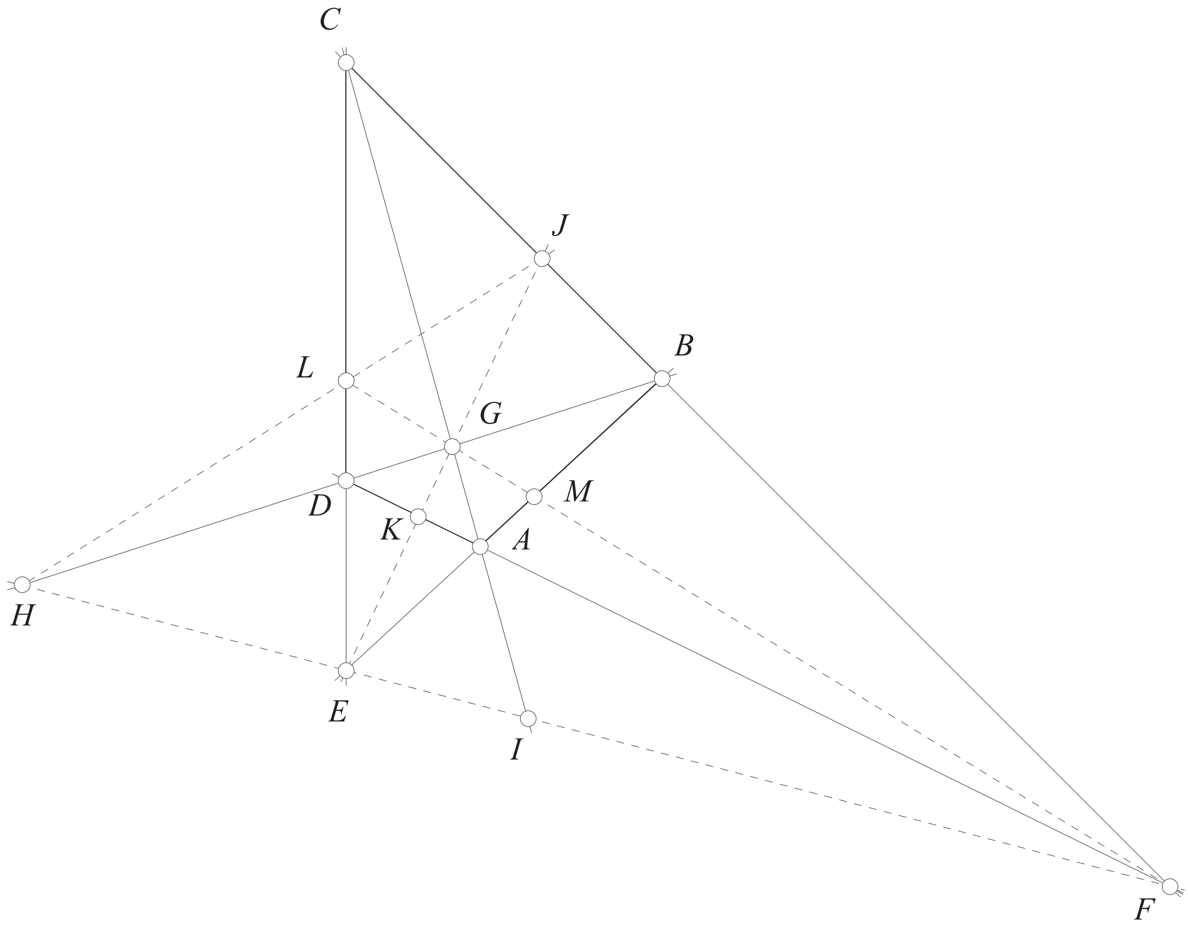
[4]Vedi Appendice, Teorema 10.
[5]Vedi Appendice, Teorema di Steiner.

Esempio 7. (**Quadrangolo completo**) *La configurazione formata da 4 punti A, B, C, D, a tre a tre non allineati, e dalle sei rette da essi determinate è detta* ***quadrangolo completo****. I punti A, B, C, D sono chiamati* ***vertici*** *del quadrangolo. Le sei rette determinate dalle coppie di punti sono chiamate* ***lati****. I punti E, F, G di intersezione dei lati, diversi dai quattro vertici, sono chiamati* ***punti diagonali*** *del quadrilatero completo. Il triangolo EFG è chiamato* ***triangolo diagonale****. In un quadrangolo completo vi sono varie divisioni armoniche, che si possono dimostrare usando la proprietà illustrata nell'Esempio 5 precedente.*

- *I lati del triangolo diagonale sono divisi armonicamente dai lati del quadrangolo. Ad esempio nella figura sotto i punti L, M sono armonici coniugati rispetto a GF (infatti, proiettando da E la retta CF sopra LF abbiamo $(L, M, G, F) = (C, B, J, F) = -1$).*

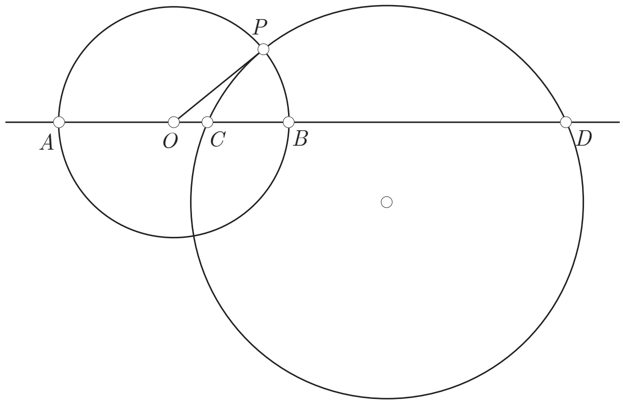
- *I lati del quadrangolo completo sono divisi armonicamente dai lati del triangolo diagonale. Ad esempio i punti G, I sono armonici coniugati rispetto a CA (infatti, proiettando da F la retta CE sopra CI abbiamo $(C, A, G, I) = (C, D, L, E) = -1$).*

- *I punti di intersezione dei lati del quadrangolo e i lati del triangolo diagonale sono a tre a tre allineati. Per esempio H, L, J sono allineati*[6] *(per dimostrarlo usare le definizione di divisione armonica ed i teoremi di Ceva e Menelao).*



[6] La retta contenente H, L, J è detta *polare trilineare* del punto A rispetto al triangolo EFG.

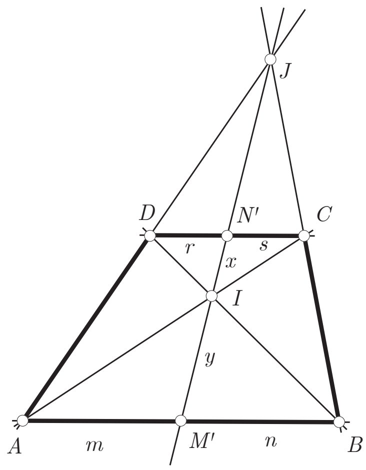
Esempio 8. (**Cerchi ortogonali**) *Se due cerchi ortogonali sono tagliati da una retta passante per il centro di uno di essi, i quattro punti di intersezione formano una divisione armonica.*



Dimostrazione. Sia O il centro di una delle due circonferenze, sia P uno dei loro punti di intersezione e supponiamo che una retta d passante per O le intersechi nei punti A, B e C, D, rispettivamente. Per il teorema della tangente e della secante abbiamo $OA^2 = OP^2 = OC \cdot OD$. Dato che i punti A, B, C, D soddisfano la *relazione di Newton*, per il Teorema 3, $(A, B, C, D) = -1$. $\square$

Esempio 9. (**Trapezio**) *Sia $ABCD$ un trapezio, siano M e N i punti medi di AB e CD, siano $I = AC \cap BD$, $J = AD \cap BC$. La quaterna (M, N, I, J) è una divisione armonica della retta MN.*

Dimostrazione. Dobbiamo dimostrare dapprima che M, N, I, J sono allineati. Siano $M' = IJ \cap AB$, $N' = IJ \cap CD$, $AM' = m$, $M'B = n$, $DN' = r$, $N'C = s$, $IN' = x$, $IM' = y$, come indicato nella seguente figura:



Dalla similitudine dei triangoli $JDN' \sim JAM'$ e $JN'C \sim JM'B$ segue che

$$\frac{m}{r} = \frac{JM'}{JN'} = \frac{n}{s} \quad \Rightarrow \quad \frac{m}{n} = \frac{r}{s} \tag{1}$$

Analogamente dalla similitudine dei triangoli $ICN' \sim IAM'$ e $IDN' \sim IBM'$ segue che

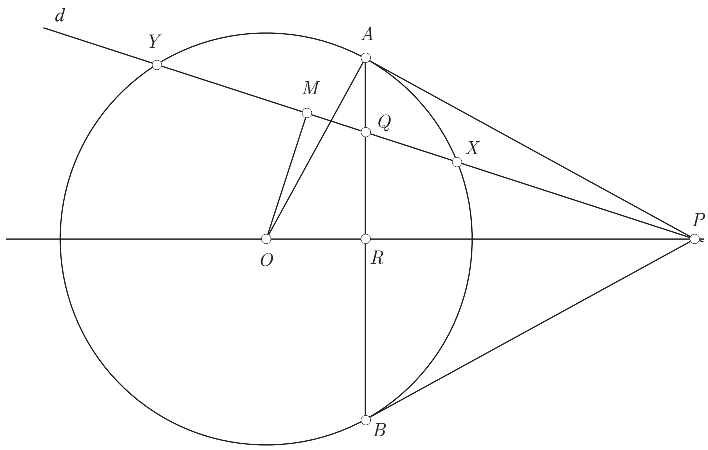
$$\frac{s}{m} = \frac{x}{y} = \frac{r}{n} \quad \Rightarrow \quad \frac{n}{m} = \frac{r}{s} \tag{2}$$

Dalla (1) e la (2) abbiamo che $\frac{m}{n} = \frac{n}{m}$ e quindi $m = n$. Pertanto $M = M'$ ed analogamente si dimostra che $N = N'$. Abbiamo così dimostrato che i punti M, N, I, J sono allineati.

Dalle similitudini $ABI \sim CDI$ e $JDN \sim JAM$ segue che:

$$\frac{MI}{IN} = \frac{AB}{CD} = \frac{JM}{JN} = -\frac{MJ}{JN} \quad \Leftrightarrow \quad (M, N, I, J) = -1 \qquad \square$$

Esempio 10. (**Caratterizzazione della polare**) *Sia AB una corda di un cerchio γ di centro O (con $O \notin AB$). Sia P il punto di intersezione delle tangenti a γ in A e in B. Sia d una retta passante per P che inteseca γ in X, Y (con X più vicino a P) ed AB in Q. La quaterna (P, Q, X, Y) è una divisione armonica della retta d.*



Dimostrazione. Indichiamo con M il punto medio di XY e con R il punto di intersezione tra AB e la retta PO. Per il teorema della secante e della tangente $PX \cdot PY = PA^2$, mentre per il primo teorema di Euclide applicato al triangolo rettangolo OPA abbiamo $PA^2 = PO \cdot PR$. Pertanto:

$$PX \cdot PY = PA^2 = PO \cdot PR \qquad (1)$$

Dalla similitudine tra i triangoli PRQ e PMO segue che:

$$\frac{PR}{PM} = \frac{PQ}{PO} \quad \Rightarrow \quad PO \cdot PR = PQ \cdot PM \qquad (2)$$

Dalla (1) e la (2) discende che $PX \cdot PY = PQ \cdot PM$ e quindi, tenuto conto della *relazione di MacLaurin*[7], la divisione (P, Q, X, Y) è armonica. $\square$

Osservazione 6. La proprietà illustrata nell'esempio precedente è invertibile nel senso che: se P è un punto esterno ad una circonferenza γ e d è una retta passante per P che inteseca γ in X, Y (con X più vicino a P) allora il punto Q, coniugato armonico di P rispetto ad XY appartiene alla polare di P (rispetto a γ). Pertanto: *se A, B sono i punti di contatto delle tangenti a γ uscenti da P, il segmento AB è il luogo dei punti armonici coniugati di P rispetto alla coppia di punti di intersezione della circonferenza γ con una generica retta passante per P.*

[7] Teorema 3, proprietà P_4

2 Problemi.

2.1 Enunciati.

1. Sia $ABCD$ un quadrilatero convesso e siano $I = AC \cap BD$, $J = AD \cap BC$, $P = AB \cap IJ$, $Q = CD \cap IJ$. Dimostrare che
$$\frac{2}{PQ} = \frac{1}{PI} + \frac{1}{PJ}$$

2. Sia ABC un triangolo, sia M il punto medio di BC e siano D, E, F i piedi delle altezze relative ai lati BC, CA, AB. Se H è l'ortocentro di ABC ed $L = EF \cap BC$ dimostrare che $AM \perp LH$.

3. Sia ABC un triangolo e siano P, Q i punti di contatto delle tangenti condotte da A alla circonferenza di diametro BC. Dimostrare che l'ortocentro di ABC appartiene alla retta PQ.

   (**Cina MO 1996**)

4. Due cerchi $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ sono tangenti internamente nel punto P. La retta d è tangente in A al cerchio $\mathcal{C}_1$ e taglia il cerchio $\mathcal{C}_2$ nei punti B, C. Dimostrare che la semiretta PA è una bisettrice dell'angolo formato dalle rette PB e PC.

5. Sia ABC un triangolo, sia $D \in BC$ (con $C \in BD$) tale che $CA = CD$, sia P ($P \neq C$) il punto di intersezione del cerchio di diametro BC e del cerchio (ACD). Dimostrare che i punti D, $E = BP \cap AC$ e $F = CP \cap AB$ sono allineati.

6. Sia γ una semicirconferenza di diametro AB, sia $P \in AB$ (con $A \in PB$). Una retta passante per P interseca γ in X, Y e sia $T \in \gamma$ tale che PT è tangente a γ. Indicata con D la proiezione di T su AB, dimostrare che $\angle TDX = \angle TDY$.

7. Sia ABC un triangolo scaleno e sia $D \in AC$ tale che BD è la bisettrice di $\angle ABC$. Siano E e F i piedi delle perpendicolari tracciate rispettivamente da A e da C sulla retta BD e sia $M \in BC$ tale che $DM \perp BC$. Dimostrare che $\angle EMD = \angle DMF$.

   (**Ibero American MO 2002**)

8. Sia ABC un triangolo, sia D il piede della perpendicolare tracciata da A su BC e sia $L \in AD$. Se $U = BL \cap AC$, $V = CL \cap AB$ dimostrare che $\angle ADU = \angle ADV$.

9. Sia ABC un triangolo isoscele con $CA = CB$, sia M il punto di AB tale che $AM = 2 \cdot MB$, sia L il punto medio di AB, sia F il punto medio di BC e sia H la proiezione ortogonale di M sulla retta AF. Dimostrare che $\angle LHM = \angle MHB$.

10. Siano P, Q due punti di una circonferenza γ e sia R il punto medio di PQ. Una retta passante per R interseca γ in M, N. Le parallele a PQ passanti per M ed N intersecano γ in X e Y rispettivamente. Provare che $F = MY \cap NX$ è un punto fisso.

11. Dati due cerchi disgiunti (O_1) e (O_2), siano A e B i rispettivi punti di contatto con una delle tangenti esterne comuni, sia C il punto di intersezione dell'asse radicale con la congiungente dei centri e sia D il centro di omotetia interno. Dimostare che il quadrilatero $ABCD$ è ciclico.

12. Due circonferenze di centri A e B si intersecano nei punti M ed N. Siano AP e BQ due raggi paralleli situati su semipiani opposti rispetto ad AB. Se un tangente esterna comune interseca AB in D e PQ interseca AB in C, dimostrare che $\angle CND$ è un angolo retto.

13. Sulla diagonale BD del parallelogramma $ABCD$ è scelto un punto M. La retta AM interseca le rette CD e BC nei punti K e N rispettivamente. Sia ω_1 il cerchio di centro M e raggio MA, sia ω_2 il circoncerchio di KNC, siano P e Q i punti di intersezione di ω_1 e ω_2. Dimostrare che MP e MQ sono tangenti a ω_2.

14. Sia P un punto della bisettrice dell'angolo $\angle BAC$ del triangolo ABC. Siano A', B', C' le proiezioni ortogonali di P sui lati BC, CA, AB rispettivamente. Dimostrare che l'intersezione di PA' con $B'C'$ appartiene alla mediana AM, dove M è il punto medio di BC.

(**Spagna NMO 2010**)

15. Sia ABC un triangolo, e scegliamo due punti $E \in AC$, $F \in AB$. Siano $P = BE \cap CF$, $R = EF \cap AP$ e siano X, Y i punti di intersezione della parallela per R alla retta BC con AB, EB rispettivamente. Dimostrare che $RX = RY$.

16. Sia S il punto di intersezione delle tangenti a un cerchio (O) nei punti B, C; sia A il punto diametralmente opposto a B, sia D il piede della perpendicolare condotta da C su AB e sia $M = AS \cap CD$. Dimostrare che $MC = MD$.

17. Sia ABC un triangolo, sia γ una circonferenza passante per B e C; siano B' e C' i secondi punti di intersezione di γ con AC e AB; siano $D = BB' \cap CC'$, $F = AD \cap BC$ e sia M il punto medio di BC. Dimostrare che i punti B', C', F, M sono conciclici.

18. Sia ABC un triangolo acutangolo e siano D, E, F i piedi delle altezze relative ai lati BC, CA, AB. La retta passante per D parallela ad EF interseca le rette AC e AB nei punti Q ed R rispettivamente. La retta EF interseca BC nel punto P. Dimostrare che il circoncerchio del triangolo PQR passa per il punto medio di BC.

19. Sia ABC un triangolo acutangolo e siano D, E, F i piedi delle altezze relative ai lati BC, CA, AB. Sia Z un punto della retta BC tale che $\angle BEZ = \angle BAC$ e sia $X = DF \cap AC$. Dimostrare che ZX interseca CF nel punto medio.

20. Sia $ABCD$ un quadrilatero ciclico. Le rette AB, CD si intersecano in E e le diagonali AC, BD si intersecano in F. I circoncerchi dei triangoli AFD, BFC si intersecano ulteriormente in H. Dimostrare che $FH \perp HE$.

21. Sia ABC un triangolo rettangolo con $\angle BAC = 90°$, sia D un punto di AC, sia E il simmetrico di A rispetto a BD, sia F il punto di intersezione tra CE e la perpendicolare condotta da D alla retta BC. Dimostrare che le rette AF, ED, BC sono concorrenti.

22. Sia $ABCD$ un quadrilatero convesso inscritto in un cerchio γ, sia $E = AB \cap CD$, sia $F \in \gamma$ con $DF \| AB$, sia $G = \gamma \cap EF$, sia $M = AB \cap CG$. Dimostrare che
$$\frac{1}{EM} = \frac{1}{EA} + \frac{1}{EB}$$

23. Siano AA', BB', CC' le altezze di un triangolo ABC e siano $A'' = BC \cap B'C'$, $B'' = AC \cap A'C'$, $C'' = AB \cap A'B'$. Dimostrare che i punti A'', B'', C'' sono allineati.

