INTRODUZIONE ALLA DIMOSTRAZIONE DI GEOMETRIA
UTILIZZANDO L'ALLINEAMENTO DEI PUNTI

Prof. Carla Tedeschi

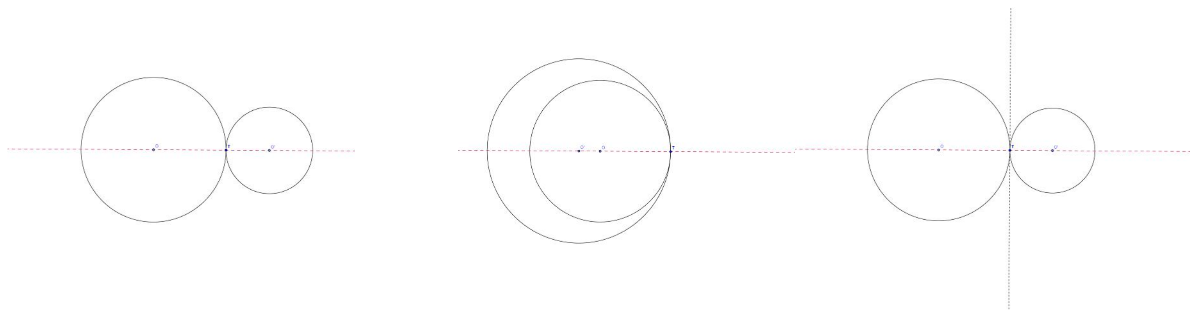
Nella Geometria Euclidea ci si imbatte alcune volte in teoremi la cui tesi è:
' …**dimostrare che i tre punti sono allineati'**

Questi teoremi mi sono stati spesso d'aiuto per la preparazione degli studenti alle gare perché si trovano in molti contesti (dalla congruenza alla similitudine dei triangoli, ecc.) e mi permettono di ripassare la geometria piana quasi totalmente oltre che approfondire le tecniche di dimostrazione.

E' utile proporre esercizi nei quali si richiede la dimostrazione dell'allineamento di punti anche perché, già negli esercizi più semplici, si nascondono diverse insidie; queste portano a commettere un gran numero di errori, che possono poi essere identificati con gli studenti in discussioni molto proficue.

Esempi.

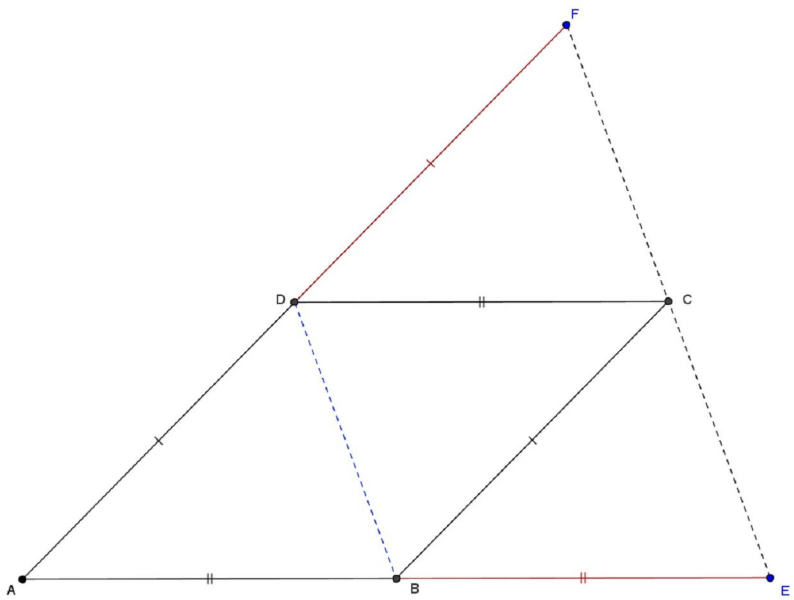
Teorema 1: Due circonferenze che hanno centro in *O* e *O'* sono tangenti in un punto *T*. Dimostrare che i punti *O*, *O'*, *T* sono allineati .



Naturalmente è probabile che molti studenti trovino facile il teorema, però tale proposta mi permette:

a) di far riflettere sull'attenta lettura del testo di un enunciato (gli studenti tendono a non prestare la dovuta attenzione se le circonferenze sono tangenti esternamente o internamente e quindi a non valutare i due casi)
b) di far capire loro che per la dimostrazione dell'allineamento posso pensare a due percorsi: che l'angolo *OTO'* è piatto (possibile se le circonferenze sono tangenti esternamente) oppure che *O,O',T* appartengono ad una stessa retta (possibile in entrambi i casi) che viene costruita in base a qualche particolare considerazione (in questo caso la perpendicolare ad una retta per un punto).

