Problemi di algebra

Polinomi

- (1) Sia $p(x)$ il polinomio $3x^3 + 4x^2 - 2x + 1$ e siano α, β, γ le sue radici. Quanto vale $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$? E $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3$?
- (2) Le radici del polinomio $37x^5 + \pi x^4 + 27x^3 - 0,913x^2 + 2x + 1$ sono tutte reali?
- (3) Sia $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ un polinomio di n -esimo grado con $a_0 \neq 0$ e siano $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ le sue radici (non necessariamente reali). Riusciamo a trovare un polinomio $q(x)$ di n -esimo grado che abbia come radici $\frac{1}{\lambda_1}, \frac{1}{\lambda_2}, \dots, \frac{1}{\lambda_n}$? Se sì, quali sono i suoi coefficienti in funzione degli a_i ?
- (4) Dimostrare che se $p(x) \in \mathbb{Z}[x]$ (cioè è un polinomio a coefficienti interi) allora per qualsiasi $a, b \in \mathbb{Z}$ vale $a - b \mid p(a) - p(b)$.
- (5) Sia $p(x) \in \mathbb{Z}[x]$ con $p(0)$ e $p(5)$ dispari. Può $p(x)$ avere radici intere? Se sì, quante?
- (6) (a) Sia $p(x)$ un polinomio di grado al più 2010 tale che $p(i) = 0 \quad \forall i \in \{0, 1, \dots, 2009\}$ e $p(2010) = 1$. Quanto vale $p(2011)$?
(b) Sia $p(x)$ un polinomio di grado al più 2010 tale che $p(i) = i \quad \forall i \in \{0, 1, \dots, 2009\}$ e $p(2010) = 2011$. Quanto vale $p(2011)$?

Disuguaglianze

- (8) Siano $x, y \in \mathbb{R}^+$ (reali positivi). Dimostrare che $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$.
- (9) Siano $a, b, c, d \in \mathbb{R}^+$. Dimostrare che $ab + bc + cd + da \leq a^2 + b^2 + c^2 + d^2$.

AM-GM Ricordiamo che tra numeri reali non negativi vale la disuguaglianza tra media aritmetica e media geometrica, ovvero:

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}$$

- (10) Siano x, y, z reali positivi tali che $x + y + z = 1$. Quanto può valere al massimo xyz ? E $x^3 y^2 z$? E $\sqrt{xy^2 z}$?

Successioni per ricorrenza

- (11) Ciccio c'è e continua a puntare sul suo numero preferito, l'8, alla roulette. Se vince incassa 36 volte la posta, cioè quanto ha puntato più 35 volte la puntata. Volendo a ogni costo guadagnare 1 sesterzio da investire in schedine per il Superenalotto, adotta questa strategia:
 - All'inizio punta $\frac{1}{35}$ sesterzi in modo da poter vincere $\frac{36}{35} = 1 + \frac{1}{35}$.
 - Se non vince punta esattamente quanto gli serve per rifarsi delle perdite totali e guadagnare, comunque, un sesterzo. A esempio, se alla prima giocata Ciccio perde, alla seconda punta $\frac{36}{35^2}$ sesterzi per poter vincere $\frac{36^2}{35^2} = \frac{36}{35^2} + \frac{1}{35} + 1$.

Se l'8 continua a non uscire, quanto deve puntare all' n -esima giocata?

Disuguaglianze

- (8) Siano $x, y \in \mathbb{R}^+$ (reali positivi). Dimostrare che $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$.
- (9) Siano $a, b, c, d \in \mathbb{R}^+$. Dimostrare che $ab + bc + cd + da \leq a^2 + b^2 + c^2 + d^2$.

AM-GM Ricordiamo che tra numeri reali non negativi vale la disuguaglianza tra media aritmetica e media geometrica, ovvero:

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}$$

- (10) Siano x, y, z reali positivi tali che $x + y + z = 1$. Quanto può valere al massimo xyz ? E x^3y^2z ? E $\sqrt{xy^2z}$?

Successioni per ricorrenza

- (11) Ciccio c'è e continua a puntare sul suo numero preferito, l'8, alla roulette. Se vince incassa 36 volte la posta, cioè quanto ha puntato più 35 volte la puntata. Volendo a ogni costo guadagnare 1 sesterzio da investire in schedine per il Superenalotto, adotta questa strategia:

- All'inizio punta $\frac{1}{35}$ sesterzi in modo da poter vincere $\frac{36}{35} = 1 + \frac{1}{35}$.
- Se non vince punta esattamente quanto gli serve per rifarsi delle perdite totali e guadagnare, comunque, un sesterzo. A esempio, se alla prima giocata Ciccio perde, alla seconda punta $\frac{36}{35^2}$ sesterzi per poter vincere $\frac{36^2}{35^2} = \frac{36}{35^2} + \frac{1}{35} + 1$.

Se l'8 continua a non uscire, quanto deve puntare all' n -esima giocata?

Problemi di algebra

Polinomi

- (1) Sia $p(x)$ il polinomio $3x^3 + 4x^2 - 2x + 1$ e siano α, β, γ le sue radici. Quanto vale $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$? E $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3$?
- (2) Le radici del polinomio $37x^5 + \pi x^4 + 27x^3 - 0,913x^2 + 2x + 1$ sono tutte reali?
- (3) Sia $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ un polinomio di n -esimo grado con $a_0 \neq 0$ e siano $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ le sue radici (non necessariamente reali). Riusciamo a trovare un polinomio $q(x)$ di n -esimo grado che abbia come radici $\frac{1}{\lambda_1}, \frac{1}{\lambda_2}, \dots, \frac{1}{\lambda_n}$? Se sì, quali sono i suoi coefficienti in funzione degli a_i ?
- (4) Dimostrare che se $p(x) \in \mathbb{Z}[x]$ (cioè è un polinomio a coefficienti interi) allora per qualsiasi $a, b \in \mathbb{Z}$ vale $a - b | p(a) - p(b)$.
- (5) Sia $p(x) \in \mathbb{Z}[x]$ con $p(0)$ e $p(5)$ dispari. Può $p(x)$ avere radici intere? Se sì, quante?
- (6) (a) Sia $p(x)$ un polinomio di grado al più 2010 tale che $p(i) = 0 \quad \forall i \in \{0, 1, \dots, 2009\}$ e $p(2010) = 1$. Quanto vale $p(2011)$?
- (b) Sia $p(x)$ un polinomio di grado al più 2010 tale che $p(i) = i \quad \forall i \in \{0, 1, \dots, 2009\}$ e $p(2010) = 2011$. Quanto vale $p(2011)$?