24. Sia ABC un triangolo rettangolo con $\angle C = 90°$, sia γ il circoncerchio di ABC, sia D il punto di intersezione della tangente a γ nel punto C con la retta AB e sia M il punto medio di CD. Indicato con E il punto di intersezione di MB con l'altezza CN, dimostrare che $AE \parallel CD$.

25. Sia ABC un triangolo rettangolo con $\angle A = 90°$, sia D un punto di BC, sia M il punto medio di AD e sia E il punto di intersezione di CM con l'asse di AB. Dimostrare $AD \parallel BE$.

26. Sia O il punto di intersezione delle diagonali del quadrilatero convesso $ABCD$. I circoncerchi dei triangoli OAD e OBC si intersecano in O ed M. La retta OM interseca i circoncerchi di OAB e OCD in S, T rispettivamente. Dimostrare che $SM = MT$.

27. Da un punto P esterno ad un cerchio (O) tracciamo le tangenti PA, PB. Dal punto A tracciamo una retta parallela a PB che interseca il cerchio in un ulteriore punto Y. Siano $X = PY \cap (O)$, $Q = PY \cap AB$, $C = AX \cap PB$. Dimostrare che $PC = CB$.

28. Sia ABC un triangolo acutangolo, sia M il punto medio di BC, sia H ortocentro di ABC e sia P la proiezione ortogonale di H su AM. Dimostrare che $AM \cdot PM = BM^2$.

(**Giappone NMO 2011**)

29. Il cerchio Γ è inscritto in un triangolo scaleno ABC. Γ è tangente ai lati BC, CA, AB nei punti D, E, F rispettivamente. Sia $G = EF \cap BC$ e sia R il punto di intersezione tra Γ e la circonferenza di diametro GD (con $R \neq D$); siano $P = \Gamma \cap BR$, $Q = \Gamma \cap CR$ (con $P \neq R$, $Q \neq R$), $S = BP \cap CQ$, $T = RS \cap PQ$. Dimostrare che $PT = TQ$.

30. Sia D il punto medio del lato BC del triangolo ABC. Siano E, F le proiezioni di D su AB, AC rispettivamente e sia T il punto di intersezione delle tangenti al cerchio di diametro AD nei punti E, F. Dimostrare che $TB = TC$.

31. Sia $ABCD$ un quadrilatero convesso. Siano $E = AB \cap CD$, $F = BC \cap AD$, $P = AC \cap BD$ e sia O la proiezione ortogonale di P su EF. Dimostrare che $\angle BOC = \angle AOD$.

(**Cina TST 2002**)

32. Sia ABC un triangolo e siano D, E, F i punti di tangenza dell'incerchio con i lati BC, CA, AB rispettivamente. Sia X un punto interno ad ABC tale che l'incerchio del triangolo XBC tocca i lati XB, XC, BC nei punti Z, Y, D rispettivamente. Dimostrare che il quadrilatero $EFZY$ è ciclico.

(**IMO Shortlist 1995**)

33. Sia S un punto esterno ad una cerchio ω di centro O e siano P, Q i punti di contatto delle tangenti condotte da S ad ω. La retta SO interseca ω nei punti A, B con $B \in SA$. Il punto X appartiene al minore dei due archi PB e la retta SO interseca QX, PX nei punti C, D rispettivamente. Dimostrare che
$$\frac{2}{AB} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{AD}$$

(**Turchia NMO 1994**)

34. Siano G, O il baricentro ed il circoncentro di un triangolo ABC con $GO \perp AG$. Sia A' la seconda intersezione di AG con il circoncerchio (O) e siano $D = CA' \cap AB$, $E = BA' \cap AC$. Dimostrare che il circoncerchio di ADE appartiene ad (O).

(**Croazia TST 2011**)

35. Sia I l'incentro di un triangolo ABC; siano D, E, F i punti di contatto dell'incerchio con i lati BC, CA, AB rispettivamente; siano $K = AI \cap EF$, $L = ED \cap KC$, $M = DF \cap KB$. Dimostrare che $LM \parallel EF$.

36. Sia H l'ortocentro di un triangolo acutangolo ABC e siano D, E, F i piedi delle altezze relative ai lati BC, CA, AB; sia $P = AD \cap FE$ e siano Q, R i punti di intersezione dell'asse di PD con i lati AB, AC rispettivamente. Dimostrare che P è l'ortocentro del triangolo AQR.

37. Sia ABC un triangolo con $\angle A = 60°$; siano E, F le tracce delle bisettrici degli angoli $\angle B$, $\angle C$ con i lati AC, AB rispettivamente; sia M la riflessione di A rispetto ad EF. Dimostrare che M appartiene a BC.

38. L'incerchio ω di un triangolo acutangolo ABC è tangente al lato BC in K. Sia D la proiezione ortogonale di A su BC e sia M il punto medio di AD. La retta DM taglia ulteriormente il cerchio ω nel punto N. Dimostrare che il cerchio ω ed il circoncerchio di BCN sono sono tangenti nel punto N.

(**IMO Shortlist 2002**)

39. Sia ω un cerchio di centro O, sia P un punto esterno ad ω e siano A, B i punti di contatto delle tangenti condotte da P ad ω. Indicati rispettivamente con M, N il punto medio di AP e l'ulteriore punto di intersezione tra BM ed ω, dimostrare che $PN = 2 \cdot MN$.

(**Mathematical Reflection 2007, problem S44**)

40. Sia $ABCD$ un quadrilatero ciclico, sia O il suo circoncentro, sia $S = AC \cap BD$, siano t_A, t_B, t_C, t_D le tangenti al circoncerchio (O) nei punti A, B, C, D; siano $E = t_A \cap t_C$, $F = t_B \cap t_D$ e siano M, N i punti medi di AC, BD rispettivamente. Il quadrilatero $ABCD$ si dice *armonico* se soddisfa una delle seguenti proprietà:

    (1) A, C, F sono allineati.

    (2) $AB \cdot CD = AD \cdot BC$.

    (3) $\angle DNA = \angle CND$.

    (4) S è la traccia della simmediana dei triangoli ABC, ADC.

    (5) Se X è un punto del cerchio (O) allora il fascio $X(A, C, B, D)$ è armonico.

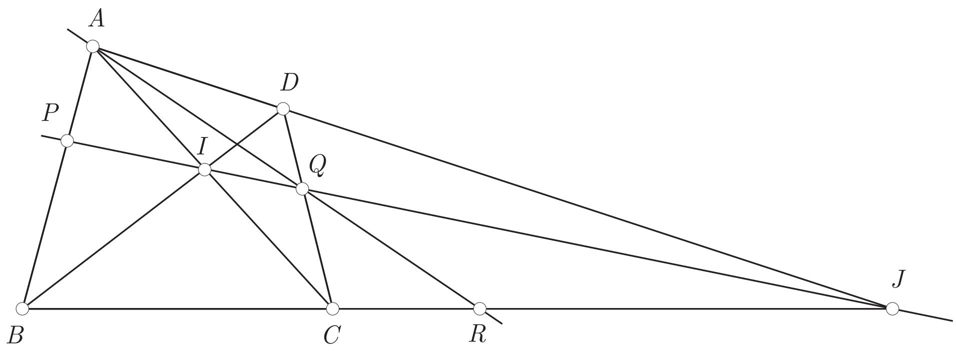
    Dimostrare che le proprietà (1)-(5) sono equivalenti.

2.2 Soluzioni.

Problema 1. *Sia $ABCD$ un quadrilatero convesso e siano $I = AC \cap BD$, $J = AD \cap BC$, $P = AB \cap IJ$, $Q = CD \cap IJ$. Dimostrare che*

$$\frac{2}{PQ} = \frac{1}{PI} + \frac{1}{PJ}$$

Soluzione. Sia $R = AQ \cap BC$.



Considerando il triangolo ACJ, le ceviane AR, CD, JI e la trasversale DI abbiamo che la divisione (B, R, C, J) è armonica[8] e, di conseguenza, il fascio $A(B, R, C, J)$ è armonico. Dal teorema fondamentale sui fasci armonici segue che $A(B, R, C, J)$ determina una divisione armonica (P, Q, I, J) sulla trasversale IJ. Pertanto è verificata la *relazione di Cartesio*[9]:

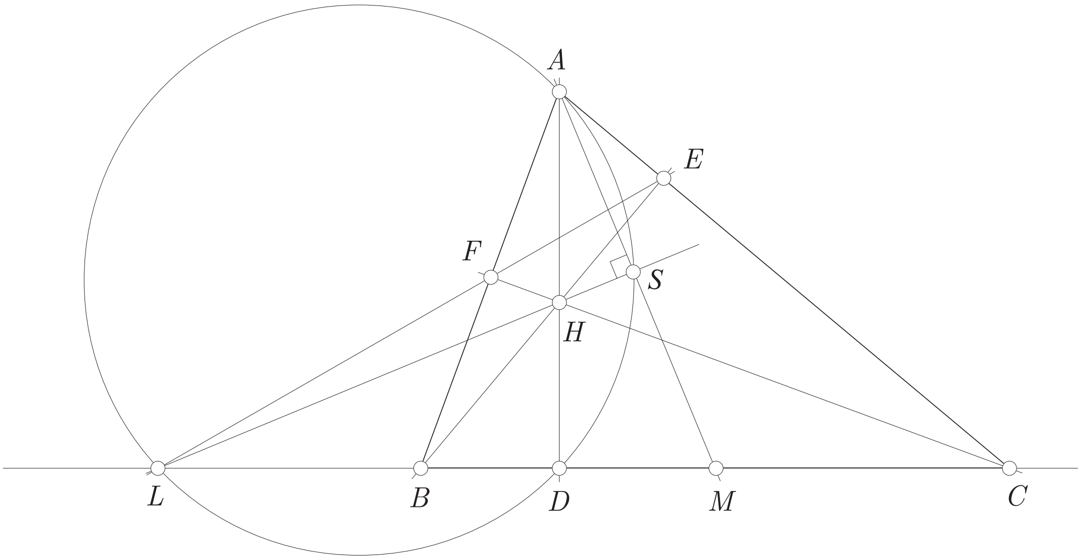
$$\frac{2}{PQ} = \frac{1}{PI} + \frac{1}{PJ}$$

$\square$

[8] Vedi Esempio 5
[9] Teorema 3, proprietà P_2

Problema 2. *Sia ABC un triangolo, sia M il punto medio di BC e siano D, E, F i piedi delle altezze relative ai lati BC, CA, AB. Se H è l'ortocentro di ABC ed $L = EF \cap BC$ dimostrare che $AM \perp LH$.*

Soluzione.



La divisione (L, D, B, C) è armonica (vedi Esempio 5) e quindi, essendo M il punto medio di BC, dalla *relazione di MacLaurin*[10] risulta

$$DM \cdot DL = DB \cdot DC \tag{1}$$

Se D' è il simmetrico di D rispetto a BC è noto[11] che D' appartiene al circoncerchio di ABC, quindi per il teorema delle corde

$$DB \cdot DC = DA \cdot DD' = AD \cdot DH \tag{2}$$

Da (1) e (2) segue che

$$DM \cdot DL = AD \cdot DH \quad \Rightarrow \quad \frac{DM}{DA} = \frac{DH}{LD} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \tan(\angle DAM) = \tan(\angle DLH) \quad \Rightarrow \quad \angle DAM = \angle DLH \tag{3}$$

Posto $S = LH \cap AM$, dalla (3) discende che il quadrilatero $ALDS$ è ciclico. Pertanto:

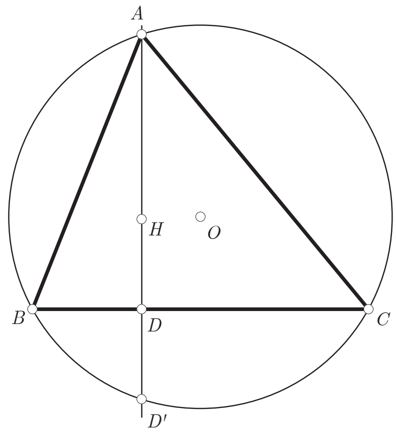
$$\angle ASL = \angle LDA = 90^\circ \quad \Leftrightarrow \quad AM \perp LH \qquad \square$$

[10] Teorema 3, proprietà P_4

[11] Vedi Appendice, Teorema 9

Problema 3. *Sia ABC un triangolo e siano P, Q i punti di contatto delle tangenti condotte da A alla circonferenza di diametro BC. Dimostrare che l'ortocentro di ABC appartiene alla retta PQ.*

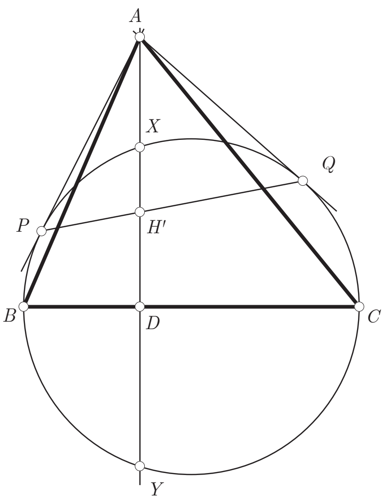
Soluzione. Sia O il circoncentro di ABC, sia D la proiezione ortogonale di A su BC e sia D' il simmetrico di H rispetto a BC.



E' noto[12] che $D' \in (O)$, quindi per il teorema delle corde:

$$BD \cdot DC = AD \cdot DD' = AD \cdot HD = DA \cdot DH \tag{1}$$

Siano X, Y i punti di intersezione di AD con γ (con $X \in AY$).



Dal teorema delle corde abbiamo:

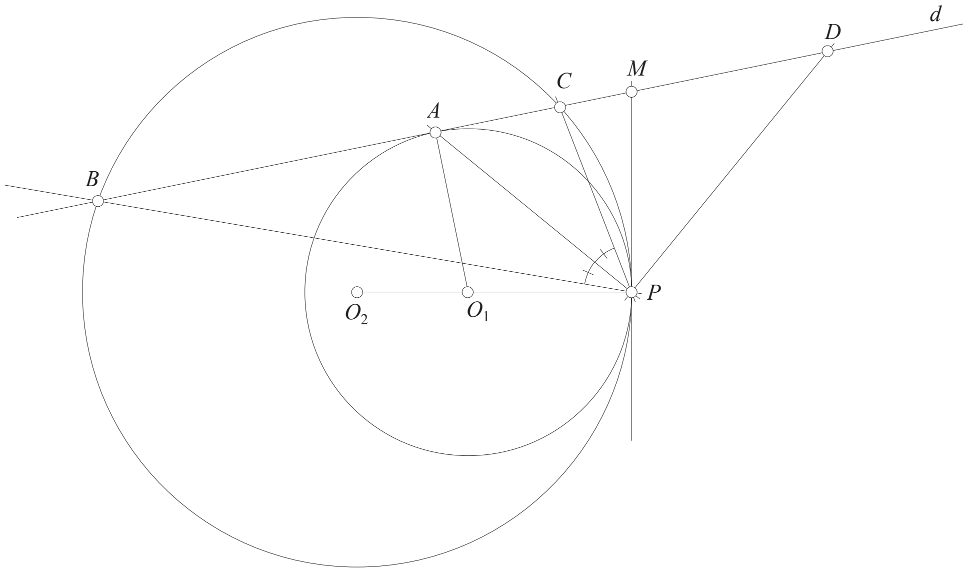
$$BD \cdot DC = XD \cdot DY = DX^2 \tag{2}$$

Dalla (1) e la (2) discende che $DA \cdot DH = DX^2$ e quindi, essendo verificata la *relazione di Newton*, abbiamo che $(A, H, X, Y) = -1$. D'altra parte indicato con H' il punto di intersezione di AD e BC, nell'Esempio 10 abbiamo dimostrato che $(A, H', X, Y) = -1$. Allora, dall'unicità del quarto armonico, segue che $H = H'$ e quindi che $H \in PQ$. □

[12] Vedi Appendice, Teorema 9

Problema 4. *Due cerchi $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ sono tangenti internamente nel punto P. La retta d è tangente in A al cerchio $\mathcal{C}_1$ e taglia il cerchio $\mathcal{C}_2$ nei punti B, C. Dimostrare che la semiretta PA è una bisettrice dell'angolo formato dalle rette PB e PC.*

Soluzione. Supponiamo dapprima che le circonferenze $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ siano tangenti internamente.

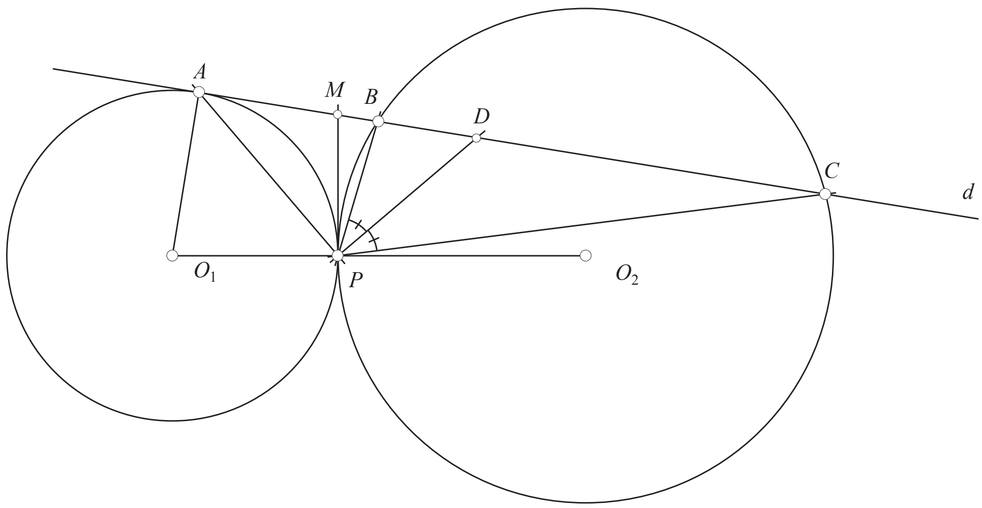


Sia M il punto di intersezione della retta d con la tangente a $\mathcal{C}_1$ nel punto P e sia D il simmetrico di A rispetto ad M. Essendo $MA = MD = MP$, dal teorema delle secanti segue che

$$MA^2 = MP^2 = MB \cdot MC$$

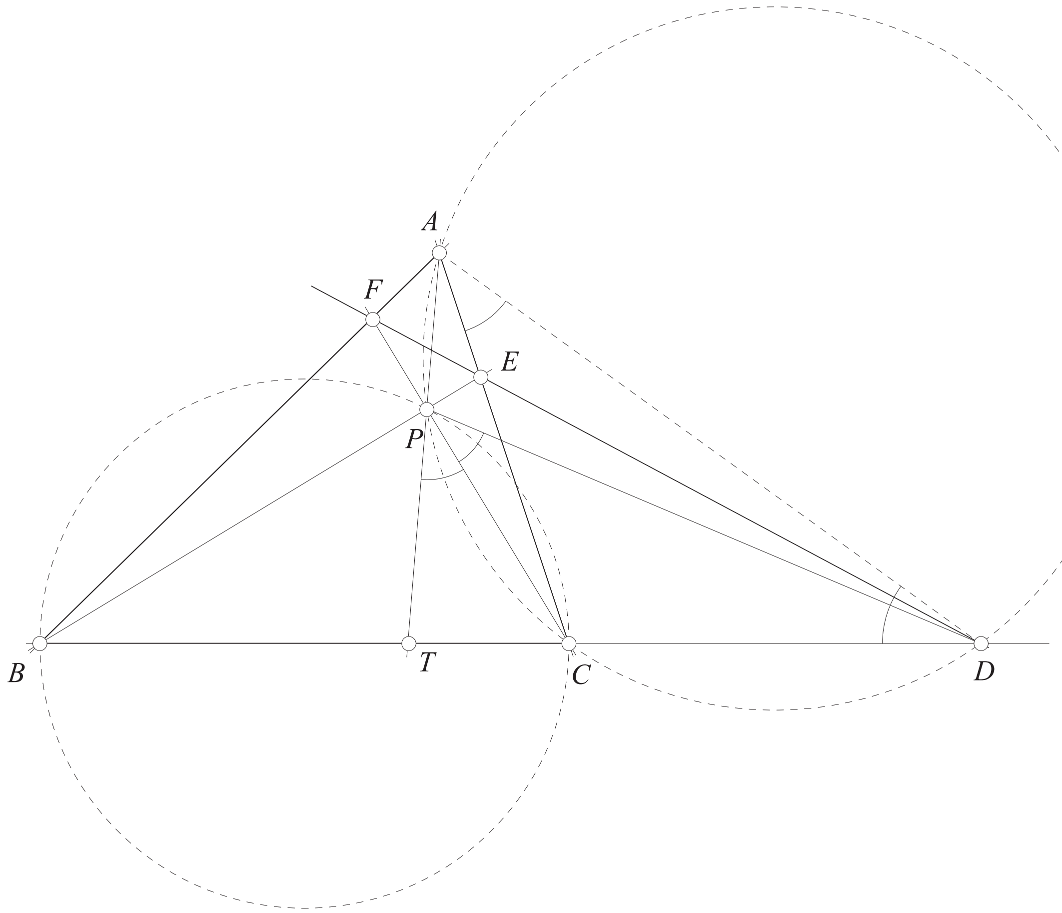
e quindi, essendo verificata la *relazione di Newton*, la divisione (B, C, A, D) è armonica. D'altra parte, poichè P appartiene al cerchio di diametro AD, risulta che $PA \perp PD$. Pertanto, in virtù del Teorema 4, le semirette PA e PD sono le bisettrici (interna ed esterna) dell'angolo $\angle BPC$. □

Osservazione 7. Se le circonferenze $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ sono tangenti esternamente, si dimostra analogamente che PD è la bisettrice dell'angolo $\angle BPC$.