Teorema 2: Dato un parallelogrammo *ABCD*, prolunga *AB* dalla parte di *B*.di un segmento $BE \cong AB$ e *AD* dalla parte di *D*, di un segmento $DF \cong AD$. Dimostrare che *E,C,F* sono allineati.



Ipotesi *ABCD* parallelogrammo ;
A,B,E ed *A,D,F* allineati ;
$BE \cong AB$, $DF \cong AD$;
Tesi *E,C,F* allineati.

<u>Dimostrazione:</u>

Si tracci la diagonale *BD* :

FD è congruente e parallelo a *BC* (per ipotesi) $\Rightarrow BDFC$ parallelogrammo, da cui $D\hat{F}C + F\hat{C}B = 180°$; $D\hat{F}C \cong D\hat{B}C$ e $BD // FC$.

DC è congruente e parallelo a *BE* (per ipotesi) $\Rightarrow BDCE$ parallelogrammo, da cui $BD // CE$;

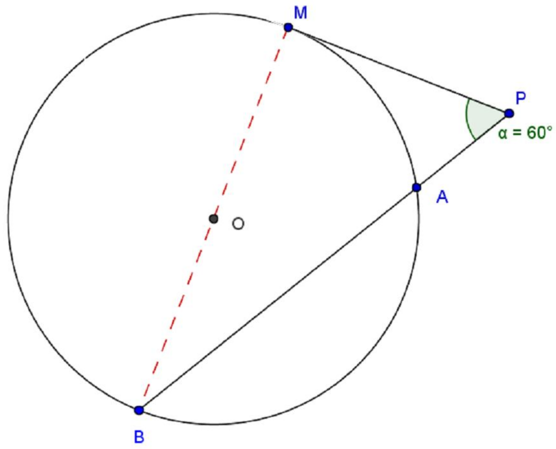
Due conclusioni:

- da ciò segue che $D\hat{B}C \cong B\hat{C}E$ (alterni interni…);
  quindi, per transitività $B\hat{C}E + F\hat{C}B = 180°$ c.v.d.
- per C passa una sola retta // a BD quindi FC e CE appartengono alla stessa retta c.v.d.

ATTENZIONE

in questo teorema è un **errore ricorrente** da parte degli studenti: considerare $D\hat{F}C \cong B\hat{C}E$ perché corrispondenti rispetto a $AF // BC$ tagliate dalla ***trasversale*** (!!) *FE*.

Teorema 3: Sia data una circonferenza di centro O e raggio *r* e una sua corda *AB* di lunghezza $r\sqrt{3}$; sul prolungamento della corda *AB* dalla parte di *A* si prenda un punto P in modo che valga 60° l'angolo formato dalla tangente alla circonferenza *PM* (*M* punto di tangenza) e la secante *PB*. Si dimostri che *B*, *O*, *M* sono allineati.



Ipotesi $AB = r\sqrt{3}$, *B*,*A*,*P* allineati
PM tangente alla circonferenza in *M*
$B\hat{P}M = 60°$

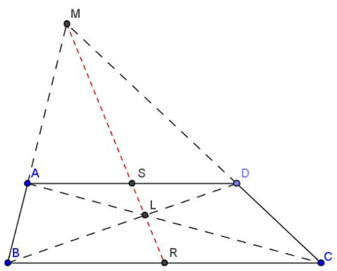
Tesi *B*, *O*, *M* sono allineati.

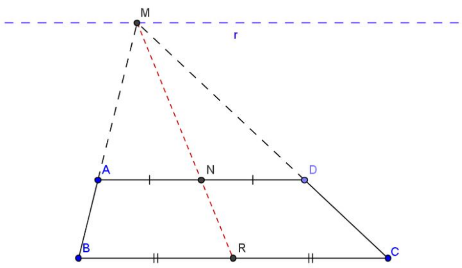
Dimostrazione

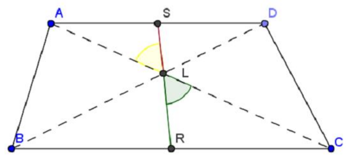
[ATTENZIONE : **molti errori** se si disegna in partenza *O* su *BM*.!!]