□

Problema 5. *Sia ABC un triangolo, sia $D \in BC$ (con $C \in BD$) tale che $CA = CD$, sia P ($P \neq C$) il punto di intersezione del cerchio di diametro BC e del cerchio (ACD). Dimostrare che i punti D, $E = BP \cap AC$ e $F = CP \cap AB$ sono allineati.*



Soluzione. Se poniamo $T = AP \cap BC$, risulta

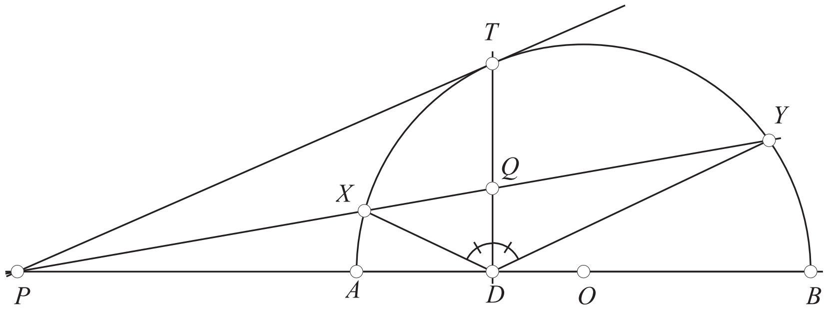
$$\angle TPC = \angle CDA = \angle CAD = \angle DPC$$

quindi la semiretta PC è bisettrice dell'angolo $\angle TPD$. Siccome $BP \perp PC$ per il Teorema 4 la divisione (B, C, T, D) è armonica.

D'altra parte, se indichiamo con D' il punto di intersezione di FE e BC anche la divisione (B, C, T, D') è armonica (esempio 5) e allora, dall'unicità del quarto armonico deriva che $D = D'$ e questo prova che i punti F, E, D sono allineati. □

Problema 6. *Sia γ una semicirconferenza di diametro AB, sia $P \in AB$ (con $A \in PB$). Una retta passante per P interseca γ in X, Y e sia $T \in \gamma$ tale che PT è tangente a γ. Indicata con D la proiezione di T su AB, dimostrare che $\angle TDX = \angle TDY$.*

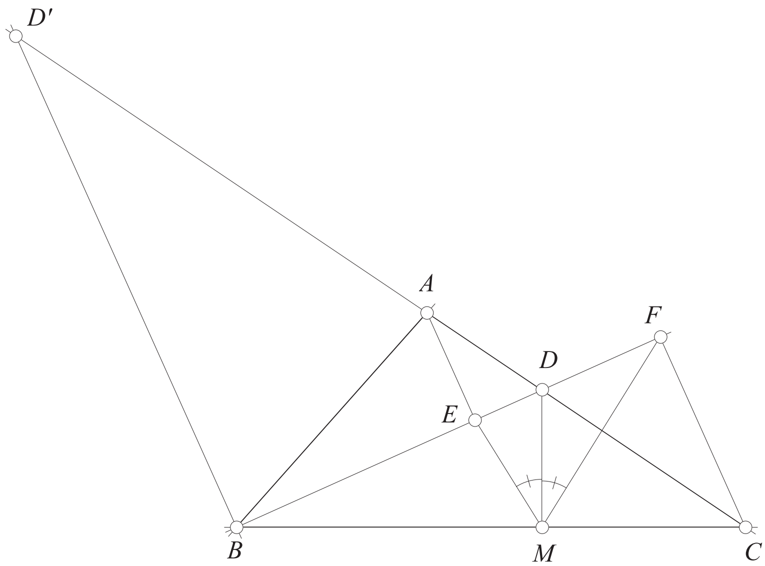
Soluzione. Sia $Q = XY \cap TD$.



Per la caratterizzazione della polare (Esempio 10) la divisione (P, Q, X, Y) è armonica. Poichè $DP \perp DQ$, tenuto conto del Teorema 4, le semirette DQ e DP sono le bisettrici (interna ed esterna) dell'angolo $\angle XDY$. Pertanto $\angle TDX = \angle TDY$ e la dimostrazione è completa. $\square$

Problema 7. *Sia ABC un triangolo scaleno e sia $D \in AC$ tale che BD è la bisettrice di $\angle ABC$. Siano E ed F i piedi delle perpendicolari tracciate rispettivamente da A e da C sulla retta BD e sia $M \in BC$ tale che $DM \perp BC$. Dimostrare che $\angle EMD = \angle DMF$.*

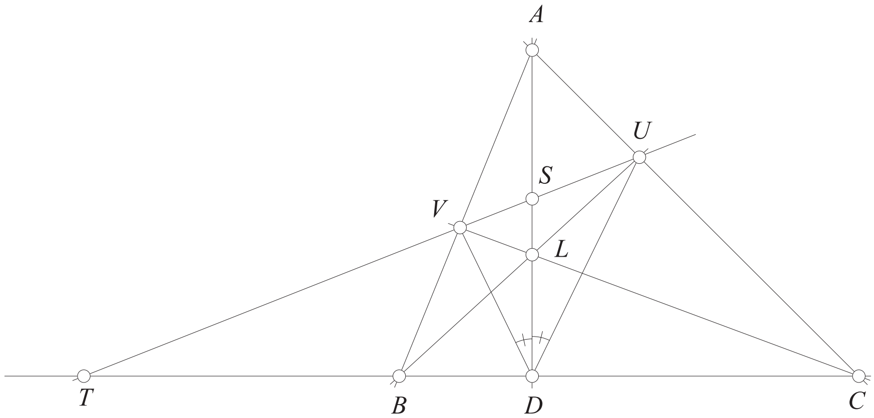
Soluzione. Sia D' la traccia della bisettrice esterna di $\angle ABC$ sul lato AC.



Poichè la divisione (D', D, A, C) è armonica, per il Teorema 5 anche la sua proiezione ortogonale (B, D, E, F) sulla bisettrice interna di $\angle ABC$ è un divisione armonica. Poichè $DM \perp BC$ dal Teorema 4 discende che MD ed MB sono le bisettrici interna ed esterna di $\angle EMF$, rispettivamente. Pertanto $\angle EMD = \angle DMF$. $\square$

Problema 8. (**Teorema di Blanchet**) *Sia ABC un triangolo, sia D il piede della perpendicolare tracciata da A su BC e sia $L \in AD$. Se $U = BL \cap AC$, $V = CL \cap AB$ dimostrare che $\angle ADU = \angle ADV$.*

Soluzione. Siano $T = BC \cap UV$ ed $S = AD \cap UV$.

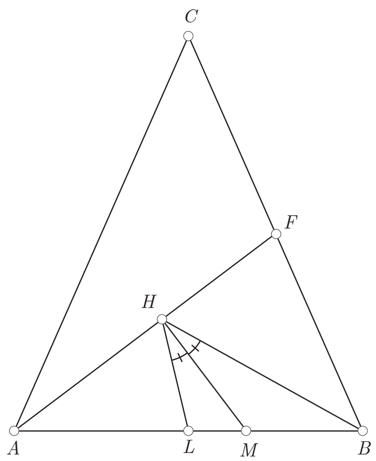


La divisione (T, D, B, C) è armonica (vedi Esempio 5). Pertanto il fascio $A(T, D, B, C)$ è armonico e allora, per il teorema sui fasci armonici, anche la divisione (T, S, V, U) è armonica. Dato che $SD \perp TD$, in virtù del Teorema 4, le semirette SD e TD sono le bisettrici (interna ed esterna) dell'angolo $\angle UDV$. Pertanto $\angle ADU = \angle ADV$ ed il problema è risolto. □

Osservazione 8. Nel caso che L coincide con l'ortocentro di ABC, da questo problema discende che le altezze di ABC sono le bisettrici del suo triangolo ortico e che, quindi, l'ortocentro H di ABC è l'incentro del suo triangolo ortico.

Problema 9. *Sia ABC un triangolo isoscele con $CA = CB$, sia M il punto di AB tale che $AM = 2 \cdot MB$, sia L il punto medio di AB, sia F il punto medio di BC e sia H la proiezione ortogonale di M sulla retta AF. Dimostrare che $\angle LHM = \angle MHB$.*

Soluzione.



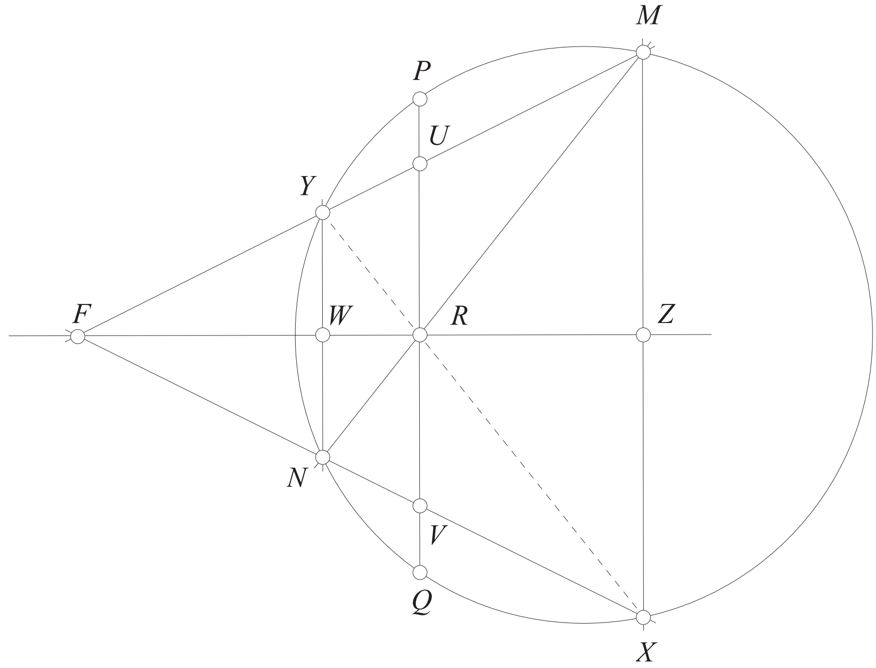
Posto $AB = 2\ell$ abbiamo $AL = \ell$, $AM = \frac{4}{3}\ell$, $LM = \frac{\ell}{3}$, $MB = \frac{2\ell}{3}$ e quindi

$$\frac{AL}{LM} = 3, \qquad \frac{AB}{MB} = 3 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{AL}{LM} = -\frac{AB}{BM}$$

Pertanto (A, M, L, B) è una divisione armonica e, essendo $MH \perp AH$, dal Teorema 4 discende che $\angle LHM = \angle MHB$. □

Problema 10. *Siano P, Q due punti di una circonferenza γ e sia R il punto medio di PQ. Una retta passante per R interseca γ in M, N. Le parallele a PQ passanti per M ed N intersecano γ in X e Y rispettivamente. Provare che $F = MY \cap NX$ è un punto fisso.*

Soluzione. Siano W, Z i rispettivi punti medi di YN, MX e siano $U = MY \cap PQ$, $V = NX \cap PQ$.



Poichè divisione (F, R, W, Z) è armonica[13], applicando il teorema di Talete si dimostra facilmente che anche le divisioni (F, U, Y, M) e (F, V, N, X) sono armoniche, ossia i punti U, V sono i coniugati armonici di F rispetto alle coppie $\{M, Y\}$ ed $\{N, X\}$ rispettivamente.

Pertanto, della caratterizzazione della polare[14], discende che la retta PQ è la polare di F rispetto al cerchio γ. Ne segue che F è il punto di intersezione delle tangenti a γ nei punti P e Q, cioè F è un punto fisso[15], come volevasi dimostrare. $\square$

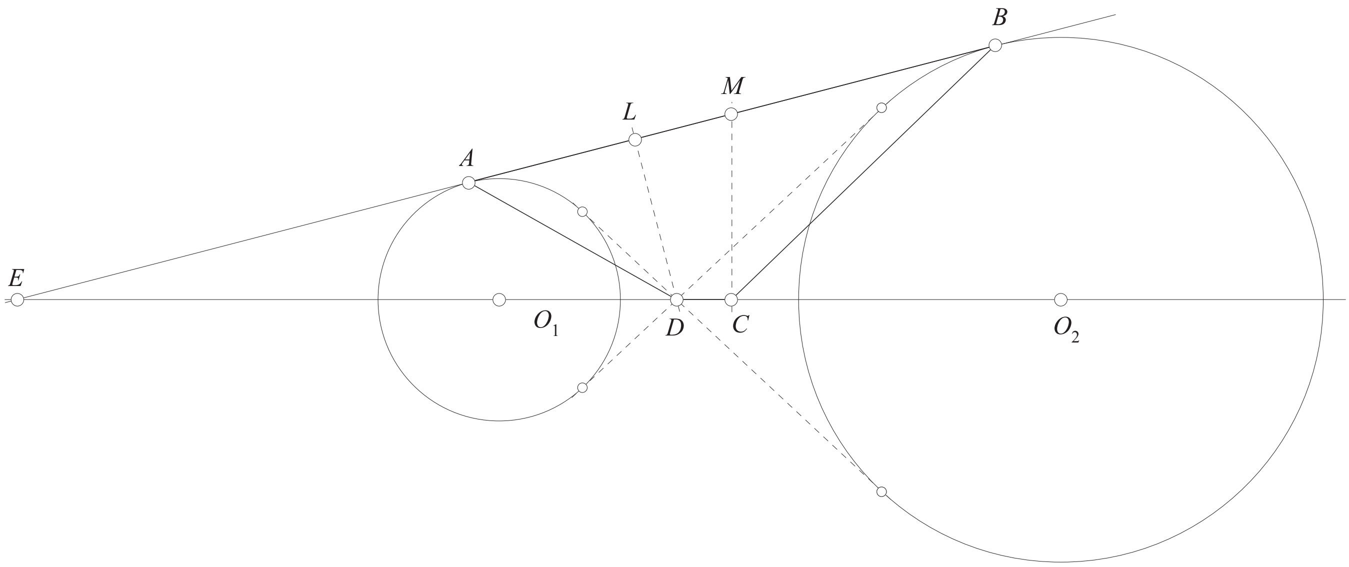
[13] Vedi Esempio 9

[14] Vedi Esempio 10

[15] F è il polo della retta PQ rispetto alla circonferenza γ

Problema 11. *Dati due cerchi disgiunti* (O_1) *e* (O_2)*, siano* A *e* B *i rispettivi punti di contatto con una delle tangenti esterne comuni, sia* C *il punto di intersezione dell'asse radicale con la congiungente dei centri e sia* D *il centro di omotetia interno. Dimostare che il quadrilatero* $ABCD$ *è ciclico.*

Soluzione. Siano O_1, O_2 i centri delle due circonferenze, con $A \in (O_1)$, $B \in (O_2)$ e sia E il centro di omotetia esterno.



Osserviamo che l'asse radicale di (O_1), (O_2) passa per il punto medio M del segmento AB.

Poichè (E, D, O_1, O_2) è una divisione armonica (vedi Esempio 2), la sua proiezione ortogonale (E, L, A, B) sulla tangente esterna è anch'essa armonica. Pertanto, dalla *relazione di MacLaurin*[16] abbiamo:

$$EA \cdot EB = EL \cdot EM \tag{1}$$

D'altra parte il quadrilatero $LMCD$, avendo due angoli opposti retti, è ciclico e quindi, per il teorema delle secanti, risulta:

$$EL \cdot EM = ED \cdot EC \tag{2}$$

Dalla (1) e la (2) segue che:

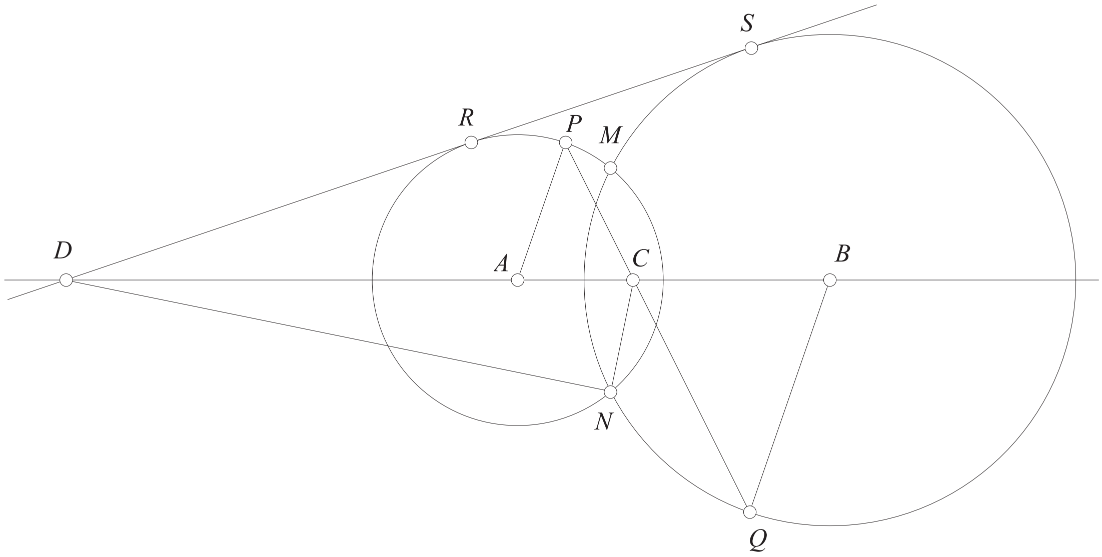
$$EA \cdot EB = ED \cdot EC$$

e ciò dimostra che $ABCD$ è ciclico. □

[16]Teorema 3, proprietà P_4

Problema 12. *Due circonferenze di centri A e B si intersecano nei punti M ed N. Siano AP e BQ due raggi paralleli situati in semipiani opposti rispetto ad AB. Se un tangente esterna comune interseca AB in D e PQ interseca AB in C, dimostrare che $\angle CND$ è un angolo retto.*

Soluzione.