Consideriamo il triangolo *BMP*:
$M\hat{P}B = 60°$ (ipotesi)
$B\hat{M}A = 60°$ (angolo alla circonferenza che insiste sulla corda $AB = r\sqrt{3}$)
$A\hat{M}P \cong M\hat{B}A$ (insistono sullo stesso arco *AM*)
Quindi dalla somma degli angoli interni del triangolo *BMP*, $A\hat{M}P \cong M\hat{B}A = 30°$;
Per cui $B\hat{M}P = 90°$: ma la corda di una circonferenza perpendicolare alla tangente nel punto di tangenza è il diametro; c.v.d.

Teorema 4. In un trapezio i punti medi delle basi, il punto d’incontro dei lati obliqui e il punto d’incontro delle diagonali sono allineati.







Ipotesi $AD // BC$

M intersezione tra le rette AB e DC

R punto medio di BC

S punto medio di AD

$AC \cap BD = L$

Tesi M,S,L,R allineati

<u>Dimostrazione</u>

Tracciamo la retta r parallela a BC passante per M.

Considerato il fascio di rette parallele BC, AD e r tagliate dalle trasversali MB e MC, per la corrispondenza di Talete MR taglia il lato AD in un punto N tale che $AN \cong ND$;

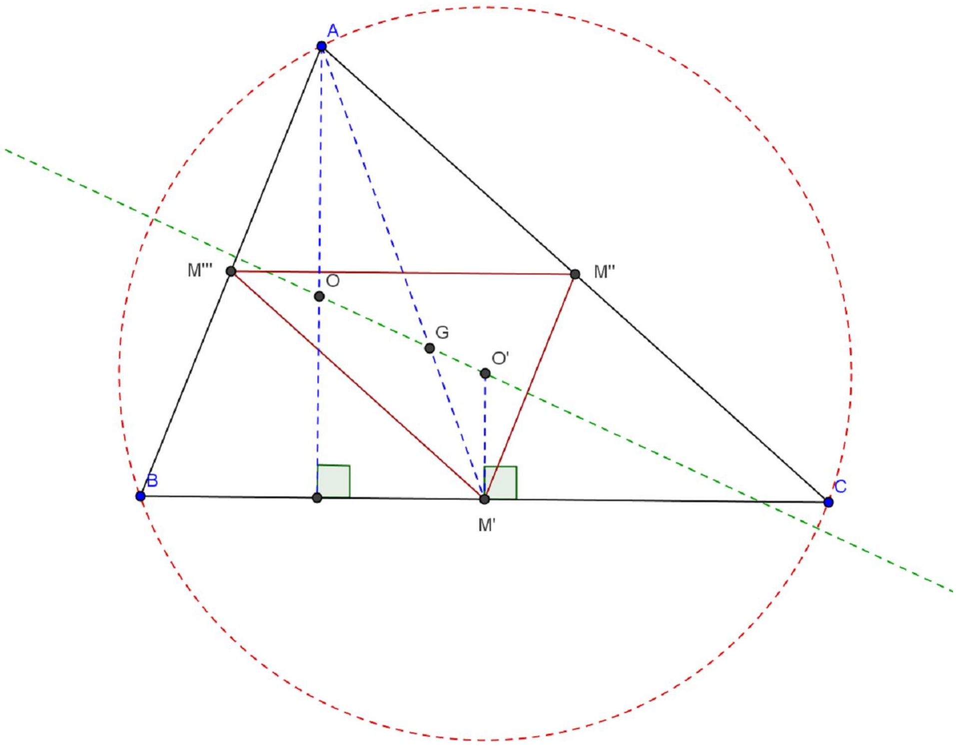
per l’unicità del punto medio $N \equiv S \Rightarrow M, S, R$ allineati.

I triangoli ALD e BLC sono simili per il primo criterio $\Rightarrow$ $\dfrac{AL}{LC} = \dfrac{AD}{BC} =$ (per costruzione) $\dfrac{2AS}{2RC} = \dfrac{AS}{RC}$

cioè (dalla prima e dalla quarta frazione) i triangoli ALS e LRC sono simili per il secondo criterio da ciò segue $A\hat{L}S \cong R\hat{L}C$; ma $A\hat{L}S$ è supplementare di $S\hat{L}C$ per costruzione $\Rightarrow R\hat{L}C$ è supplementare di $S\hat{L}C$ cioè S, L , R sono allineati. c.v.d.

ATTENZIONE : un **errore ricorrente** è dovuto all’utilizzo degli angoli opposti al vertice.

Teorema 5. In un triangolo baricentro, ortocentro e circocentro sono allineati (**retta di Eulero**)



Dimostrazione

Per questa dimostrazione utilizziamo una omotetia.

Consideriamo il baricentro *G* di un triangolo *ABC*.

Si applichi ai punti del triangolo una omotetia $\omega\left(G;-\frac{1}{2}\right)$

Per la proprietà della mediana: $C \xrightarrow{\omega} M_{AB}$ $\quad A \xrightarrow{\omega} M_{BC}$ $\quad B \xrightarrow{\omega} M_{AC}$

Quindi il triangolo *ABC* viene trasformato dall'omotetia nel suo triangolo *mediano*.

Le altezze del triangolo *mediano* sono le trasformate delle altezze del triangolo di partenza *ABC* (un'omotetia trasforma rette incidenti in rette incidenti e conserva gli angoli): questo significa che l'omotetia di centro *G* trasforma l'ortocentro *O* del triangolo *ABC* nell'ortocentro *O'* del triangolo *mediano*; del resto le altezze del triangolo mediano sono gli assi del triangolo *ABC* , quindi *O'* è il circocentro di *ABC* . La nostra tesi è allora conseguenza del fatto che la retta che passa per *O* e per il suo trasformato *O'* passa anche per il centro dell'omotetia *G* . c.v.d.

In più una conseguenza dell'aver usato l'omotetia $\omega\left(G;-\frac{1}{2}\right)$ è che $OG = 2O'G$ cioè la distanza tra l'ortocentro di un triangolo dal suo baricentro è doppia rispetto a quella dello stesso baricentro dal circocentro.

O————*G*——*O'*

Interessante applicazione analitica.

Sia *ABC* un triangolo e *O’* il suo circocentro . Riferito il triangolo ad un sistema di riferimento con centro nel suo circocentro e considerati i vettori con punto di applicazione in *O’* si sa che il baricentro $G = \frac{A+B+C}{3}$; dalle considerazioni precedenti segue che l’ortocentro $O = A+B+C$.

Altra considerazione interessante:

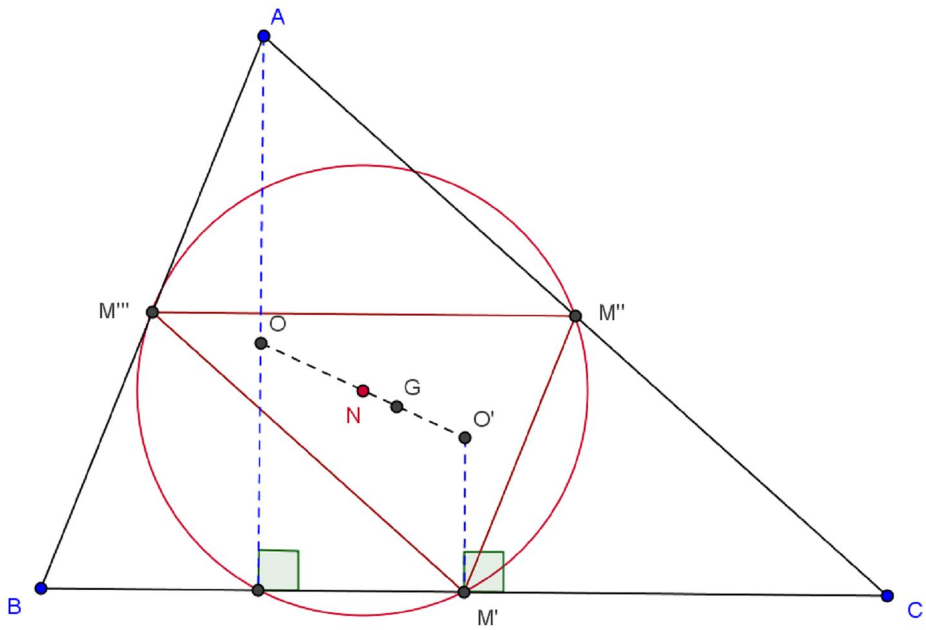
Consideriamo ancora $\omega\left(G;-\frac{1}{2}\right)$ e applichiamo l’omotetia a *O’* considerato come circocentro del triangolo *ABC* precedente; $O' \xrightarrow{\omega} N$; poiché ω è un’omotetia, *N* è il circocentro del trasformato del triangolo *ABC*, cioè del triangolo *mediano*;

avendo poi :

$$GN = \frac{1}{2}GO' \Rightarrow GN = \frac{1}{6}OO' \text{ e anche } GN + GO' = \left(\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\right)OO' = \frac{1}{2}OO'$$

O ———*N*—*G* ——*O’*

N punto medio del segmento *OO’*.