Sia r_1 il raggio della circonferenza di centro A ed r_2 quello della circonferenza di centro B. Poichè $PA \parallel BQ$ i triangoli PAC e QBC sono simili, quindi

$$\frac{AC}{CB} = \frac{r_1}{r_2} \tag{1}$$

Indichiamo con R ed S i punti di contatto della tangente esterna con le due circonferenze (A) e (B), rispettivamente. I triangoli ARD e BSD sono simili, quindi

$$\frac{DA}{DB} = \frac{r_1}{r_2} \tag{2}$$

Da (1) e (2) segue che

$$\frac{AC}{CB} = -\frac{AD}{DB}$$

e quindi la divisione (A, B, C, D) è armonica.

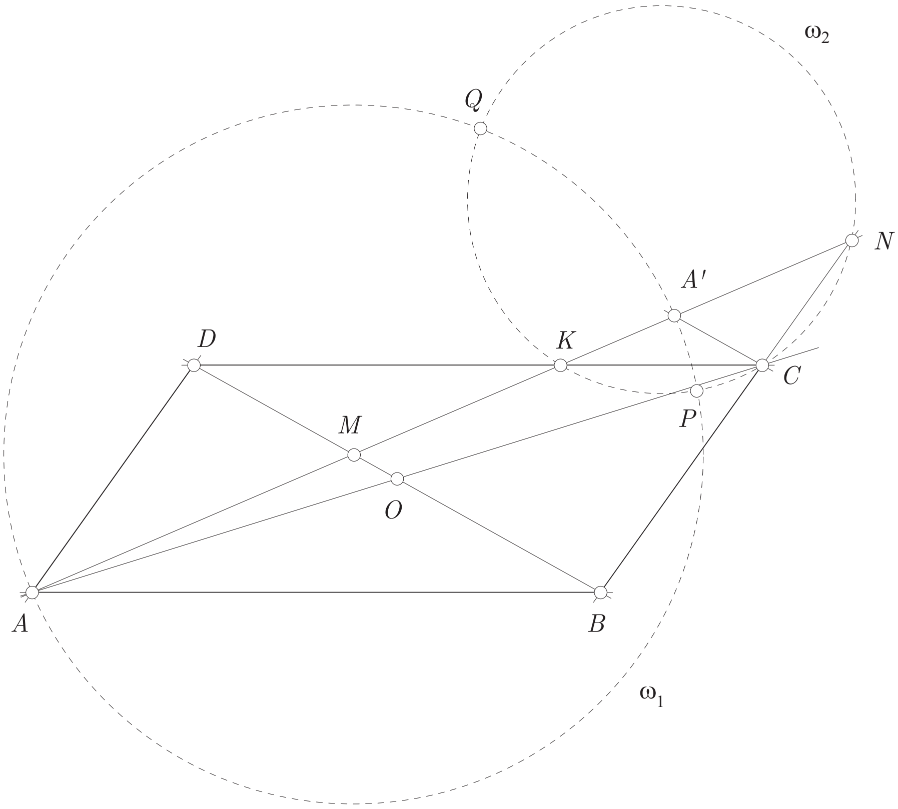
Osserviamo che NC è la bisettrice dell'angolo $\angle ANB$, dato che

$$\frac{AN}{NB} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{AC}{CB}$$

Pertanto, dal Teorema 4, discende che $NC \perp ND$. $\square$

Problema 13. *Sulla diagonale BD del parallelogramma $ABCD$ è scelto un punto M. La retta AM interseca le rette CD e BC nei punti K e N rispettivamente. Sia ω_1 il cerchio di centro M e raggio MA, sia ω_2 il circoncerchio di KNC, siano P e Q i punti di intersezione di ω_1 e ω_2. Dimostrare che MP e MQ sono tangenti a ω_2.*

Soluzione. Sia O il centro del parallelogramma e sia A' il simmetrico di A rispetto ad M.



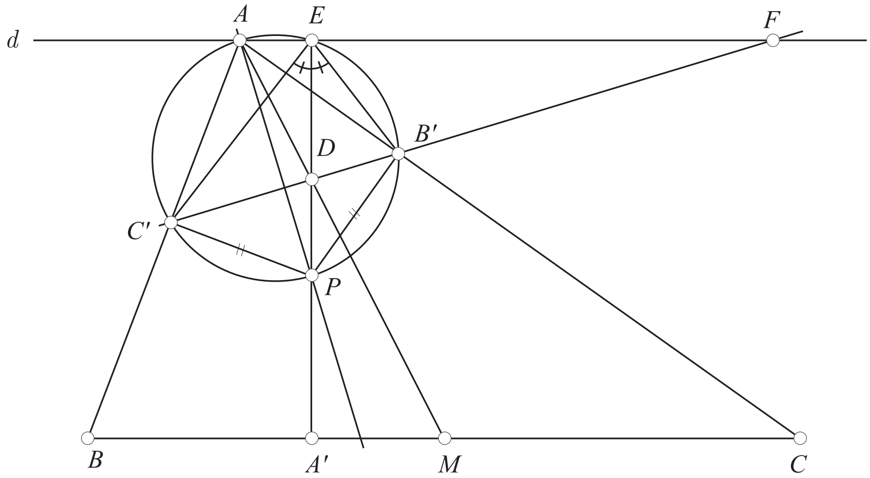
Osserviamo che i segmenti CA' e BD sono paralleli, dato che O e M sono i punti medi di AC e AA', rispettivamente. Ma allora, dal Teorema 6, discende che il fascio $C(A', D, A, B)$ è armonico, poichè la retta $BD \parallel CA'$ e $OB = OD$. Di conseguenza la divisione (A, A', K, N) è armonica e quindi dalla *relazione di Newton* segue che:

$$MA^2 = MN \cdot MK \quad \Rightarrow \quad MP^2 = MQ^2 = MN \cdot MK \tag{1}$$

La (1) implica che MP ed MQ sono tangenti alla circonferenza ω_2. □

Problema 14. *Sia P un punto della bisettrice dell'angolo $\angle BAC$ del triangolo ABC. Siano A', B', C' le proiezioni ortogonali di P sui lati BC, CA, AB rispettivamente. Dimostrare che l'intersezione di PA' con $B'C'$ appartiene alla mediana AM, dove M è il punto medio di BC.*

Soluzione.

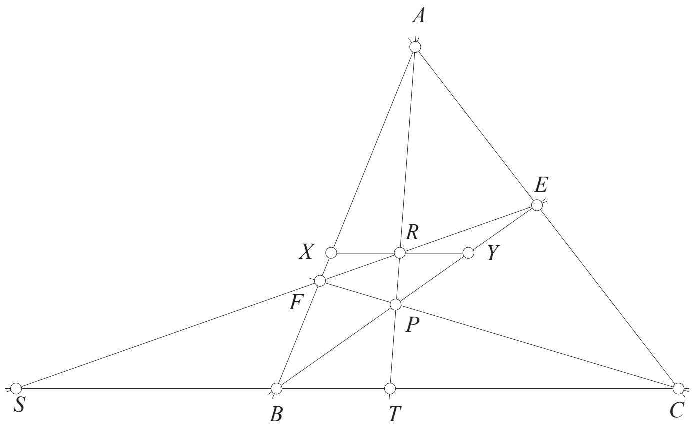


Sia d la parallela a BC passante per A e siano $D = PA' \cap B'C'$, $E = PA' \cap d$, $F = B'C' \cap d$, $M' = AD \cap BC$. Osserviamo che i punti B', C', E appartengono alla circonferenza di diametro PA e che $PB' = PC'$ in quanto P appartiene alla bisettrice di $\angle BAC$.

Pertanto $\angle C'EP = \angle PEB'$ in quanto angoli alla circonferenza che insistono su corde congruenti. Dato che $DE \perp EF$ la divisione (C', B', D, F) è armonica in virtù del Teorema 4. Di conseguenza $A(C', B', D, F) = -1$ e, poichè $BC \parallel AF$, dal Teorema 7 discende che $BM' = M'C$. Pertanto $M' = M$ e questo prova che il punto D appartiene alla mediana AM. □

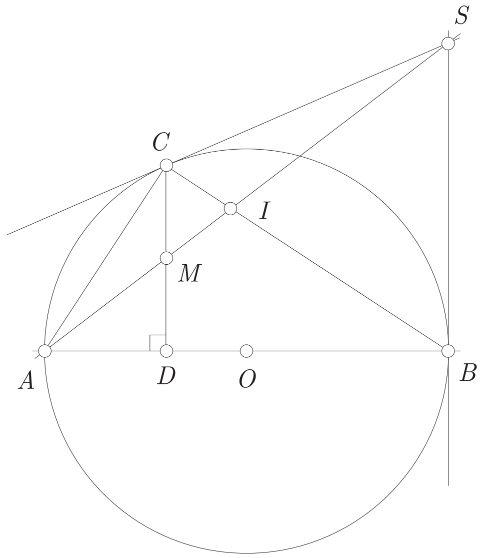
Problema 15. *Sia ABC un triangolo, e scegliamo due punti $E \in AC$, $F \in AB$. Siano $P = BE \cap CF$, $R = EF \cap AP$ e siano X, Y i punti di intersezione della parallela per R alla retta BC con AB, EB rispettivamente. Dimostrare che $RX = RY$.*

Soluzione. Siano $S = EF \cap BC$ e $T = AP \cap BC$.



La divisione (S, T, B, C) è armonica (vedi Esempio 5), quindi il fascio $A(S, T, B, C)$ è armonico. Pertanto, in virtù del Teorema 5, la divisione (S, R, F, E) è armonica. Di conseguenza il fascio $B(S, R, F, E)$ è armonico e allora, siccome $XY \parallel BS$, dal Teorema 7 discende che $RX = RY$. □

Problema 16. *Sia S il punto di intersezione delle tangenti a un cerchio (O) nei punti B, C; sia A il punto diametralmente opposto a B, sia D il piede della perpendicolare condotta da C su AB e sia $M = AS \cap CD$. Dimostrare che $MC = MD$.*



Soluzione. Sia $I = BC \cap SA$. Dato che $\angle SCI = \angle CAB = \angle MCI$, CI è la bisettrice interna di $\angle MCS$ e allora, dato che $AC \perp CI$, AC è la bisettrice esterna di $\angle MCS$. Pertanto la divisione (A, I, M, S) è armonica, quindi

$$\frac{SI}{IM} = -\frac{SA}{AM} \quad \Rightarrow \quad \frac{AS}{AM} = \frac{IS}{MI} \tag{1}$$

Dalle similitudini dei triangoli $CIM \sim BIS$, $AMD \sim ASB$ abbiamo:

$$\frac{IS}{MI} = \frac{SB}{MC} \quad , \quad \frac{AS}{AM} = \frac{SB}{MD} \tag{2}$$

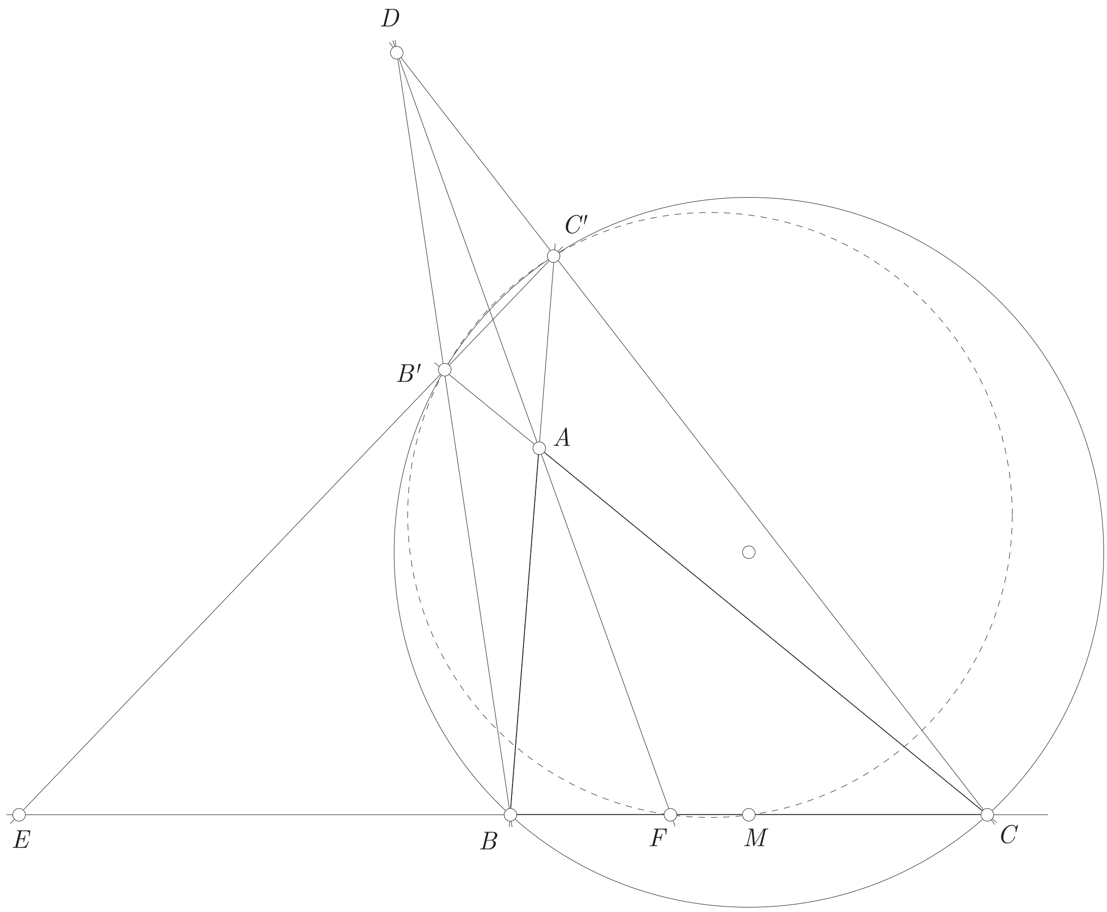
Dalla (1) e la (2) segue che

$$\frac{SB}{MC} = \frac{SB}{MD} \quad \Rightarrow \quad MC = MD$$ □

Soluzione alternativa. Siccome (A, I, M, S) è una divisione armonica, il fascio $B(A, I, M, S)$ è armonico. Pertanto, dato che $CD \parallel BS$, dal Teorema 7 discende che la retta CD determina sulle altre tre trasversali del fascio BA, BM, BC due segmenti congruenti, cioè $CM = MD$. □

Problema 17. *Sia ABC un triangolo, sia γ una circonferenza passante per B e C; siano B' e C' i secondi punti di intersezione di γ con AC e AB; siano $D = BB' \cap CC'$, $F = AD \cap BC$ e sia M il punto medio di BC. Dimostrare che i punti B', C', F, M sono conciclici.*

Soluzione. Sia $E = BC \cap B'C'$.



La divisione (E, F, B, C) è armonica ed M è il punto medio di BC. Pertanto, dalla *relazione di MacLaurin*[17] discende che:

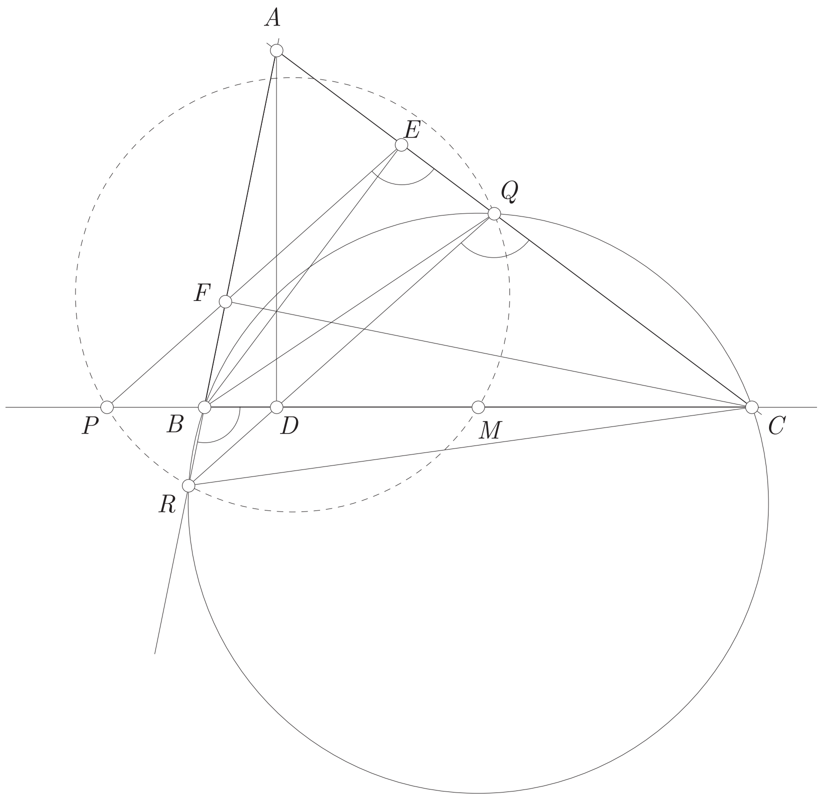
$$EF \cdot EM = EB \cdot EC = EB' \cdot EC'$$

Dall'inverso del teorema delle secanti segue che B', C', F e M sono conciclici. □

[17]Teorema 3, proprietà P_4

Problema 18. *Sia ABC un triangolo acutangolo e siano D, E, F i piedi delle altezze relative ai lati BC, CA, AB. La retta passante per D parallela ad EF interseca le rette AC e AB nei punti Q ed R rispettivamente. La retta EF interseca BC nel punto P. Dimostrare che i punti P, Q, R ed il punto medio M di BC sono conciclici.*

Soluzione.