Come ultimo esempio, che secondo me potrebbe essere proposto agli studenti più motivati, propongo un teorema nel quale per dimostrare l'allineamento di tre punti si utilizza il **Teorema di Menelao.**

Per enunciare il Teorema di Menelao è meglio dare un'orientazione ai segmenti. Useremo queste notazioni: dati due punti A e B, indicheremo con $|AB|$ la lunghezza del segmento di estremi A e B Inoltre , se A e B stanno su di una retta orientata, porremo:

$AB = |AB|$ se A precede B rispetto all'orientamento della retta

$AB = -|AB|$ se A segue B.

Osserviamo che se A,B,C,D sono punti che stanno su una stessa retta orientata, il rapporto $\frac{AB}{CD}$ non dipende dal particolare orientamento della retta.

Teorema di Menelao

I punti P, Q, R appartenenti rispettivamente ai lati (o ai loro prolungamenti) AB, BC e CA di un triangolo ABC sono allineati, se e solo se

$$\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CR}{RA} = -1$$

le figure 1a e 1b mostrano le situazioni che si possono presentare.

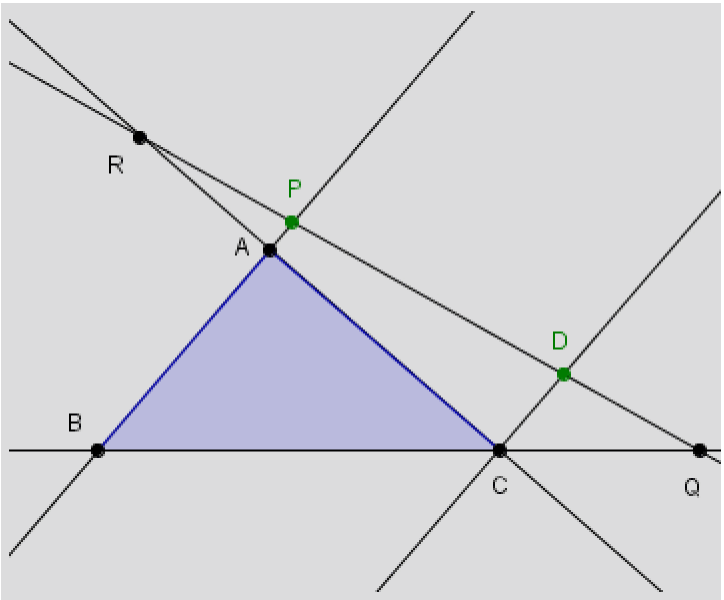


figura 1a

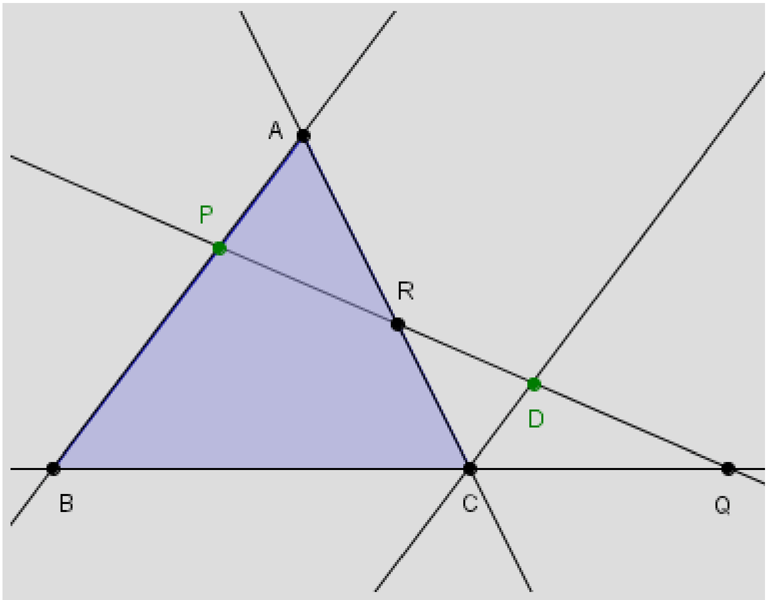
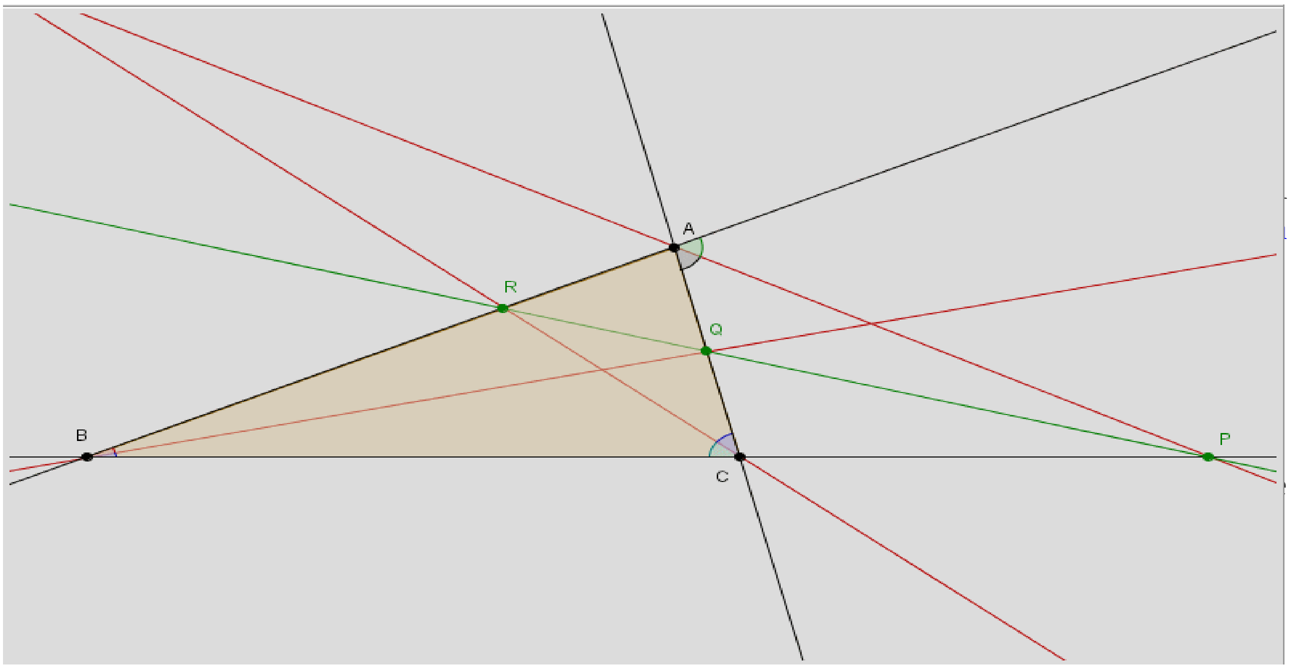


figura 1b

Teorema 6