Il quadrilatero $BCEF$ è ciclico e $EF \parallel QR$. Ne segue che anche il quadrilatero $BQCR$ è ciclico in quanto:

$$\angle RBC = \angle FEC = \angle RQC$$

Pertanto

$$DQ \cdot DR = DB \cdot DC \tag{1}$$

D'altra parte, (P, D, B, C) è una divisione armonica quindi, indicato con M il punto medio di BC, dalla *relazione di MacLaurin*[18] si ha:

$$DB \cdot DC = DM \cdot DP \tag{2}$$

Da (1) e (2), discende che

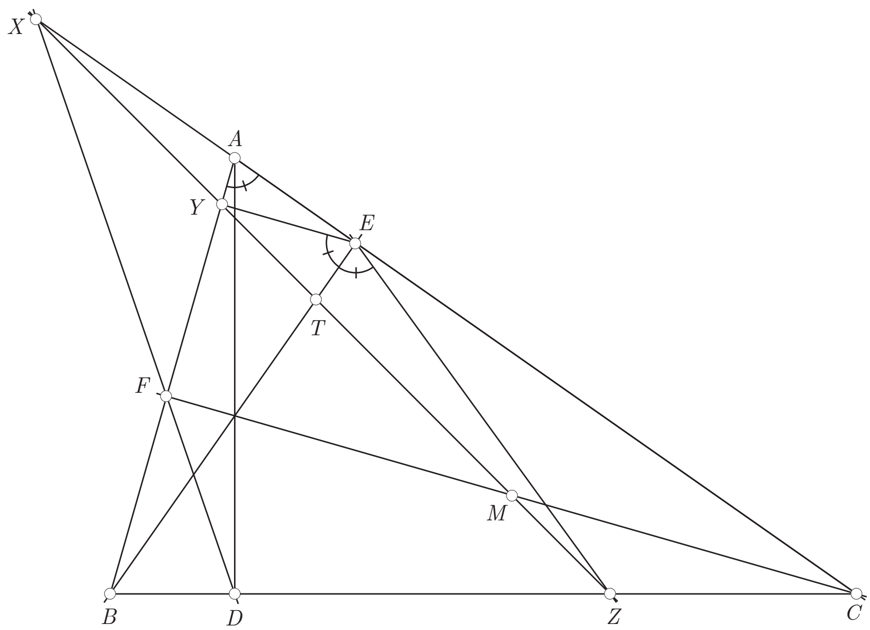
$$DQ \cdot DR = DM \cdot DP$$

e questo prova che P, Q, R, M sono conciclici. □

[18]Teorema 3, proprietà P_4

Problema 19. *Sia ABC un triangolo acutangolo e siano D, E, F i piedi delle altezze relative ai lati BC, CA, AB. Sia Z un punto della retta BC tale che $\angle BEZ = \angle BAC$ e sia $X = DF \cap AC$. Dimostrare che ZX interseca CF nel punto medio.*

Soluzione. Siano $Y = AB \cap XZ$ e $T = BE \cap XZ$.



Osserviamo che la divisione (X, E, A, C) è armonica quindi il fascio $B(X, E, A, C)$ è armonico. Allora, dal teorema fondamentale sui fasci armonici, segue che la divisione (X, T, Y, Z) è armonica. Poichè $ET \perp EX$ dal Teorema 4 deriva che

$$\angle YEB = \angle BEZ = \angle BAC \quad \Rightarrow \quad EY \perp AB$$

Pertanto $EY \parallel FC$ e, usando il teorema di Talete, otteniamo:

$$\frac{FY}{YA} = \frac{CE}{EA} \tag{1}$$

D'altra parte, dato che (C, A, E, X) è una divisione armonica, abbiamo:

$$\frac{CE}{EA} = -\frac{CX}{XA} \tag{2}$$

Da (1) e (2) segue che

$$\frac{FY}{YA} = -\frac{CX}{XA}$$

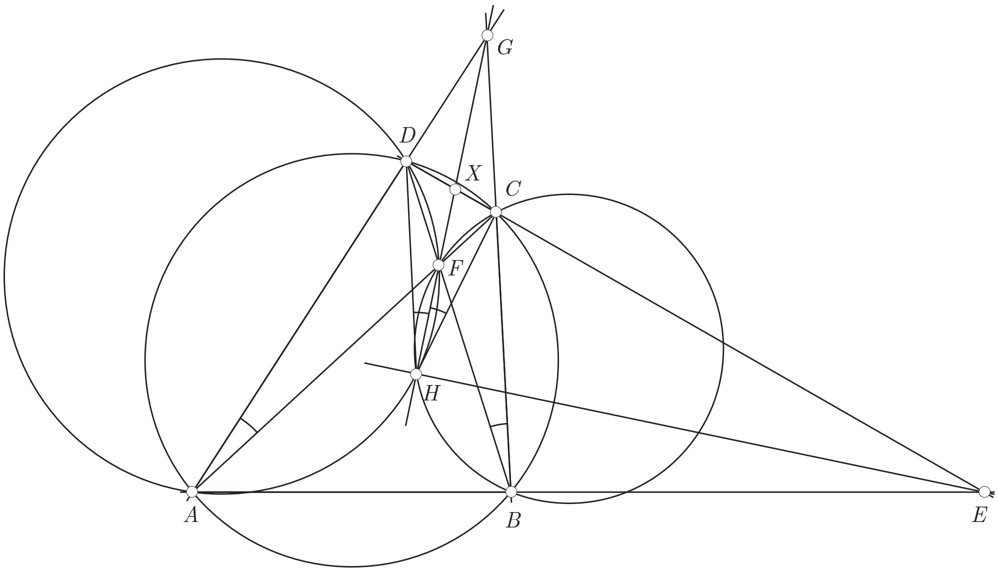
Sia $M = XY \cap FC$. Applicando il teorema di Menelao al triangolo AFC relativamente alla trasversale XY, concludiamo che M è il punto medio di BC, in quanto:

$$-1 = \frac{AY}{YF} \cdot \frac{FM}{MC} \cdot \frac{CX}{XA} = -\frac{AY}{YF} \cdot \frac{FM}{MC} \cdot \frac{FY}{YA} = -\frac{FM}{MC} \quad \Rightarrow \quad FM = MC$$

$\square$

Problema 20. *Sia $ABCD$ un quadrilatero ciclico. Le rette AB, CD si intersecano in E e le diagonali AC, BD si intersecano in F. I circoncerchi dei triangoli AFD, BFC si intersecano ulteriormente in H. Dimostrare che $FH \perp HE$.*

Soluzione.



Consideriamo le circonferenze $\odot(ABCD)$, $\odot(AFDH)$, $\odot(BFHC)$. Dalla proprietà degli assi ragicali discende che le rette DA, HF, CB concorrono in un punto G.

Osserviamo che[19]:

$$(D, C, X, E) = -1 \tag{1}$$

Dalle proprietà degli angoli alla circonferenza segue che:

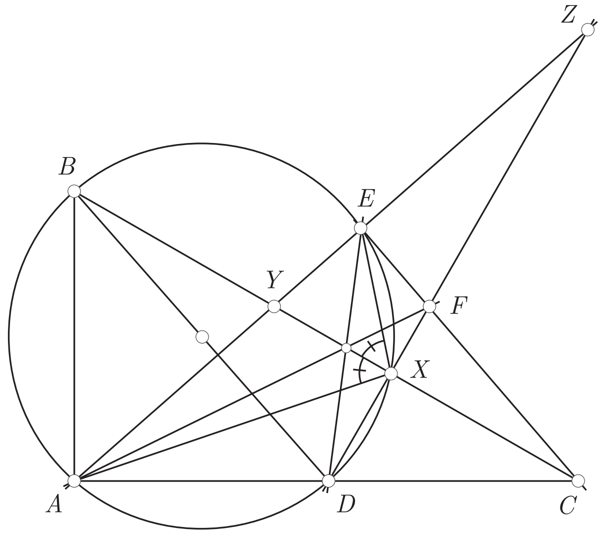
$$\angle XHC = \angle FBC = \angle FAD = \angle DHX \tag{2}$$

La (1), la (2) e il Teorema 4 implicano che $FH \perp HE$. □

[19]Vedi 'Esempio 5

Problema 21. *Sia ABC un triangolo rettangolo con $\angle BAC = 90°$, sia D un punto di AC, sia E il simmetrico di A rispetto a BD, sia F il punto di intersezione tra CE e la perpendicolare condotta da D alla retta BC. Dimostrare che le rette AF, ED, BC sono concorrenti.*

Soluzione. Siano $X = DF \cap BC$, $Y = BC \cap AE$, $Z = AE \cap DF$.



I punti A, B, E, X, D sono conciclici in quanto

$$\angle BAD = \angle BED = \angle BXD = 90°$$

Poichè $BA = BE$ ne segue che XY biseca $\angle AXE$. Pertanto, tenuto conto che $XY \perp XZ$, dal Teorema 4 deriva che (A, E, Y, Z) è una divisione armonica, per cui

$$\frac{AY}{YE} = -\frac{AZ}{ZE} \tag{1}$$

Dal teorema di Menelao applicato al triangolo AEC tagliato dalla trasversale DF abbiamo:

$$\frac{AD}{DC} \cdot \frac{CF}{FE} \cdot \frac{EZ}{ZA} \cdot = -1 \tag{2}$$

Dalla (1) e la (2) segue che

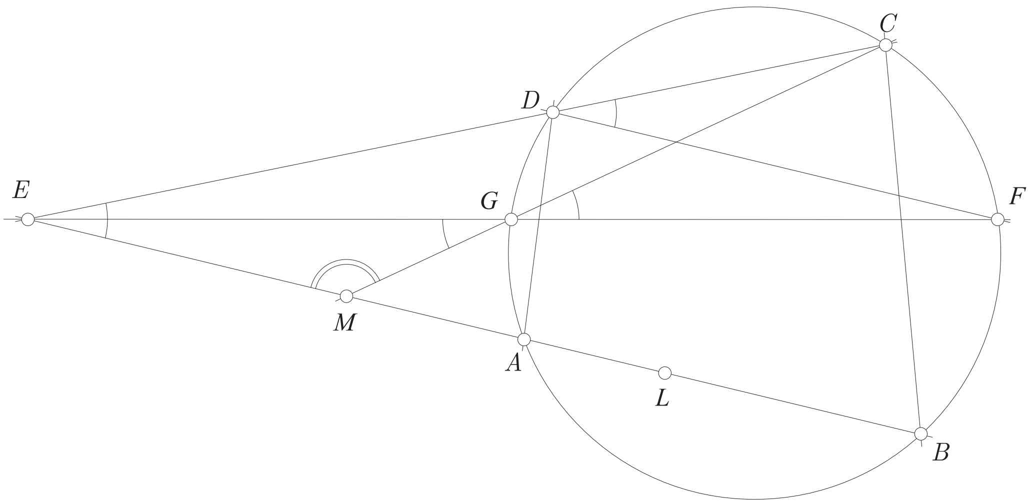
$$\frac{AD}{DC} \cdot \frac{CF}{FE} \cdot \frac{EY}{YA} \cdot = 1 \tag{3}$$

Dalla (3), tenuto conto dell'inverso del teorema di Ceva (applicato al triangolo AEC), discende che le rette AF, ED, BC sono concorrenti. □

Problema 22. *Sia $ABCD$ un quadrilatero convesso inscritto in un cerchio γ, sia $E = AB \cap CD$, sia $F \in \gamma$ con $DF \| AB$, sia $G = \gamma \cap EF$ e sia $M = AB \cap CG$. Dimostrare che*

$$\frac{1}{EM} = \frac{1}{EA} + \frac{1}{EB}$$

Soluzione.



Essendo $DF \parallel AB$ abbiamo:

$$\angle EGM = \angle CGF = \angle CDF = \angle CEM$$

Pertanto i triangoli EGM e CEM sono simili e quindi

$$\frac{ME}{MC} = \frac{MG}{ME} \quad \Rightarrow \quad ME^2 = MC \cdot MG = MA \cdot MB$$

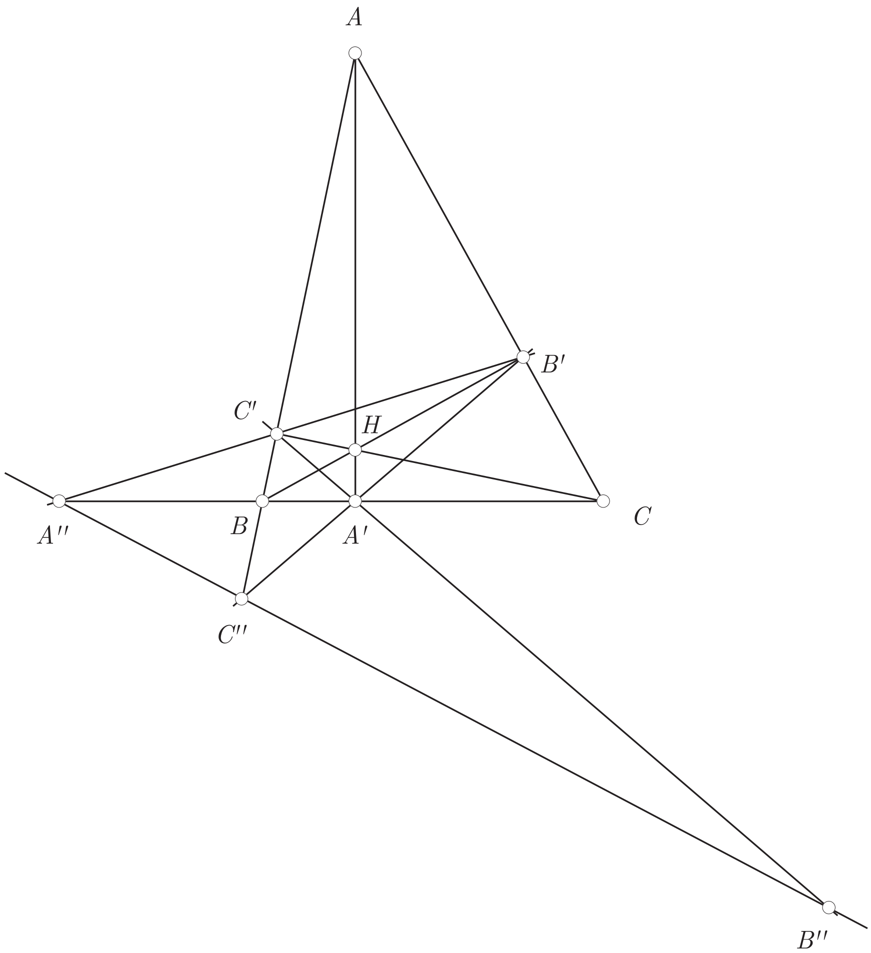
Sia L il simmetrico di E rispetto a M. Poichè $ME^2 = MA \cdot MB$ ed M è il punto medio di EL dalla *relazione di Newton*[20] segue che la divisione (E, L, A, B) è armonica. Pertanto, tenuto conto della *relazione di Cartesio*[21] abbiamo:

$$\frac{2}{EL} = \frac{1}{EA} + \frac{1}{EB} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{EM} = \frac{1}{EA} + \frac{1}{EB} \qquad \square$$

[20] Teorema 3, proprietà P_3
[21] Teorema 3, proprietà P_2

Problema 23. *Siano AA', BB', CC' le altezze di un triangolo ABC e siano $A'' = BC \cap B'C'$, $B'' = AC \cap A'C'$, $C'' = AB \cap A'B'$. Dimostrare che i punti A'', B'', C'' sono allineati*[22].

Soluzione.



Le divisioni (B, C, A', A''), (A, C, B', B''), (A, B, C', C'') sono armoniche[23], per cui

$$\frac{BA'}{A'C} = -\frac{BA''}{A''C}, \qquad \frac{AB'}{B'C} = -\frac{AB''}{B''C}, \qquad \frac{AC'}{C'B} = -\frac{AC''}{C''B} \tag{1}$$

Le altezze AA', BB', CC' sono concorrenti e quindi per il teorema di Ceva abbiamo

$$\frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} \cdot \frac{AC'}{C'B} = 1 \tag{2}$$

Da (1) e (2) discende facilmente che

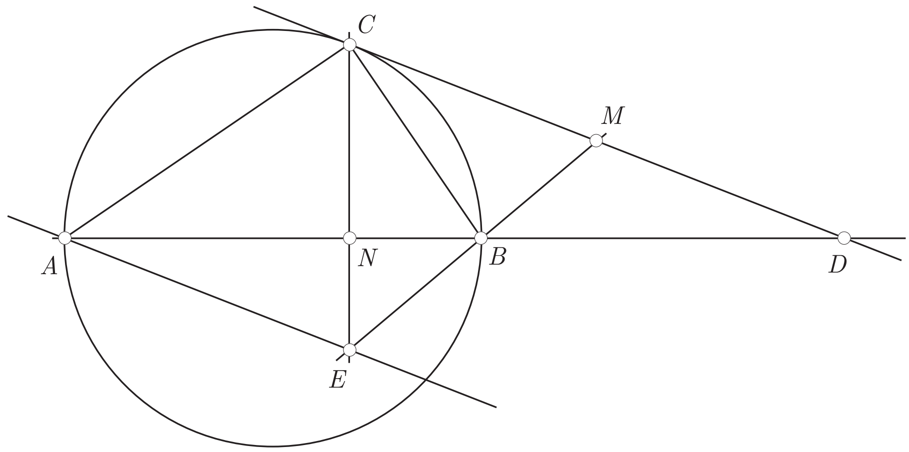
$$\frac{BA''}{A''C} \cdot \frac{CB''}{B''A} \cdot \frac{AC''}{C''B} = -1$$

Dall'inverso del teorema di Menelao segue che A'', B'', C'' sono allineati. □

[22] La retta passante per A'', B'', C'' è detta *asse ortico* del triangolo ABC.
[23] Vedi Esempio 5

Problema 24. *Sia ABC un triangolo rettangolo con $\angle C = 90°$, sia γ il circoncerchio di ABC, sia D il punto di intersezione della tangente a γ nel punto C con la retta AB e sia M il punto medio di CD. Indicato con E il punto di intersezione di MB con l'altezza CN, dimostrare che $AE \parallel CD$.*

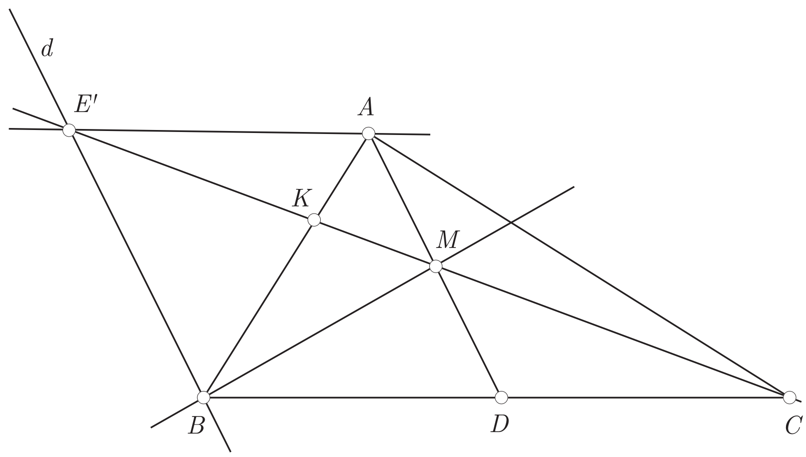
Soluzione.



Poichè $AC \perp CB$ e $\angle NCB = \angle BAC = \angle BCD$ per il Teorema 4 la divisione (A, B, N, D) è armonica. Pertanto il fascio $E(A, B, N, D)$ è armonico ed allora, dato che $CM = MD$, dal Teorema 8 segue che le rette CD ed AE sono parallele. □

Problema 25. *Sia ABC un triangolo rettangolo con $\angle A = 90°$, sia D un punto di BC, sia M il punto medio di AD e sia E il punto di intersezione di CM con l'asse di AB. Dimostrare che $DA \parallel BE$.*

Soluzione. Sia d la retta passante per B e parallela ad AD e siano $E' = t \cap CM$, $K = AB \cap CM$.



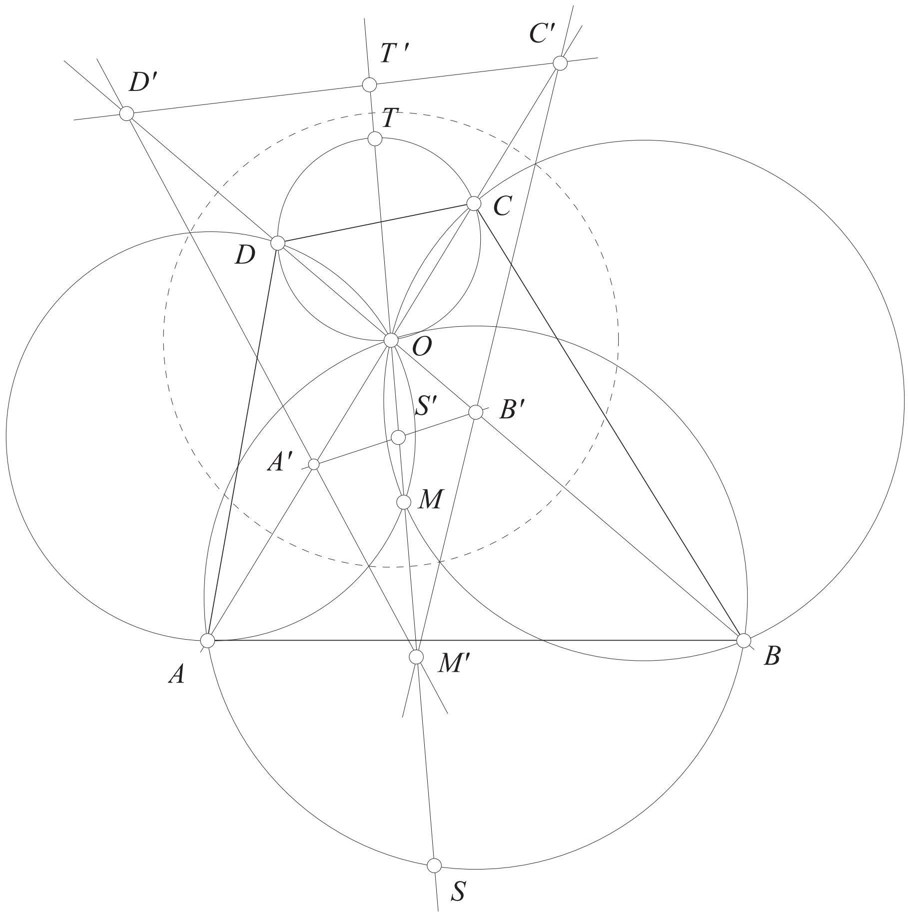
Poichè $AM = MD$, per il Teorema 6 abbiamo che $B(E', K, M, C) = -1$.

Pertanto $(E', M, K, C) = -1$ e quindi anche il fascio $A(E', M, K, C)$ è armonico. Essendo $AB \perp AC$, dal Teorema 4 segue che $\angle E'AB = \angle BAD$. D'altra parte siccome $BE' \parallel DA$ abbiamo $\angle E'BA = \angle BAD$ e quindi $\angle E'AB = \angle E'BA$.

Allora E' appartiene all'asse del segmento AB, dunque $E' = E$ e $DA \parallel BE$. □

Problema 26. *Sia O il punto di intersezione delle diagonali del quadrilatero convesso $ABCD$. I circoncerchi dei triangoli OAD e OBC si intersecano in O ed M. La retta OM interseca i circoncerchi di OAB e OCD in S, T rispettivamente. Dimostrare che $SM = MT$.*

Soluzione. Invertiamo la figura rispetto ad un cerchio di centro O e raggio r ed indichiamo con P' il trasformato di un generico punto P.



Osserviamo che i cerchi $\odot(OAD)$ e $\odot(OBC)$ si trasformano rispettivamente nelle rette $A'D'$ ed $B'C'$ e

$$M' = A'D' \cap B'C', \qquad O = A'C' \cap B'D', \qquad T' = D'C' \cap M'O, \qquad S' = A'B' \cap M'O$$

Pertanto la divisione (T', S', O, M') è armonica[24] per cui:

$$\frac{M'T'}{T'O} = \frac{M'S'}{S'O} \tag{1}$$

Sostituendo nella (1) le relazioni

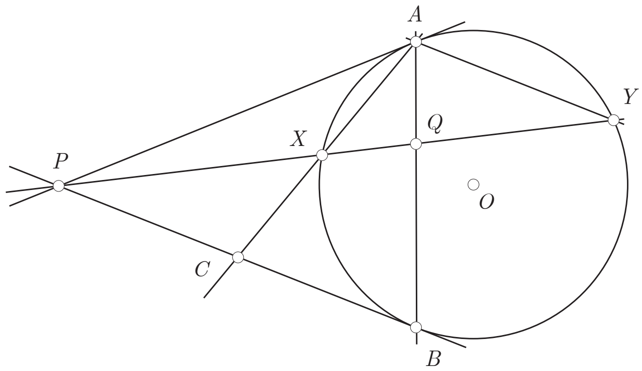
$$M'T' = \frac{MT \cdot r^2}{OM \cdot OT}, \quad M'S' = \frac{MS \cdot r^2}{OM \cdot OS}, \quad TO' = \frac{r^2}{OT}, \qquad SO' = \frac{r^2}{OS}$$

con semplici calcoli si verifica che $SM = MT$. □

[24]Vedi Problema 22.

Problema 27. *Da un punto P esterno ad un cerchio (O) tracciamo le tangenti PA, PB. Dal punto A tracciamo una retta parallela a PB che interseca il cerchio in un ulteriore punto Y. Siano $X = PY \cap (O)$, $Q = PY \cap AB$, $C = AX \cap PB$. Dimostrare che $PC = CB$.*

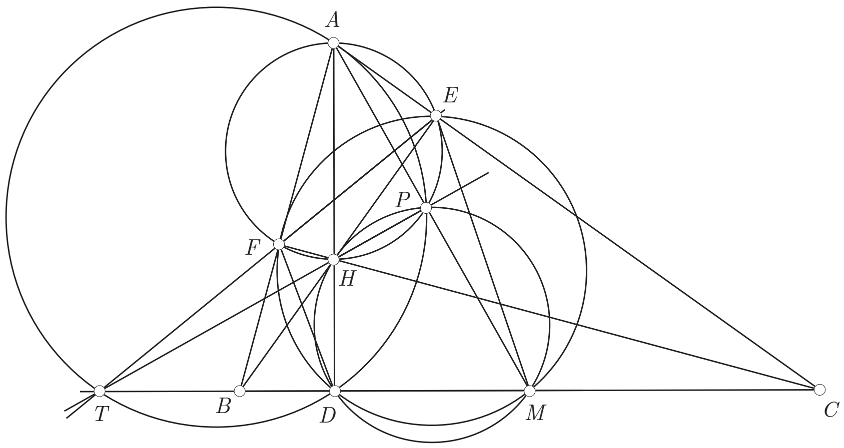
Soluzione.



Dato che $(P, Q, X, Y) = -1$ il fascio $A(P, Q, X, Y)$ è armonico.
Dal Teorema 7, essendo $PB \parallel AX$, seguene che $PC = CB$. □

Problema 28. *Sia ABC un triangolo acutangolo, sia M il punto medio di BC, sia H ortocentro di ABC e sia P la proiezione ortogonale di H su AM. Dimostrare che $AM \cdot PM = BM^2$.*

Soluzione. Siano AD, BE, CF le altezze di ABC. I quadrilateri $AEPHF$, $HPMD$, e $EFDM$ sono ciclici e i loro assi radicali EF, PH, MD concorrono in un punto T.



Osserviamo che il quadrilatero $APDT$ è ciclico in quanto $\angle APT = \angle ADT = 90°$. Pertanto:

$$AM \cdot PM = TM \cdot DM \tag{1}$$

Dato che la divisione (T, D, B, C) è armonica[25], per il Teorema 3 abbiamo:

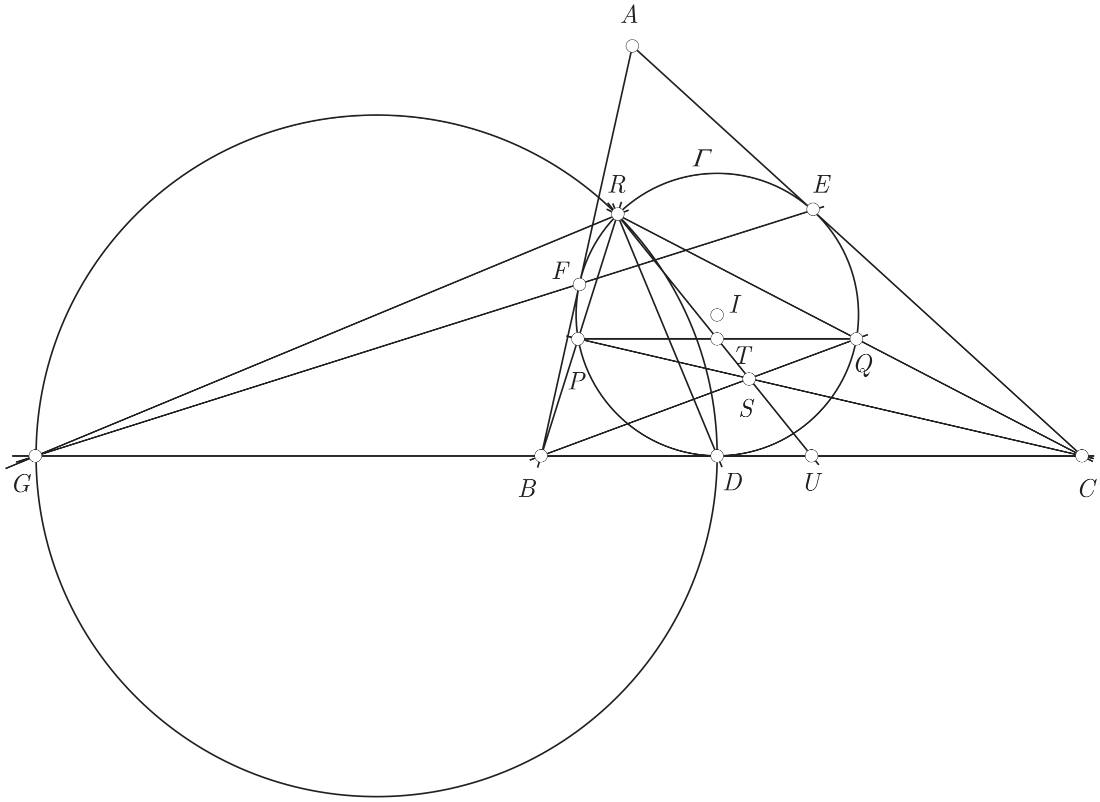
$$TM \cdot DM = BM^2 \tag{2}$$

Dalla (1) e la (2) segue che $AM \cdot PM = BM^2$, come volevamo dimostrare. □

[25] Vedi l'esempio 5

Problema 29. *Il cerchio Γ è inscritto in un triangolo scaleno ABC. Γ è tangente ai lati BC, CA, AB nei punti D, E, F rispettivamente. Sia $G = EF \cap BC$; sia R il punto di intersezione tra Γ e la circonferenza di diametro GD (con $R \neq D$); siano $P = \Gamma \cap BR$, $Q = \Gamma \cap CR$ (con $P \neq R$, $Q \neq R$), $S = BQ \cap CP$, $T = RS \cap PQ$. Dimostrare che $PT = TQ$.*

Soluzione. Sia $U = RS \cap BC$.



Poichè le ceviane AD, BE, CF concorrono nel punto di Gergonne, la divisione (G, D, B, C) è armonica[26]. Dato che $\angle GRD = 90°$, dal Teorema 4 segue che RD è la bisettrice dell'angolo $\angle BRC$.

Pertanto $PD = QD$ e, siccome $IP = IQ$, il quadrilatero $QIPD$ è un deltoide, quindi $ID \perp PQ$. Poichè $ID \perp BC$ abbiamo che $PQ \parallel BC$ e, di conseguenza

$$\frac{RP}{PB} = \frac{RQ}{QC} \tag{1}$$

Dato che le rette BQ, CP, RU concorrono, il teorema di Ceva applicato al triangolo BCR implica che

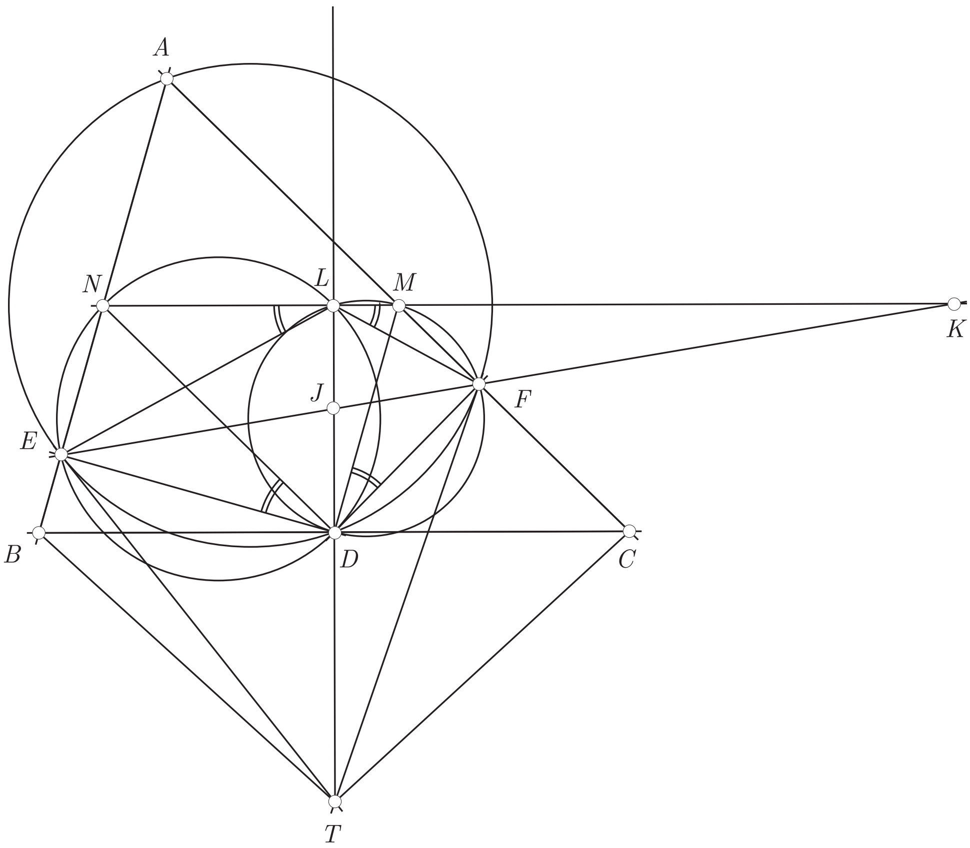
$$\frac{RP}{PB} \cdot \frac{BU}{UC} \cdot \frac{CQ}{QR} = 1 \tag{2}$$

Dalla (1) e la (2) si ricava che $BU = UC$. Pertanto, essendo $PQ \parallel BC$, otteniamo che $PT = TQ$, come richiesto. $\square$

[26]Vedi l'esempio 5

Problema 30. *Sia D il punto medio del lato BC del triangolo ABC. Siano E, F le proiezioni di D su AB, AC rispettivamente e sia T il punto di intersezione delle tangenti al cerchio di diametro AD nei punti E, F. Dimostrare che $TB = TC$.*

Soluzione. Siano M, N i punti medi di AC, AB e sia $K = MN \cap EF$.



Considerando il parallelogramma $ANDM$ abbiamo:

$$\angle NDE = 90° - \angle BND = 90° - \angle CMD = \angle FDM \tag{1}$$

Indichiamo con L la proiezione di D su MN e con J il punto di intersezione di EF e LD. Dai quadrilateri ciclici $LNED$, $LDFM$, tenuto conto di (1), otteniamo:

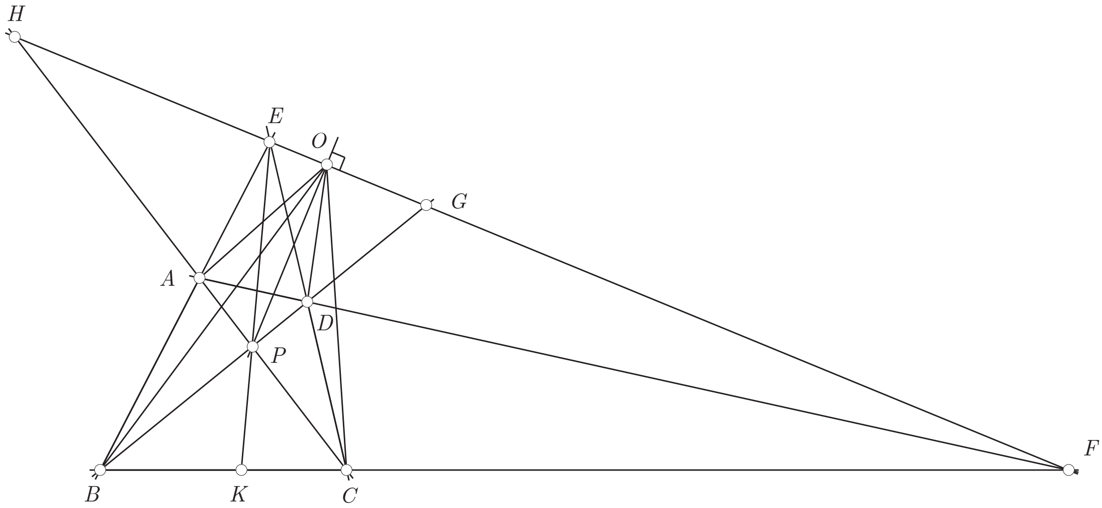
$$\angle ELN = \angle NDE = \angle FDM = \angle FLM \qquad \Longrightarrow \qquad \angle ELD = \angle DLF \tag{2}$$

Essendo $DL \perp MN$ e $\angle ELD = \angle DLF$, dal Teorema 4 segue che $(E, F, J, K) = -1$. Pertanto la retta LD è la polare di K. Dalla legge di reciprocità della polare, dato che $K \in EF = \text{Pol}(T)$, risulta che $T \in \text{Pol}(K) = LD$.