Le bisettrici di due angoli di un triangolo scaleno *ABC* e la bisettrice dell'angolo esterno del terzo angolo, intersecano i lati (o i loro prolungamenti) in tre punti allineati.

Dimostrazione.



Costruite le bisettrici *BQ* di $A\hat{B}C$ e *CR* di $B\hat{C}A$ e quella dell'angolo esterno in *A* che incontra il prolungamento del lato *BC* in *P* (vedi figura) , alle prime due possiamo applicare il teorema della bisettrice ottenendo le proporzioni

$$\frac{|AQ|}{|QC|}=\frac{|AB|}{|BC|} \qquad \text{e} \qquad \frac{|BR|}{|RA|}=\frac{|BC|}{|CA|}$$

Per la bisettrice esterna *AP* vale invece il teorema corrispondente che esprime il rapporto tra le distanze del punto di intersezione *P* con *B* e *C*. La sua applicazione porta alla ulteriore proporzione

$$\frac{|CP|}{|BP|}=\frac{|CA|}{|AB|}$$

Moltiplicando i primi membri delle tre proporzioni si ha

$$\frac{|AQ|}{|QC|}\cdot\left|\frac{BR}{RA}\right|\cdot\frac{|CP|}{|BP|}=\frac{|AB|}{|BC|}\cdot\frac{|BC|}{|CA|}\cdot\frac{|CA|}{|AB|}=1$$

Se usiamo la convenzione che abbiamo fatto sui segni, l'espressione precedente ci dice che

$$\frac{BR}{RA}\cdot\frac{AQ}{QC}\cdot\frac{CP}{PB}=-1$$

perché $\frac{CP}{PB}=-\frac{|CP|}{|PB|}$ mentre gli altri due rapporti hanno segno positivo.

I punti Q, P, R risultano perciò allineati per il teorema di Menelao . (c.v.d.).