Dato che LD è l'asse del segmento BC, abbiamo $TB = TC$ e la dimostrazione è conclusa. $\square$

Problema 31. *Sia $ABCD$ un quadrilatero convesso. Siano $E = AB \cap CD$, $F = BC \cap AD$, $P = AC \cap BD$ e sia O la proiezione ortogonale di P su EF. Dimostrare che $\angle BOC = \angle AOD$.*

Soluzione. Siano $K = EP \cap BC$, $G = BD \cap EF$.



Nel triangolo EBC le ceviane EK, BD, CA concorrono nel punto P e quindi[27] la divisione (B, C, K, F) è armonica. Pertanto $E(B, C, K, F) = -1$, quindi[28] $E(B, C, K, F)$ determina sulla trasversale BD la quaterna armonica (B, D, P, G). Allora $O(B, D, P, G) = -1$ ed essendo $PO \perp EF$ per il Teorema 4 abbiamo

$$\angle BOP = \angle POD \tag{1}$$

Analogamente $E(B, C, K, F)$ determina sulla trasversale AC la quaterna armonica (A, C, P, H); pertanto $O(A, C, P, H) = -1$ ed essendo $PO \perp HO$ abbiamo

$$\angle AOP = \angle POC \tag{2}$$

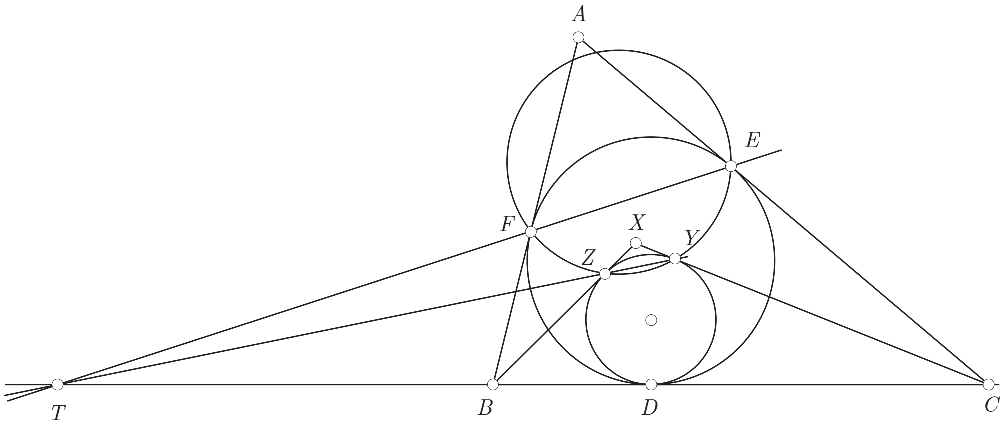
Da (1) e (2) segue che

$$\angle BOC = \angle BOP + \angle POC = \angle POD + \angle AOP = \angle AOD \qquad \square$$

[27] Esempio 5.
[28] Teorema 5

Problema 32. *Sia ABC un triangolo e siano D, E, F i punti di tangenza dell'incerchio con i lati BC, CA, AB rispettivamente. Sia X un punto interno ad ABC tale che l'incerchio del triangolo XBC tocca i lati XB, XC, BC nei punti Z, Y, D rispettivamente. Dimostrare che il quadrilatero $EFZY$ è ciclico.*

Soluzione. Siano $T = EF \cap BC$, $T' = YZ \cap BC$.



Le ceviane AD, BE, CF concorrono nel punto di Gergonne del triangolo ABC quindi[29]

$$(T, D, B, C) = -1$$

Analogamente $(T', D, B, C) = -1$ in quanto le ceviane XD, BY, CZ concorrono nel punto di Gergonne del triangolo BXC.

Pertanto, dall'unicità del quarto armonico, segue che $T = T'$, ossia le tre rette EF, YZ, CB concorrono nel punto T.

Dal teorema della secante e della tangente abbiamo

$$TE \cdot TF = TD^2 = TY \cdot TZ$$

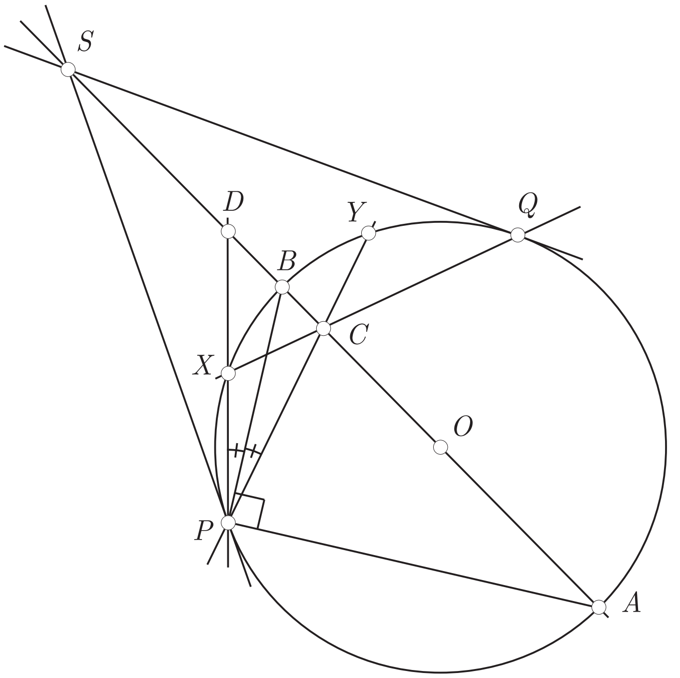
e questo prova che il quadrilatero $FZYE$ è ciclico, come richiesto. $\square$

[29] Esempio 5.

Problema 33. *Sia S un punto esterno ad una cerchio ω di centro O e siano P, Q i punti di contatto delle tangenti condotte da S ad ω. La retta SO interseca ω nei punti A, B con $B \in SA$. Il punto X appartiene al minore dei due archi PB e la retta SO interseca QX, PX nei punti C, D rispettivamente. Dimostrare che*

$$\frac{2}{AB} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{AD}$$

Soluzione. Prolunghiamo PC fino ad incontrare l'arco $\overset{\frown}{PQ}$ nel punto Y.



Dalla simmetria della figura segue che $BX = BY$ e quindi

$$\angle CPB = \angle BPX = \angle BPD$$

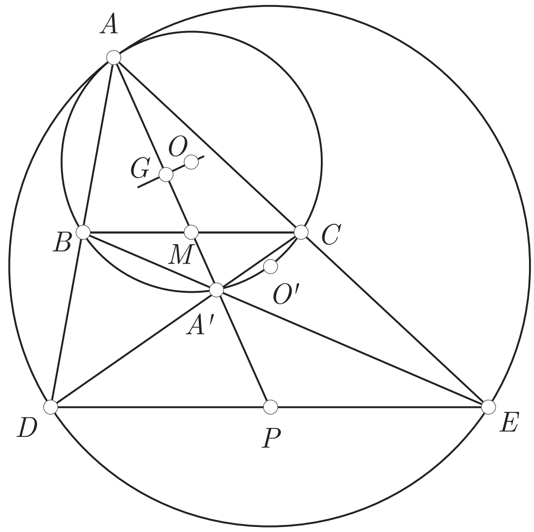
Pertanto PB è la bisettrice dell'angolo $\angle CPD$. Dato che $PA \perp PB$, dal Teorema 4 segue che la divisione (A, B, C, D) è armonica e quindi verifica la relazione di Cartesio

$$\frac{2}{AB} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{AD}$$

$\square$

Problema 34. *Siano G, O il baricentro ed il circoncentro di un triangolo ABC con $GO \perp AG$. Sia A' la seconda intersezione di AG con il circoncerchio (O) e siano $D = CA' \cap AB$, $E = BA' \cap AC$. Dimostrare che il circoncerchio di ADE appartiene ad (O).*

Soluzione. Sia M il punto medio di BC e sia $P = AM \cap DE$.



Considerando il quadrangolo completo $ABA'C$ abbiamo[30]

$$(A, A', M, P) = -1 \tag{1}$$

Pertanto il fascio $D(A, A', M, P)$ è armonico e, poichè la trasversale BC determina su di esso due segmenti conguenti $BM = MC$, dal Teorema 7 abbiamo

$$BC \parallel DE \qquad \Rightarrow \qquad DP = PE \tag{2}$$

Poichè OG è l'asse di AA' abbiamo

$$AG = GA' \tag{3}$$

Da (1), (2), (3) discende che

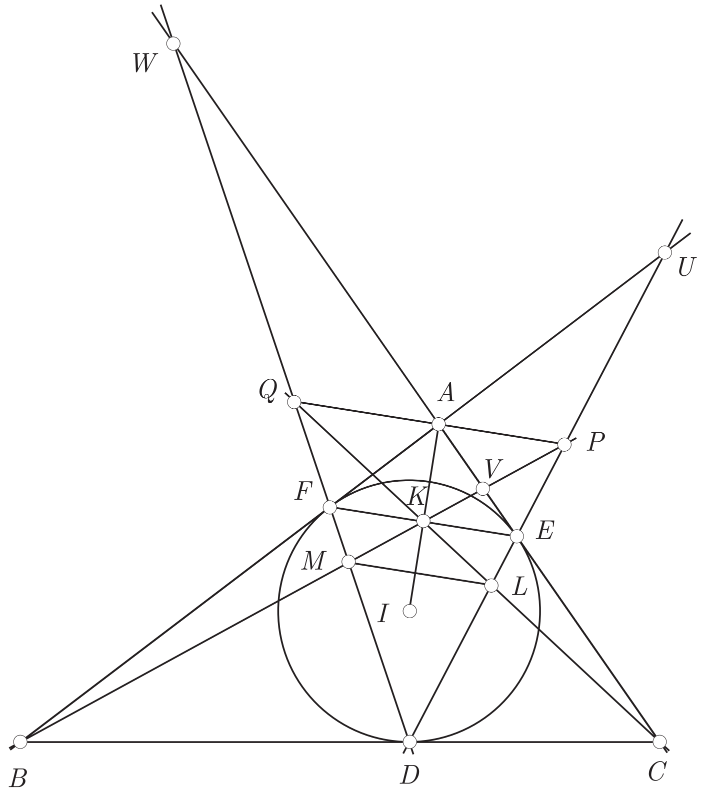
$$\frac{AM}{MA'} = -\frac{AP}{PA'} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{AP}{A'P} = \frac{AM}{MA'} = 3$$

Quindi A' è il baricentro di ADE per cui B, C sono i punti medi di AD, AE. Pertanto il triangolo ADE è il trasformato del triangolo ABC mediante un'omotetia di centro A e rapporto 2. Ne segue che il circoncentro O' del triangolo ADE è il simmetrico di A rispetto ad O e, di conseguenza, O' appartiene ad (O). $\square$

[30] Vedi Esempio 7.

Problema 35. *Sia I l'incentro di un triangolo ABC; siano D, E, F i punti di contatto dell'incerchio con i lati BC, CA, AB rispettivamente; siano $K = AI \cap EF$, $L = ED \cap KC$, $M = DF \cap KB$. Dimostrare che $LM \parallel EF$.*

Soluzione. Siano $U = ED \cap AB$, $P = ED \cap BK$, $V = BK \cap AC$.



Dalla divisione armonica (U, F, A, B) abbiamo

$$E(U, F, A, B) = -1 \quad \Rightarrow \quad (P, K, V, B) = -1 \quad \Rightarrow \quad A(P, K, V, M) = -1$$

Poichè la trasversale EF forma con $A(P, K, V, M)$ due segmenti congruenti $FK = KE$ abbiamo che $EF \parallel AP$. In modo analogo si dimostra che $EF \parallel AQ$. Pertanto i punti A, P, Q sono allineati e risulta $EF \parallel PQ$. Poichè $EF \perp AI$ ne segue che $PQ \perp AI$, quindi PQ è la bisettrice esterna dell'angolo $\angle BAC$.

Essendo $EF \parallel PQ$, poichè K è il punto medio di EF, ne segue che DK è la D-mediana del triangolo DPQ e allora, posto $L = DK \cap PQ$ e $N = PF \cap EQ$, abbiamo[31] che $(D, N, K, L) = -1$.

Proiettando la quaterna (D, N, K, L) dal punto P sulla retta DQ e dal punto Q su DP otteniamo

$$(D, F, M, Q) = -1, \qquad (D, E, L, P) = -1 \tag{1}$$

Dal punto M tracciamo la parallela ad EF e sia L' il suo punto di intersezione con PD. Poichè il birapporto si conserva per proiezione abbiamo

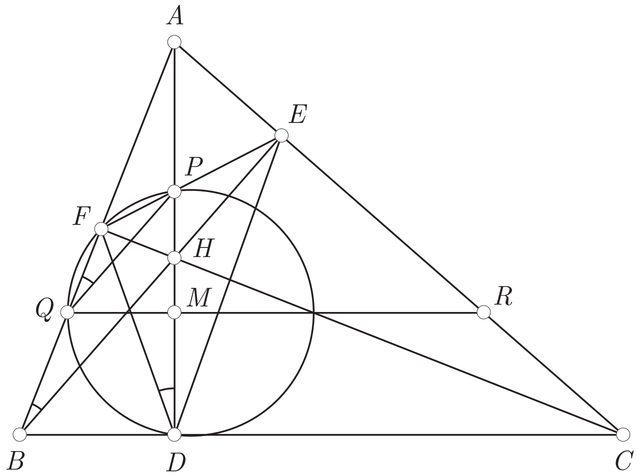
$$(D, F, M, Q) = -1 \quad \Rightarrow \quad (D, E, L', P) = -1 \tag{2}$$

Da (1) e (2) segue che $L = L'$ e ciò implica che $LM \parallel EF$. Essendo $PQ \parallel EF$ ne segue che $LM \parallel EF$. □

[31] Vedi Esempio 9

Problema 36. *Sia H l'ortocentro di un triangolo acutangolo ABC e siano D, E, F i piedi delle altezze relative ai lati BC, CA, AB; sia $P = AD \cap FE$ e siano Q, R i punti di intersezione dell'asse di PD con i lati AB, AC rispettivamente. Dimostrare che P è l'ortocentro del triangolo AQR.*

Soluzione. Sia H l'ortocentro di ABC e sia M il punto medio di PD.



E' noto che $\angle PEH = \angle HED$ (vedi Problema 8). Poichè $EA \perp EB$, il Teorema 4 implica che $(A, H, P, D) = -1$. Pertanto, è verificata la relazione di Mac Laurin

$$AP \cdot AD = AH \cdot AM \tag{1}$$

Dal quadrilatero ciclico $FHMQ$ abbiamo

$$AH \cdot AM = AF \cdot AQ \tag{2}$$

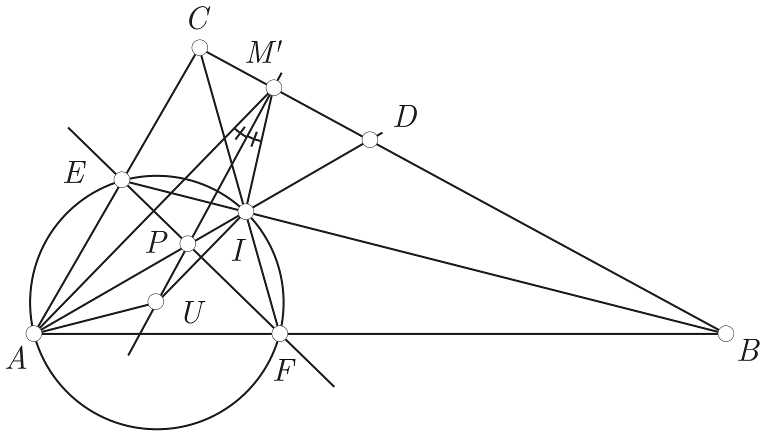
Da (1) e (2) discende che $AF \cdot AQ = AP \cdot AD$ e ciò implica che il quadrilatero $FQDP$ è ciclico. Pertanto

$$\angle FQP = \angle FDP = \angle FBH \quad \Rightarrow \quad QP \parallel BQ \quad \Rightarrow \quad QP \perp AR$$

e quindi P è l'ortocentro del triangolo AQR. $\square$

Problema 37. *Sia ABC un triangolo con $\angle A = 60°$; siano E, F le tracce delle bisettrici degli angoli $\angle B$, $\angle C$ con i lati AC, AB rispettivamente; sia M la riflessione di A rispetto ad EF. Dimostrare che M appartiene a BC.*

Soluzione. Sia $I = BE \cap CF$ l'incentro di ABC e siano $D = AI \cap BC$, $P = AI \cap EF$.



Poichè $\angle FIE = \angle BIC = 120°$ ne segue che A, F, I, E giacciono su un cerchio di centro U. Pertanto BC è la polare di P rispetto ad (U) e, di conseguenza, $UP \perp BC$ in un punto M'.

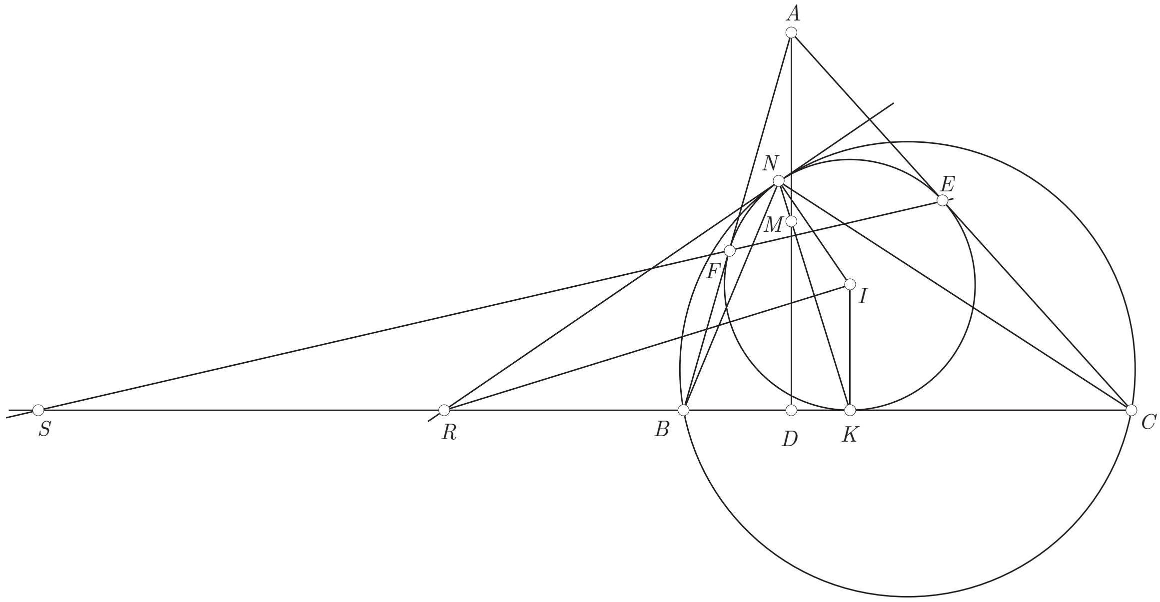
Poichè la divisione (A, I, P, D) è armonica[32] e $M'P \perp M'D$, dal Teorema 7 deduciamo che $M'P$ e BC sono le bisettrici interna ed esterna di $\angle IM'A$. Pertanto, essendo $UA = UI$, il quadrilatero $AUIM'$ è ciclico.

Ma, poichè P giace sulla diagonale FE del rombo $FUEI$ formato dai triangoli equilateri UEI e UFI, ne segue che $PU = PI$. Pertanto $AUIM'$ è un trapezio isoscele avente come asse di simmetria EF. Allora M' è la riflessione di A rispetto ad EF, cioè $M = M'$. □

[32] Vedi Esempio 7.

Problema 38. *L'incerchio ω di un triangolo acutangolo ABC è tangente al lato BC in K. Sia D la proiezione ortogonale di A su BC e sia M il punto medio di AD. La retta DM taglia ulteriormente il cerchio ω nel punto N. Dimostrare che il cerchio ω ed il circoncerchio di BCN sono sono tangenti nel punto N.*

Soluzione. Siano $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$ e supponiamo, senza perdita di generalità, che $b > c$. Siano I ed r il centro ed il raggio di ω e siano $E = AC \cap \omega$, $F = AB \cap \omega$, $S = BC \cap EF$, $R = BC \cap NN$, dove con NN indichiamo la retta tangente ad ω nel punto N.



Osserviamo che $RN = RK$ e, indicato con s il semiperimetro di ABC, risulta

$$KD = BK - BD = (s - b) - c\cos B = s - b - \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a} = \frac{(s - a)(b - c)}{a}$$

Dalla similitudine dei triangoli $RIK \sim RKD$ abbiamo

$$\frac{IK}{KD} = \frac{RK}{MD} \quad \Rightarrow \quad RK = \frac{IK \cdot MD}{KD} = \frac{rah_a}{2(s - a)(b - c)} = \frac{(s - b)(s - c)}{b - c} \tag{1}$$

Dalla divisione armonica $(S, K, B, C) = -1$ abbiamo

$$\frac{SB}{BK} = \frac{SC}{KC} \quad \Rightarrow \quad \frac{SB}{s - b} = \frac{SC}{s - c} = \frac{SB + a}{s - c} \quad \Rightarrow \quad SB = \frac{a(s - b)}{b - c}$$

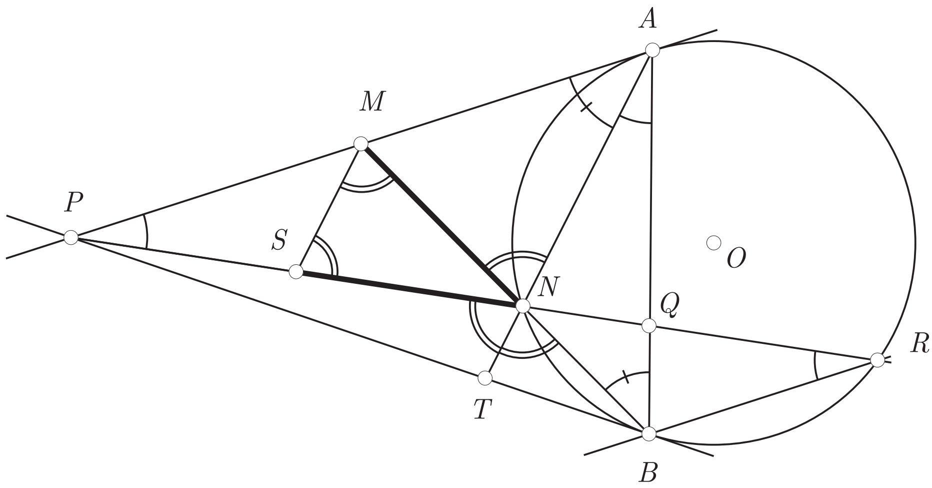
Pertanto, tenuto conto di (1), abbiamo

$$SK = SB + BK = \frac{a(s - b)}{b - c} + (s - b) = \frac{2(s - b)(s - c)}{b - c} = 2 \cdot RK \tag{2}$$

Essendo R il punto medio di SK, dalla relazione di Newton applicata alla quaterna armonica (S, K, B, C), segue che $RN^2 = RK^2 = RB \cdot RC$ e questo implica che la retta RN è tangente in N al circoncerchio di BNC. $\square$

Problema 39. *Sia ω un cerchio di centro O, sia P un punto esterno ad ω e siano A, B i punti di contatto delle tangenti condotte da P ad ω. Indicati rispettivamente con M, N il punto medio di AP e l'ulteriore punto di intersezione tra BM ed ω, dimostrare che $PN = 2 \cdot MN$.*

Soluzione. Sia $Q = PN \cap AB$, $R = PN \cap \omega$, sia S il punto medio di PN e sia $T = AN \cap PB$.



Poichè $(P, Q, N, R) = -1$ il fascio $B(P, Q, N, R)$ è armonico. Dal Teorema 8 segue che $PA \parallel BR$, in quanto la trasversale PA determina due segmenti congruenti PM ed MA sui raggi BP, BM, BA. Pertanto

$$\angle APR = \angle PRB = \angle NAB \tag{1}$$

e, poichè $\angle NBA = \angle NAP$ (perchè PA è tangente a ω) abbiamo

$$\angle TNB = \angle NAB + \angle NBA = \angle NPA + \angle PAN = \angle ANQ = \angle PNT \tag{2}$$

Da (1) e (2), dato che $\angle TNB = \angle MNA$ e $MS \parallel AN$, abbiamo

$$\angle SMN = \angle MNA = \angle TNB = \angle PNT = \angle MSN$$

e questo implica che $MN = SN$ e quindi che $PN = 2 \cdot MN$. $\square$

Problema 40. *Sia $ABCD$ un quadrilatero ciclico, sia O il suo circoncentro, sia $S = AC \cap BD$, siano t_A, t_B, t_C, t_D le tangenti al circoncerchio (O) nei punti A, B, C, D; siano $E = t_A \cap t_C$, $F = t_B \cap t_D$ e siano M, N i punti medi di AC, BD rispettivamente. Il quadrilatero $ABCD$ si dice armonico se soddisfa una delle seguenti proprietà:*

(1) A, C, F sono allineati.

(2) $AB \cdot CD = AD \cdot BC$

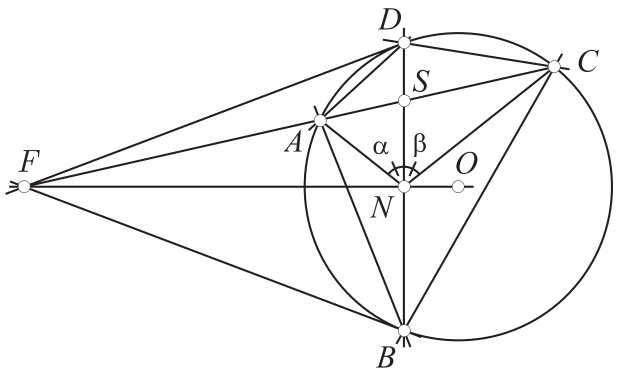
(3) $\angle DNA = \angle CND$.

(4) S è la traccia della simmediana dei triangoli ABC, ADC.

(5) Se X è un punto del cerchio (O) allora il fascio $X(A, C, B, D)$ è armonico.

Dimostrare che le proprietà (1)-(5) sono equivalenti.

Soluzione.



Quadrilatero armonico

(1) $\Leftrightarrow$ (2). Se A, C, F sono allineati allora[33]

$$\frac{DA^2}{DC^2} = \frac{FA}{FC} = \frac{BA^2}{BC^2} \Rightarrow AB \cdot CD = AD \cdot BC$$

Viceversa, se $AB \cdot CD = AD \cdot BC$, posto $B' = t_B \cap AC$, $D' = t_D \cap AC$ y abbiamo

$$\frac{B'A}{B'C} = \frac{BA^2}{BC^2} = \frac{DA^2}{DC^2} = \frac{D'A}{D'C} \Rightarrow B' = D' = F \Rightarrow F \text{ appartiene ad } AC.$$

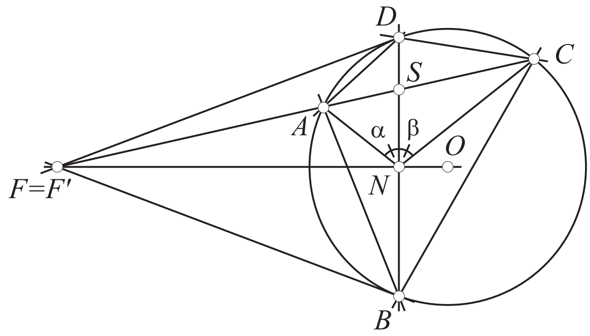
(1) $\Leftrightarrow$ (3). Se $\angle DNA = \angle CND$ allora ND è la bisettrice interna di $\angle ANC$ e siccome $DN \perp NF$, allora NF è la bisettrice esterna di $\angle ANC$. Se $F' = NF \cap AC$, allora F' è il coniugato armonico di S rispetto a A e C, per cui NS è la polare di F', però NS è anche la polare di F, quindi $F = F'$ appartiene ad AC.

Viceversa, se A, C, F sono allineati, essendo F il polo della retta BD, S è il coniugato armonico di F, quindi $FA : FC = AS : SC$, e allora, chiamando $\alpha = \angle DNA$, $\beta = \angle CND$, abbiamo

$$\frac{FA}{FC} = \frac{AS}{SC} \Rightarrow \frac{NA \cdot \operatorname{sen}(90^\circ - \alpha)}{NC \cdot \operatorname{sen}(90^\circ + \beta)} = \frac{NA \cdot \operatorname{sen}\alpha}{NC \cdot \operatorname{sen}\beta} \Rightarrow \frac{\cos\alpha}{\cos\beta} = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\beta}$$
$$\Rightarrow \operatorname{sen}\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\beta\cos\alpha = 0 \Rightarrow \operatorname{sen}(\alpha - \beta) = 0 \Rightarrow \alpha = \beta.$$

[33] Vedi Esempio 6

(1) $\Leftrightarrow$ (4).



Se A, C, F sono allineati, siccome BD è la polare di F, abbiamo che S è il coniugato armonico di F rispetto a A e C, pertanto

$$\frac{AS}{SC} = \frac{FA}{FC} = \frac{AD^2}{DC^2},$$

da cui segue che DS è una simmediana del triangolo DAC. Lo stesso ragionamento si può applicare per dedurre che in questo caso anche BS è una simmediana del triangolo BAC.

Viceversa, se DS è una simmediana del triangolo DAC e poniamo $F' = t_D \cap AC$ abbiamo che

$$\frac{AS}{SC} = \frac{AD^2}{DC^2} = \frac{F'A}{F'C},$$

per cui F' è il coniugato armonico di S rispetto a A e C, e deve essere $F' = F$, per cui A, C, F sono allineati.

(2) $\Leftrightarrow$ (5). Ricordiamo la definizione di birapporto di quattro punti A, B, C, D appartenenti a una circonferenza γ. Preso un punto $X \in \gamma$ definiamo[34]

$$(A, B, C, D)_\gamma = (XA, XB, XC, XD) = \frac{\sin \measuredangle AXC \cdot \sin \measuredangle BXD}{\sin \measuredangle AXD \cdot \sin \measuredangle BXC}$$

e da tale espressione si evince che $(A, B, C, D)_\gamma$ non dipende dal punto X.

Indicato con R il raggio del circoncerchio di $ABCD$, dal teorema della corda abbiamo

$$AC = 2R \sin \angle AXC,\ BD = 2R \sin \angle BXD,\ AD = 2R \sin \angle AXD,\ BC = 2R \sin \angle BXC$$

Se A, B, C, D si susseguono in quest'ordine sulla circonferenza, tenuto conto che gli angoli $\measuredangle AXC$, $\measuredangle BXD$, $\measuredangle AXD$, $\measuredangle BXC$ sono due positivi e due negativi, abbiamo:

$$(A, B, C, D)_\gamma = \frac{2R \sin \measuredangle AXC \cdot 2R \sin \measuredangle BXD}{2R \sin \measuredangle AXD \cdot 2R \sin \measuredangle BXC} = \frac{AC \cdot BD}{AD \cdot BC}$$

Pertanto

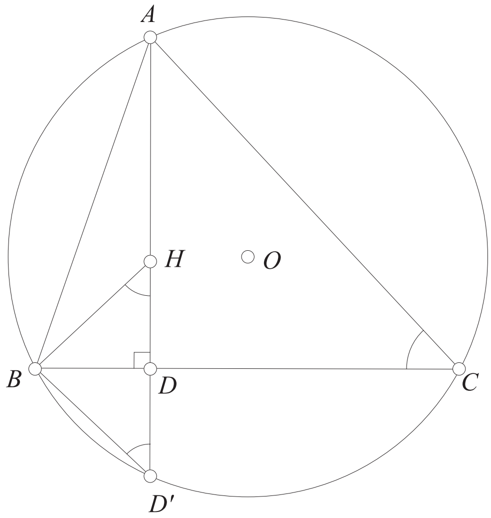
$$\begin{aligned} AC \cdot BD = AD \cdot BC \quad &\Leftrightarrow \quad (A, B, C, D)_\gamma = 1 \\ &\Leftrightarrow \quad (A, C, B, D)_\gamma = -1 \\ &\Leftrightarrow \quad X(A, C, B, D) = -1 \end{aligned}$$

$\square$

[34]Il simbolo $\measuredangle XYZ$ denota la misura algebrica dell'angolo orientato $\angle XYZ$.

3 Appendice.

Teorema 9. *Sia H l'ortocentro di un triangolo ABC, sia $D = AH \cap BC$. Se D' il punto di intesezione di AH con il circoncerchio ($D' \neq A$) allora $HD = DD'$.*

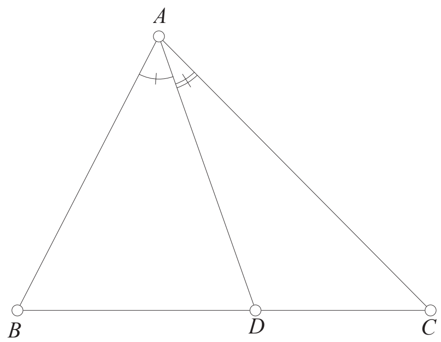


Dimostrazione. I due triangoli rettangoli BDH e BDD' sono congruenti in quanto hanno il lato BD in comune e $\angle BHD = \angle BCA = \angle BD'D$. Pertanto $DH = DD'$. □

Teorema 10. *Sia ABC un triangolo e $D \in BC$ abbiamo:*

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{\sin \angle BAD}{\sin \angle DAC}$$

Dimostrazione. Supponiamo che D sia interno al segmento BC.



Dal teorema dei seni applicato ai triangoli $\triangle ABD$ e $\triangle ADC$ segue che

$$BD = \frac{AB}{\sin \angle ADB} \cdot \sin \angle BAD$$

$$DC = \frac{AC}{\sin(180° - \angle ADB)} \cdot \sin \angle DAC = \frac{AC}{\sin \angle ADB} \cdot \sin \angle DAC$$

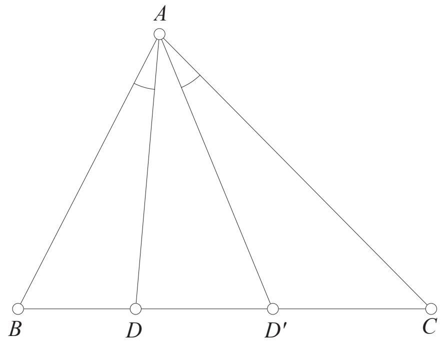
e l'uguaglianza richiesta si ottiene dividendo membro a membro le due relazioni ottenute.

Se P è estermo al segmento BC la dimostrazione è analoga. □

Teorema 11. *Sia dato un triangolo ABC e siano $D, D' \in BC$. Se AD, AD' sono due ceviane coniugate isogonali allora*

$$\frac{BD}{DC}\cdot\frac{BD'}{D'C}=\frac{AB^2}{AC^2}$$

Dimostrazione.



Poichè AD e AD' sono coniugate isogonali

$$\sin\angle BAD=\sin\angle D'AC \qquad , \qquad \sin\angle BAD'=\sin\angle DAC$$

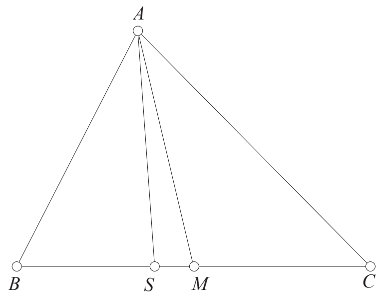
Pertanto, tenuto conto del Teorema 10, abbiamo

$$\frac{BD}{DC}\cdot\frac{BD'}{D'C}=\frac{AB}{AC}\cdot\frac{\sin\angle BAD}{\sin\angle DAC}\cdot\frac{AB}{AC}\cdot\frac{\sin\angle BAD'}{\sin\angle D'AC}=\frac{AB^2}{AC^2}=\frac{c^2}{b^2} \qquad \square$$

Corollario. (**Teorema di Steiner**) *Se AS è una simmediana del triangolo ABC allora*

$$\frac{BS}{SC}=\frac{AB^2}{AC^2}=\frac{c^2}{b^2}$$

Dimostrazione.



Detto M il punto medio di BC, siccome AS è una simmediana, le ceviane AS e AM sono coniugate isogonali. Dal Teorema 11 segue che

$$\frac{BS}{SC}\cdot\frac{BM}{MC}=\frac{AB^2}{AC^2} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{BS}{SC}=\frac{AB^2}{AC^2}=\frac{c^2}{b^2} \qquad \square$$

Riferimenti bibliografici

[1] Lachlan, M.A, *Modern pure geometry, the straight line and the circle*, MacMillan, New York (1893)

[2] Shively, L.S., *An introduction to modern geometry*, John Wiley & Sons, New York (1939)

[3] Daus, P.H., *College geometry*, Prentice Hall, New York (1941)

[4] Altshiller-Court, N., *College geometry, an introduction to the modern geometry of the triangle and the circle*, Barnes & Noble, New York (1952)

[5] Durell, C.V., *Modern geometry, the straight line and the circle*, MacMillan, London (1957)

[6] Eves, H., *Fundamentals of Modern elementary geometry*, Jones and Bartlett, London (1992)

[7] Nicula, V., Pohoaţă, C., *Diviziune armonicã*, Editura Gil (2007)

[8] Winsor, A.S., *Moder Higher Plane Geometry*, The Cristopher Publishing House, Boston (1941)

[9] Paris Pamfilos, Geometricon, http://www.math.uoc.gr/~pamfilos/eGallery/Gallery.html

[10] MathLinks Forum, http://www.artofproblemsolving.com/Forum/portal.php?ml1